2007年1月22日 授業資料

2005 年度 微分積分学II 期末試験問題

担当: 桂田 祐史
2006年1月31日実施
教科書・ノート等持込不可
解答用紙のみ提出
結果だけでなく途中経過も書くこと

次の **1**〜**5** に解答せよ。

1. (1) $D=\{(x,y); 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_D x^3y^4\,dx\,dy$ を求めよ。
(2) 重複積分 $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\right)dx$ の積分順序を交換せよ。

2. (1) $D=\{(x,y); 1\le x^2+y^2\le 4\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_D dx\,dy$ を求めよ。
(2)$D=\{(x,y); 0\le x+y\le 2,\ 1\le x-y\le 3\}$ とするとき、$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ。

3. $\displaystyle\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx\,dy\,dz$ を計算せよ。

4. $\mathbf{R}^3$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(yz,zx,xy)^T$ について以下の問に答えよ。
(1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$ を計算せよ。(2) $\mathbf{0}=(0,0,0)^T$ から $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^T$ に至る有向線分を $C_{\boldsymbol{x}}$ とするとき、線積分 $\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}$ を求めよ (実際に線積分を計算すること)。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dr}$ を求めよ。 C_1: $(\cos t,\sin t,\cos t\sin t)$ $(0\le t\le\pi)$. C_2: 折れ線 $(0,0,0)\to(1,0,0)\to(1,0,1)\to(1,1,1)$.

5. $R>0$, $D:=(0,\pi)\times(0,2\pi)$, $(\theta,\phi)\in D$ に対して

$$\boldsymbol{\varphi}(\theta,\phi):=(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)^T,\quad S:=\boldsymbol{\varphi}(D)$$

とするとき、以下の問に答えよ。
(1) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(yz,zx,xy)^T$ とするとき、$\displaystyle\int_S\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{dS}$ を求めよ。

略解

1 (1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx \int_0^2 y^4\,dy = \frac{8}{5}$
(2) 下から $y = x^3$ $(x = y^{1/3})$, 上から $y = x^2$ $(x = y^{1/2})$ で囲まれている閉領域での重積分に一致するので、$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} f(x,y)\,dx \right) dy.$

2 (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、D は $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2$ に対応するので、

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{\substack{1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r\,dr\,d\theta = \int_1^2 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 3\pi.$$

(もちろん、半径 2 の円の面積と半径 1 の円の面積の差に等しい。)
(2) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ なので、$u = x+y$, $v = x-y$ とおくと $x^2-y^2 = uv$. $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$ ととけることから、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -1/2$ が得られる。また D に対応するのは $\{(u,v); 0 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}$ であるから、

$$\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\substack{0\le u\le 2\\ 1\le v\le 3}} \sqrt{uv}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2 u^{1/2}\,du \int_1^3 v^{1/2}\,dv = \frac{4\sqrt{2}}{9}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

3 原点を中心とする半径 n の球 $K_n = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$ が、$\mathbf{R}^3$ の近似列となる。被積分関数は符号がつねに正なので、

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx\,dy\,dz.$$

極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ $(r \ge 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi])$ により、K_n に対応するのは $[0,n]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ であり、$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta$ であるから、

$$\iiint_{K_n} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx\,dy\,dz = \int_0^n re^{-r^2}\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi(1-e^{-n^2}) \to 2\pi.$$

4. (1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = 0$ (2) xyz (3) $F(x,y,z) = xyz$ とおくと、(1), (2) の結果から F はポテンシャルになる ($\mathbf{R}^3$ は単連結だから)。ゆえに線積分は F(終点) $-$ F(始点).

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(-1,0,0) - F(1,0,0) = 0 - 0 = 0.$$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(1,1,1) - F(0,0,0) = 1 - 0 = 1.$$

5 これは講義で説明する球面のパラメーターづけの計算をなぞりなさいという問題である。
(1) 結果は覚えていてもよいくらいの $R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. (2) 定義通りに計算しても大したことはないし、Gauss の発散定理を使えば $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = 0$ であるから、$\displaystyle\iiint_{\text{球}} 0\,dx\,dy\,dz = 0.$