

応用複素関数 第2回

～ 留数定理の応用 (2) 定積分計算 (続き), 級数の和計算 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2023年4月18日

1 連絡事項, 本日の内容

2 続 留数定理の応用 (続き)

- 定積分計算への留数定理の応用 (続き)
 - 広義積分と主値積分
 - 実軸上に1位の極がある場合の主値積分の公式
 - Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)
- 級数の和
 - イントロ
 - s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

3 参考文献

連絡事項, 本日の内容

次の内容を講義します。

- 前回の話 ($\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$) の続き。
- 留数定理の級数の和への応用 (講義ノート [1] の §1.3 の内容)

積分の定義には色々な流儀がある (大抵の場合に値は一致するけれど)。メジャーなものは次の2つ

① Riemann 積分

微積分での定番。“Riemann 和の極限として” 積分を定義する。

$\int_{\Omega} f(x) dx$ で Ω と f が有界な場合に定義される。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が有界とは $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega) |x| \leq R$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が有界とは $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega) |f(x)| \leq M$.

② ^{ルベーク} Lebesgue 積分

究極の積分とされる。関数解析では必須。現象数理学科では応用測度論で講義される。

Riemann 積分の場合に、 Ω や f が有界でない場合にどうするかを以下考察する。→ 広義積分、主値積分の登場

1.1.3 広義積分と主値積分

Riemann 積分で、 Ω や f が有界でない場合にするか？

→ **広義積分**として定義する。

積分範囲が有界でない場合、有界な範囲の積分の極限として定義する。例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2 + 1} = \dots = \pi.$$

関数とその点の近傍で有界でないような点があれば、有界であるように穴を開けて、極限として定義する。例えば、 $\alpha > 0$ とするとき

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{|x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{|x|^\alpha} \right) = \begin{cases} \infty & (\alpha \geq 1) \\ \frac{2^{1-\alpha} + 1}{1 - \alpha} & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

対称 ($R_1 = R_2$ とか $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) にやってはいけない。つまり

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^2 \right)$$

は、**広義積分の定義としては間違い** (関数が定符号 (つねに $f \geq 0$ あるいはつねに $f \leq 0$) であったり、積分が“絶対収束”である場合は、値が一致するけれど)。

1.1.3 広義積分と主値積分

$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ は広義積分可能でない。実際

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left([\log |x|]_{-1}^{-\varepsilon_1} + [\log |x|]_{\varepsilon_2}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\log 2 + \log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = \text{発散}\end{aligned}$$

(実際、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ のとき $\log 2$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$ のとき $\log 2 + \log 3$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ のとき $2 \log 2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$ のとき $\log 2 + \log \varepsilon_1 \rightarrow -\infty$)

しかし、左右対称の穴 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) を開けた場合に意味があることもある。(実際 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ への応用がそう。) それを **Cauchy の主値積分** (principal value) とよび、p.v. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ と表す。

$$\text{p.v.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{-\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) = \log 2.$$

一般の場合の主値積分の定義は書かないが、特異点を避ける「穴」を対称性があるように取るのが要点である。

1.1.4 実軸上に1位の極がある場合の主値積分の公式

次の定理は前回の授業でも提示した ((2) だけ提示したのだけ?)。

定理 1.9 (実軸上に1位の極がある場合の定積分の公式 — 再提示)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は \mathbb{R} 上で高々1位の零点しか持たないとする。

① $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ のとき

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f; c).$$

② $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c)..$$

念のため: 「複素関数」では、 P は \mathbb{R} 上で零点を持たない ($(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$)、という条件を課した定理を紹介した。1位の零点が存在する場合は、広義積分は存在しないが、主値積分は存在し、留数を用いて計算できる、ということである。

以下では、(1) だけ証明する (それで証明のアイディアは十分分かるから)。

定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 1)

f の極のうち、実軸上にあるものを $c_1 < c_2 < \dots < c_N$ とする。

$\bar{D}(c_j; \varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、 f のすべての極が $|z| < R$ の中にあり、 $-R < c_1 - \varepsilon$, $c_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

半円弧 $C_{\varepsilon, j}$ ($j = 1, \dots, N$) を

$$-C_{\varepsilon, j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

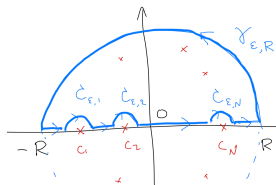
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\Gamma_{\varepsilon, R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{\varepsilon, j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = R e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon, R} := \Gamma_{\varepsilon, R} + C_R$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon, R}$ を定める。



定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \left(\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx \right) + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \left(\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \right) + \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

この右辺第 1 項は、 $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \rightarrow \text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 3) じっくり考えよう

右辺第 2 項 $\sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz$ について考える。

f の c_j における Laurent 展開の主部は $\frac{A_j}{z - c_j}$ である。ただし $A_j := \text{Res}(f; c_j)$ 。

g_j を Laurent 展開の主部以外、つまり $g_j(z) := f(z) - \frac{A_j}{z - c_j}$ とすると

$$\begin{aligned}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz &= \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z - c_j} dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz, \\ \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z - c_j} dz &= - \int_0^\pi \frac{A_j}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -\pi i A_j.\end{aligned}$$

g_j は c_j の十分小さな近傍で正則であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$ とするとき $\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz \rightarrow 0$ 。

$$\text{ゆえに } \varepsilon \rightarrow +0 \text{ のとき } \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \rightarrow -\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$

定理 1.9(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j) + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

$R \rightarrow +\infty$ のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j). \quad \square$$

1.1.5 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

定理 1.9 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \frac{e^{iz}}{(z)'} \Big|_{z=0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{Im} (\pi i \cdot e^{i0}) = \frac{\pi}{2}.$$

注意 「複素関数」の教科書 (神保 [2]) では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は本質的に上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。

1.2 級数の和

1.2.1 イントロ

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。

1.2 級数の和

1.2.1 イントロ

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、 a_n がある正則関数 f に対して、 $a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、 $f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイデアである ($\operatorname{Res}(f s; n) = f(n) \operatorname{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。

1.2 級数の和

1.2.1 イントロ

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、 a_n がある正則関数 f に対して、 $a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、 $f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイデアである ($\operatorname{Res}(f s; n) = f(n) \operatorname{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。具体的には、 s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

1.2 級数の和

1.2.1 イントロ

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、 a_n がある正則関数 f に対して、 $a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、 $f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイデアである ($\operatorname{Res}(f s; n) = f(n) \operatorname{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。具体的には、 s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

実はこの s_2 は色々な場面で利用される。(「応用複素関数」の中で、最低一つはそういう話を見せておきたいので、ここでやってみた。)

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 (\mathbb{C} 全体で正則) である。

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 (\mathbb{C} 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、位数は 1.
実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n.$$

$$\text{さらに } \frac{d}{dz}(\sin \pi z) \Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0.$$

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 (\mathbb{C} 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n.$$

さらに $\frac{d}{dz}(\sin \pi z) \Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0$.

- s_1, s_2, s_3 の極は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、その位数は 1. 留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \frac{\pi}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = (-1)^n,$$

$$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = 1.$$

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

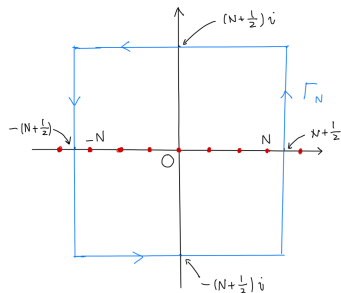


図 1: 1 辺 $2(N + 1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

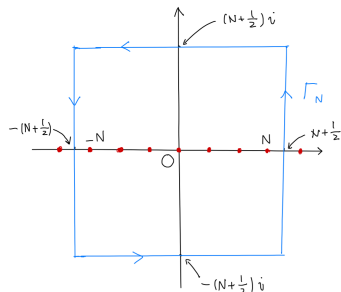


図 1: 1 辺 $2(N + 1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$ 。

1.2.2 s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

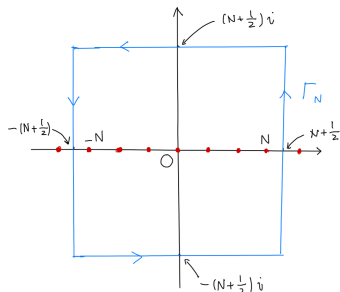


図 1: 1 辺 $2(N + 1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$ 。
 - $|s_j(z)| \leq 2\pi$ ($j = 1, 2; z \in \Gamma_N^*$).
- (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では \sin , \cos , \tan の露出度が高いが、

セカント、コセカント、コタンジェント
 \sec , cosec , \cot というものもある:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では \sin , \cos , \tan の露出度が高いが、
セカント、コセカント、コタンジェント
 \sec , cosec , \cot というものもある:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の [Trigonometric tables](#) 等参照)、 \sin , \tan , \sec の値が載っていた。

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では \sin , \cos , \tan の露出度が高いが、
セカント、コセカント、コタンジェント
 \sec , cosec , \cot というものもある:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の [Trigonometric tables](#) 等参照)、 \sin , \tan , \sec の値が載っていた。

$\cos(\operatorname{ine})$, $\cot(\operatorname{angent})$, $\operatorname{cosec}(\operatorname{ant})$ は、それぞれ余角の \sin , \tan , \sec である:

$$\operatorname{co} \text{ 某 } \theta = \text{某} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (\text{ゆえに数表はほとんど不要}).$$

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では \sin , \cos , \tan の露出度が高いが、

セカント, コセカント, コタンジェント
 \sec , cosec , \cot というものもある:

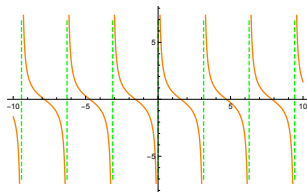
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の [Trigonometric tables](#) 等参照)、 \sin , \tan , \sec の値が載っていた。

$\cos(\operatorname{ine})$, $\cot(\operatorname{angent})$, $\operatorname{cosec}(\operatorname{ant})$ は、それぞれ余角の \sin , \tan , \sec である:

$$\operatorname{co} \text{ 某 } \theta = \text{ 某 } \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (\text{ゆえに数表はほとんど不要}).$$

$y = \cot x$ のグラフは、 $\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



(2023/4/18 の授業はここまです。)

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf> (2015～).
- [2] じんぼう 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.