微分積分学 2

フビニの定理の演習問題

2006 年 10 月 12 日

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 Ω が、$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $(x \in [a,b])$ を満す φ_1, φ_2 によって

$$(\heartsuit_1) \qquad \Omega = \{(x,y); x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

と書けるならば、

$$(\heartsuit_2) \qquad \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(Ω の点の x 座標の最小値 a、最大値 b, 下のグラフ $y = \varphi_1(x)$, 上のグラフ $y = \varphi_2(x)$ を探す。)

同様に Ω が、$\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ $(y \in [c,d])$ を満す ψ_1, ψ_2 によって

$$(\spadesuit_1) \qquad \Omega = \{(x,y); y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

と書けるならば、

$$(\spadesuit_2) \qquad \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

(Ω の点の y 座標の最小値 c、最大値 d, 左のグラフ $x = \psi_1(y)$, 右のグラフ $x = \psi_2(y)$ を探す。)

- Ω がどういうものか認識することが重要。二重積分の場合は平面図形なので、**図をきちんと描くのが絶対のお勧め**。$\varphi_j(x)$ や $\psi_j(y)$ を読み取る辺りが山場か。
- $(\heartsuit)$, $(\spadesuit)$ のどちらが良いかはケース・バイ・ケース。詰まったらスイッチすること。
- 「積分順序を交換する」という問題には、

  $$(\heartsuit_2) \Longrightarrow (\heartsuit_1) \Longrightarrow \Omega \text{ の図を描く} \Longrightarrow (\spadesuit_1) \Longrightarrow (\spadesuit_2)$$

  または

  $$(\spadesuit_2) \Longrightarrow (\spadesuit_1) \Longrightarrow \Omega \text{ の図を描く} \Longrightarrow (\heartsuit_1) \Longrightarrow (\heartsuit_2)$$

  と進める。

---

1. $y = 1 - x^2$ と $y = (x-1)^2$ で囲まれる閉領域 Ω に対して、$I = \displaystyle\iint_\Omega y\,dx\,dy$ を求めよ。

2. $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形 (の内部と周) Ω に対して、$\displaystyle\iint_\Omega xy\,dx\,dy$ を求めよ。

3. 次の重複積分の積分順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy$

4. (時間が余ったら) 教科書 pp.16-17 の問題 **3** を解いて下さい。必ず図を描くこと。

____ 年 ____ 組 ____ 番　　　　氏名 ________________　　　　　　　　　2006 年 10 月 12 日

微分積分学 2

フビニの定理の演習問題解説

2006 年 10 月 12 日

1. $y = 1 - x^2$ と $y = (x-1)^2$ で囲まれる閉領域 Ω に対して、$I = \iint_{\Omega} y\,dx\,dy$ を求めよ。

(解) 図を描いてみると $\Omega = \{(x,y); 0 \le x \le 1,\ (x-1)^2 \le y \le 1 - x^2\}$ となることが分かり、Ω は縦線集合である。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{1-x^2} y\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y^2 \right]_{y=(x-1)^2}^{y=1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1-x^2)^2 - (x-1)^4 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 4x^3 - 8x^2 + 4x\,dx = \frac{1}{2} \left[x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

2. $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形 (の内部と周) Ω に対して、$\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy$ を求めよ。

(解) 先に x で積分する (公式 ($\spadesuit_2$) を使う) 方針で解いてみよう[1]。左側のグラフは $x = y$ ($y = x$ を x について解く), 右側のグラフは $x = 2 - y$ ($x + y = 2$ あるいは $y = 2 - x$ を x について解く) なので、$\Omega = \{(x,y); 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y\}$ と書けることが分かり、Ω は縦線集合である。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} xy\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=2-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \left((2-y)^2 - y^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y\,(4 - 4y)\,dy = 2 \int_0^1 (y - y^2) dy = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

3. 次の重複積分の積分順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$ (3) $\displaystyle I = \int_0^1 \left(\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy$

(1) $\Omega = \{(x,y); 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x\} = \{(x,y); 0 \le y \le 4,\ \dfrac{y}{2} \le x \le 2\}$ であるから、

$$
\int_0^2 \left(\int_0^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx \right) dy.
$$

(2) $\Omega = \{(x,y); 0 \le x \le 2,\ 0 \le x \le y^2\} = \{(x,y); 0 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 2\}$ であるから、

$$
\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy \right) dx.
$$

(3) $\Omega = \{(x,y); 0 \le y \le 1,\ \dfrac{y}{2} \le x \le y\} = \{(x,y); 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \varphi_2(x)\}$, ただし $\varphi_2(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1/2) \\ 1 & (1/2 < x \le 1) \end{cases}$ であるから、

$$
I = \int_0^1 \left(\int_x^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^{1/2} \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\int_x^1 f(x,y)\,dy \right) dx.
$$

---

[1] 先に y で積分する (公式 ($\heartsuit_2$) を使う) 場合は、$a = 0$, $b = 2$, $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ 2 - x & (1 < x \le 2) \end{cases}$ となる。これでも出来るが、結局積分を $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xy\,dy \right) dx$ と二つ分けることになり、面倒になる。