

応用複素関数 第8回

～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2023年6月6日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 流体力学への複素関数の応用 (続き)
 - 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (続き)
 - 流体の運動方程式
 - 流体の境界条件
 - おまけ: 静水圧の話
 - 粘性率、動粘性率の具体値
 - 渦度 駆け足の説明
 - ポテンシャル流
 - ポテンシャル, 渦無し
 - 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題
 - まとめ
 - 2次元流
 - 渦度, 渦無しの流れ
 - 非圧縮流と流れ関数
 - 単連結領域における 2次元非圧縮渦なし流
 - 2次元非圧縮渦なし流
 - 簡単な関数の表す流れ
 - 一様流
 - 湧き出しと吸い込み
 - 渦糸 (点渦)
 - Mathematica で可視化する
 - 流れの合成
 - 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

- 流体力学の話の3回目。運動方程式を駆け足で終えて、ポテンシャル流、特に2次元非圧縮ポテンシャル流の話をする。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pl = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} と逆向き)、大きさは $p = p(\mathbf{x}, t)$ で \mathbf{n} にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

$$(1) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(2) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

$$\text{ゆえに } \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}. \quad V \text{ は任意なので } \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} P. \quad \square$$

3.6 流体の運動方程式 (2) $\operatorname{div} P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

$$(3) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから)

$$(4) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

これで準備はできた!

3.6 流体の運動方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$(5) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な^{ナヴィエ・ストークス}**Navier-Stokes方程式**である。

ただし

$$(6) \quad \nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。 ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な^{オイラー}**Euler方程式**である。

3.6 流体の運動方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\mathbf{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を無視して ($\mathbf{v} = 0$ で線形化する、とも言える)

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを **Stokes 方程式** と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

3.6 流体の運動方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

- (3) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ はどういうものか、一度は計算してみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

3.7 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$(9) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たすことが知られている (\mathbf{v}_{wall} は壁の速度)。特に固定壁では

$$(10) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たす。これを**粘着境界条件**と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(11) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$ は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

と表せる。また2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを \mathbf{t} とし、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

注意 非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}$ が成り立つ。
 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

3.7 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**というものもあるが、それは必要になったときに説明する。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (1) $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるから、 Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、 $\Delta p \doteq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

3.8 おまけ: 静水圧の話 (2) アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その“合力”を求めよう。

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \rho g \int_{\Omega} d\mathbf{x} \, \mathbf{e}_3 = \rho |\Omega| g \mathbf{e}_3.$$

ただし

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積.}$$

$\rho |\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、 $\rho |\Omega| g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き (\mathbf{e}_3) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」である力となる。これが**浮力**である。

3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 μ については確かにそうだが、 ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ~ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、 μ は圧力にはほとんどよらない。

3.10 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**、**非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である(次のスライドを見よ)という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**ポテンシャル**と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場するとき、 ϕ を \mathbf{v} の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ \equiv ポテンシャル流

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 \mathbf{v} が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) と仮定すると

$$\Delta \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題** の解である。

$$(12) \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(13) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

もしも \mathbf{v} の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどりみどりである (後でいくつか紹介する)。

3.11.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(14) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(15) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには、 $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

$$(必要性: \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div grad } \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0)$$

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、 $g = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ で、非圧縮 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2つの解の差は定数)。

3.11.3 まとめ

3次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

3.12 2次元流 3.12.1 渦度, 渦無しの流れ

速度場 \mathbf{v} が $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元の、**2次元流**であるという(このとき、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$, \mathbf{v} の z 成分 = 0. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場 $\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{pmatrix}$ に対して、

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを \mathbf{v} の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.12.1 渦度, 渦無しの流れ

2次元流についても、3次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 8.1 (2次元流における渦なし流)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$. 特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$.

ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は3次元の場合と同じ。

3.12.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、 ψ を \mathbf{v} の **流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 8.2 (流線)

曲線が速度場 \mathbf{v} の **流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが \mathbf{v} と平行であることをいう。

注意 流れ関数の等高線 ($\psi = \text{const.}$ で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (2)

命題 8.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \mathbf{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \mathbf{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが \mathbf{v} と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが \mathbf{v} と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 \square

より具体的に、 $\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると \mathbf{v} に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.4 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明 (1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$.

(2) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が well-defined であり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. ゆえに ψ は \mathbf{v} の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\psi$. □

3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 \mathbf{a} を選び、 \mathbf{a} から $\mathbf{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 C_x を取ると、 $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、 $\mathbf{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

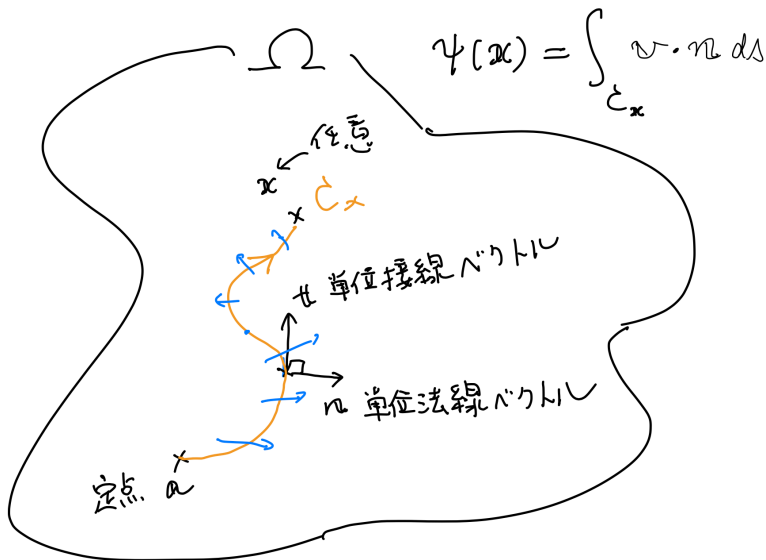
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

ただし

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(\mathbf{n} は \mathbf{t} を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\mathbf{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、 C_x を横切り、 \mathbf{n} の側に単位時間に流れる流体の量 (2次元なので面積) である。



3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$(16) \quad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} \int_C f'(z) \, dz.$$

実際、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x \, dx + \psi_y \, dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) \, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx - \psi_x \, dy) + i(\psi_x \, dx + \phi_x \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx + \phi_y \, dy) + i(\psi_x \, dx + \psi_y \, dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} f'(z) \, dz.$$

3.12.3 単連結領域における 2次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 8.5 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 8.6 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\text{rot } \mathbf{v}$ 。特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.12 単連結領域における2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

実は f は正則関数である。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、 $f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 8.7 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$.

(2) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が well-defined であり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. ゆえに ψ は \mathbf{v} の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\psi$. □

3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 \mathbf{a} を選び、 \mathbf{a} から $\mathbf{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 C_x を取ると、 $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、 $\mathbf{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

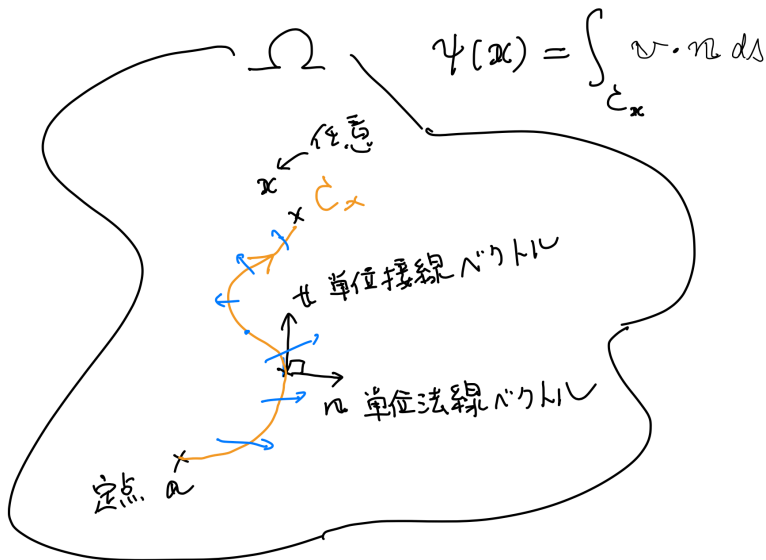
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

ただし

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(\mathbf{n} は \mathbf{t} を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\mathbf{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、 C_x を横切り、 \mathbf{n} の側に単位時間に流れる流体の量 (2次元なので面積) である。



3.12 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(フライングになるが、複素速度ポテンシャルが存在する場合について)

複素速度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$(17) \quad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} \int_C f'(z) \, dz.$$

実際、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) \, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i \, dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} f'(z) \, dz.$$

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (1) 振り返り

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 8.8 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 8.9 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\text{rot } \mathbf{v}$ 。特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.13 2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

2次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

実は f は正則関数である。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、 $f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

ϕ と ψ は調和関数である。正則関数の常識であるが、次の式も見ておこう。

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

複素関数の可視化 (流体の話から離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、 f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u , 虚部 v の等高線は互いに直交している。**

(復習: $\text{grad } \phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [1] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと 等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

3.14 簡単な関数の表す流れ 3.14.1 一様流

1次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$

$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、 $f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流** と呼ばれる。

1次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = px + qy, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -qx + py.$$

3.14.1 一様流 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = \text{const.}$) も、流線 ($\psi = \text{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

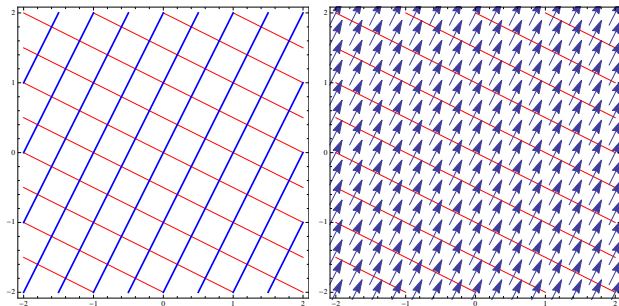


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.14.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

\mathbf{v} の方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ と同じ。 $m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、
 $m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

\mathbf{v} の大きさ $|\mathbf{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

3.14.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r = \text{定数}$) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta = \text{定数}$) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、 C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} \int_C f'(z) \, dz = \text{Im} \int_C \frac{m}{z} \, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、 $m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

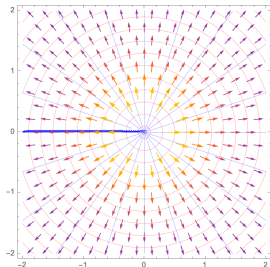


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線、流線、速度場

3.14.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

$z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

\mathbf{v} の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。 $\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、 $\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。

\mathbf{v} の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

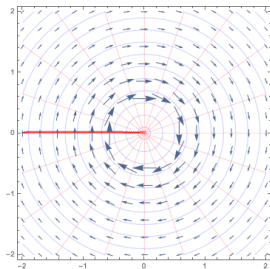
3.14.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta = \text{定数}$) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r = \text{定数}$) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた うずいと 渦糸 (vortex filament, vortex string) または てんうず 点渦 (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問 $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



3.14.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピーできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/fluid_mathematica/

3.14 流れの合成

2つの2次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$$

であれば

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\ &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

(18)

$$\psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ ($\varphi \in (0, \pi)$) と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ($\varphi \in (-\pi, 0)$) で分けて考える。

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である¹。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

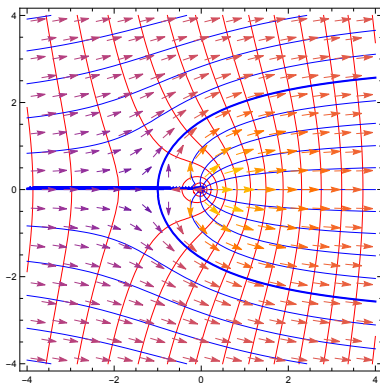


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、 $z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)

分子、分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$. Θ は $a, -a$ から点 z を見込む角であるので、2点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

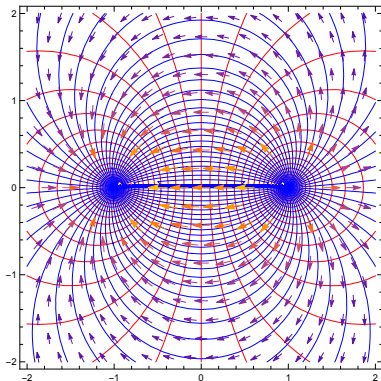


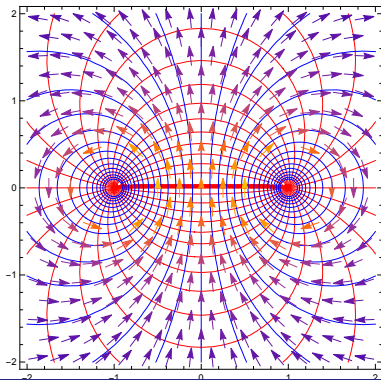
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z = a, -a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$, $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$ で、どちらも円を表す。



3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m \log(z + a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m \log(z - a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m \log(z + a) - m \log(z - a) = Uz + m \log \frac{z + a}{z - a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸 $y = 0$ では、 $\psi = 0$ であるから、実軸は1つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ。

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

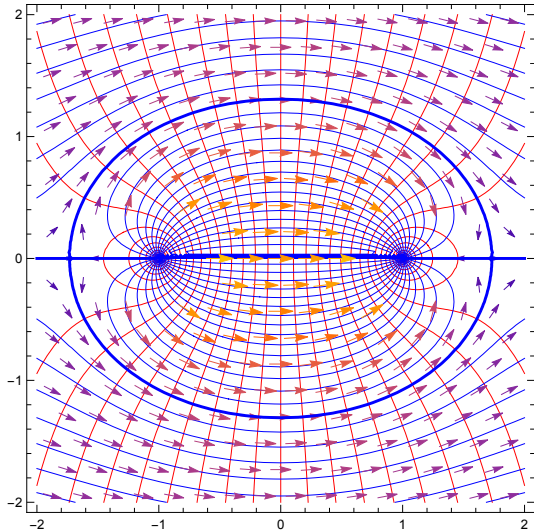


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

$\mu > 0$ を取り、 $2am = \mu$ という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m \log(z - a) - m \log(z + a) = -\mu \frac{\log(z + a) - \log(z - a)}{2a} \\ &\rightarrow F(z) := -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2} + i \frac{\mu y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

3.14.5 2重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

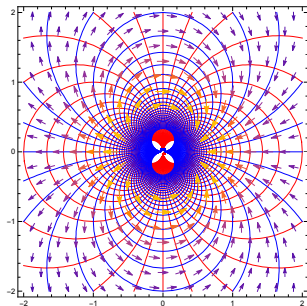


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \rightarrow 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U \left(r \cos \theta + i \sin \theta + \frac{R^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、 $r = R$ は流線である。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

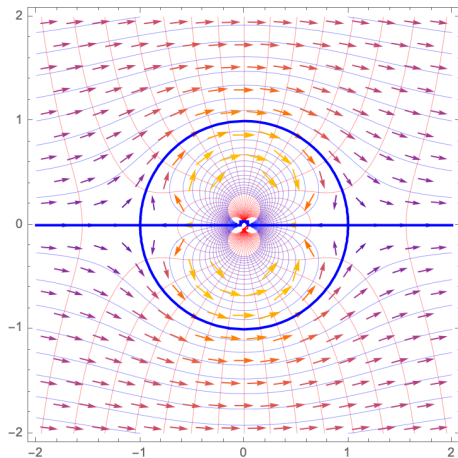


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

参考文献

- [1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).