

ベクトル解析早見表

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021年5月31日, July 4, 2023

入門部分のベクトル解析については、例えば桂田 [1] を見よ。
流体力学で用いる積分定理については、桂田 [2] を見よ。

(1) grad, div, rot, Δ

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = \text{curl } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}.$$

(2) 2回作用させると何になる

$$\text{rot grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}),$$

$$\text{div grad} = \Delta \quad (\nabla \cdot \nabla f = \Delta f),$$

$$\text{div rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0),$$

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta \quad (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}).$$

(3) 線積分の定義

パラメーター曲線 $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に対して、 $\varphi(\alpha)$ を始点、 $\varphi(\beta)$ を終点という。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \varphi'(t), \quad \frac{ds}{dt} = \|\varphi'(t)\|.$$

写像としての像 $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ を曲線 C の像または跡と呼ぶ。
 $f: C^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{f}: C^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ (n は空間次元) とするとき

$$\int_C f \, ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt.$$

$\int_C 1 \, ds$ は C の長さである。一般に次式が成り立つ。

$$\left\| \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right\| \leq \int_C \|\mathbf{f}\| \, ds.$$

(4) ポテンシャルの存在

命題 0.1 (ポテンシャルの存在定理)

\mathbb{R}^n の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\mathbf{f} = (f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) を満たすならば、 $F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ は $C_{\mathbf{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、 $\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす。ただし $C_{\mathbf{x}}$ は定点から \mathbf{x} に至る Ω 内の曲線である。($\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす F を \mathbf{f} のポテンシャルと呼ぶ。)

特に3次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ を満たす場合、2次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、 \mathbf{f} はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を2つ

- 1変数関数の場合の $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ に相当する。
- C^2 級のポテンシャル F が存在する場合、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

(5) grad の意味、流束積分

grad は法線ベクトル 関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。grad F はそれらの法線ベクトルとなる。 F の値が最も速く大きくなる方向を表す。

流束積分 単位法線ベクトルが \mathbf{n} である曲面 S (曲線 C) と速度場 \mathbf{v} について

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad \left(\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \right)$$

を**流束積分** (flux integral) と呼ぶ。物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 \mathbf{n} の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界の場合は、 Ω の外に流出する量ということになる)

(6) Gauss の発散定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{Gauss の発散定理}).$$

(領域の境界全体での流束積分は、領域での発散の積分に等しい。)

次の形で書かれていることもある (n_j は \mathbf{n} の第 j 成分)。

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial\Omega} u n_j \, d\sigma \quad (j = 1, 2, 3).$$

(7) Green の積分公式

法線方向の微分係数 方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}.$$

Green の積分公式

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx.$$

流体力学で、有限要素法を使う場合は、この種の公式がもう少し必要である。そのうち書き加えるが、とりあえず桂田 [2] を紹介しておく。

参考文献

- [1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006～).
- [2] 桂田祐史：ベクトル値関数版 Green の公式、部分積分 — 流体力学のために — (2009/6/14～), <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/green-theorem-vector.pdf>.