微分積分学 2

9 月 28 日の演習の解説

桂田 祐史

2006 年 10 月 5 日

(テキストの問題の詳しい解答を配布することは出来ないので、要所要所を説明するに止める。)

2 次元閉区間上の重積分

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy, \quad A = [a,b]\times[c,d]$$

がテーマである。これに対しては、次の公式がある。

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

どちらの変数で先に積分するのがよいかはケース・バイ・ケースで、やってみないと分からない。

もしも $f(x,y) = F(x)G(y)$ のように、x だけの関数と y だけの関数の積に分解される場合は、

$$(☆) \qquad \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b F(x)\,dx\right)\left(\int_c^d G(y)\,dy\right)$$

と 1 変数の問題に帰着される。

よく知っているはずの公式だけど結構間違えるので一言

$$(\heartsuit) \qquad \int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \qquad (\alpha \text{ は } \alpha \neq -1 \text{ となる実定数})$$

という公式は、(i) 指数 α に 1 を足す、(ii) 微分して元に戻るように $\dfrac{1}{\alpha+1}$ をかける、と覚えることを勧める。少なくとも結果を目で微分して元に戻ることをこころがけよう。また次も忘れずに。

$$(\heartsuit') \qquad \int (x+a)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(x+a)^{\alpha+1}.$$

最初の (1), (2) は (☆) タイプ。

(1) $\sin y$ の原始関数は $-\cos y$ であるが、$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin y\,dy = 1$ は覚えても良いかもしれない。

(2) これは基礎数学 3 で学んだ

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x$$

を用いる。この式自身を暗記してもよいし、$x = \tan\theta$ と置換すること[1] を覚えても良い。

[1] $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ は覚えにくいので、$x = ay$ あるいは $x = a\tan\theta$ と置換するのが私のお勧め。後者の場合、$\displaystyle\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}$, $\quad dx = a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = a(1+\tan^2\theta)d\theta$ より $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{d\theta}{a} = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right).$

逆三角関数 $\tan^{-1}$ の値を求めるには、次が基本である (これから $\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ が分かる)。

$$y = \tan^{-1} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

(3) $(y-x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$ と変形して積分するのも案外簡単である (($\star$) タイプになる)。

$$\int_0^2 (y-x)^2\, dy = \int_0^2 (y^2 - 2xy + x^2) dy = \cdots = 2x^2 - 4x + \frac{8}{3}.$$

一方、($\heartsuit'$) を用いると、

$$\int_0^2 (y-x)^2\, dy = \left[\frac{1}{3}(y-x)^3\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{3}\left[(2-x)^3 - (-x)^3\right] = \frac{1}{3}\left(x^3 - (x-2)^3\right).$$

これを $x=0$ から $x=2$ まで積分するのにも、同様のことをすればよい。

(4) $\sqrt{x+y} = (x+y)^{1/2}$ に気が付けば、後は ($\heartsuit'$) 2 回。

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]\times[0,2]} \sqrt{x+y}\; dx\, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (y+x)^{1/2}\, dy\right) dx = \frac{2}{2}\left[(y+x)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[(x+2)^{3/2} - x^{3/2}\right] dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[(x+2)^{5/2} - x^{5/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{15}\left(3^{5/2} - 2^{5/2} - 1\right) = \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

(5) $|x| \le 1 \Longleftrightarrow -1 \le x \le 1 \Longleftrightarrow x \in [-1,1]$ であるから、$A = [-1,1]\times[-1,1]$. また $\dfrac{1}{x+y+4} = (y+x+4)^{-1}$ である。

(6) これは x と y がまったく非対称なので、先にどちらで積分するか問題になる。見通しをつけるには、$x=1$ とおいた ye^{-y^2} と、$y=1$ とおいた xe^{-x} とを見比べるとよい。前者は置換積分、後者は部分積分と見通しがつく。最後は計算を進めてみないと分からないが、後者 (先に x で積分する方) は後がかなり面倒な計算になる。$-xy^2 = u$ とおく (y を u で置換する) と、$-2xy\, dy = du$, $y=0$ のとき $u=0$, $y=1$ のとき $u=-x$ であるから、

$$\int_0^1 xye^{-xy^2}\, dy = \int_0^{-x} -\frac{1}{2}e^u\, du = -\frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{-x} = \frac{1}{2}(1-e^{-x}).$$

先に x で積分すると、$\displaystyle\int_0^1 \left[-\frac{1}{y}(e^{y^2} + e^{-y^2}) + \frac{1}{y^3}\left(e^{y^2} - e^{-y^2}\right)\right] dy$ となり、ちょっと困る。

(7) どちらの変数で先に積分するか見極めるために、$x=1$, $y=1$ を代入すると、それぞれ $y\sin y^2$, $x^2 \sin x$ となる。前者 (y で先に積分する) の方が楽そうなので、そちらから始めてみる。

$xy^2 = u$ とおく (y を u で置換) と、$2xy\, dy = du$, $y=0$ のとき $u=0$, $y=2$ のとき $u=4x$ ゆえ、

$$\int_0^2 x^2 y \sin(xy^2)\, dy = \int_0^{4x} x^2 \sin u \cdot \frac{1}{2x}\, du = \frac{x}{2}\int_0^{4x} \sin u\, du = \cdots = \frac{x}{2}\left(1 - \cos 4x\right).$$

求める積分は、$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\left(1-\cos 4x\right) dx$ となるが、$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16}$,

$$\int_0^{\pi/2} x\cos 4x\, dx = \left[x\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin 4x\, dx = 0 + \frac{1}{16}\left[\cos 4x\right]_0^{\pi/2} = 0$$

なので、値は $\dfrac{\pi^2}{16}$. ちなみに、もし先に x で積分すると…ものすごく面倒になる。 (以上)