

# 応用複素関数 第1回

～ ガイダンス, 留数定理の応用 (1) 定積分計算 ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年4月11日

# 目次

## ① ガイダンス

## ② 続 留数定理の応用

- はじめに
- 留数定理と極における留数の計算
- 定積分計算への留数の応用
  - 「複素関数」の復習
  - Dirichlet 積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  (難しさを語る)
  - 主値積分
  - Dirichlet 積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  (解決)

# 0 ガイダンス どういう科目か、履修上の注意

(複素関数・同演習の履修を前提とするので、自己紹介はカットします。)

## どういう科目か

- ① 「複素関数・同演習」に続くもの(知識は使うが、雰囲気は違う)。それを履修せずにこちらを履修することは勧めない。複素関数を知らないと「お経」になってしまうところが多い(面白くない)。
- ② コンピューター数理に分類される科目。厳密性は少し緩め。とにかく計算してみよう、が多い。

## 履修上の注意

- 「複素関数」以外に「ベクトル解析」を良く使う。
- 教科書はない。参考書を紹介する。講義メモは当日晩にWWWで公開する。
- この科目はレポートだけで評価する。
- TAはいない。気軽に質問して下さい。
- 講義中に、随時質問して良いが、私語は禁止する。

# 0 ガイダンス 関数論に続くもの (1)

“標準的な関数論” (「複素関数」) に続くものがとてもとても幅広い。  
キーワードをいくつか。

- **代数関数** (これは授業で解説しない)

$a_n(z)w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$  ( $a_j(z) \in \mathbb{C}[z]$ ) で定まる  $w = f(z)$ .

有理関数は代数関数。

冪根  $\sqrt[n]{\cdot}$  を使って表せる無理関数も代数関数である。

例えば  $w^2 + z^2 - 1 = 0$  ならば  $w = \sqrt{1 - z^2}$ .  $n \geq 5$  のとき、冪根で表せない。

多価関数が多く登場する。

- **楕円関数** (解説しない)

楕円積分  $\int \sqrt{3,4 \text{ 次式}}$  の逆関数。

二重周期関数:  $f(z + \omega_1) = f(z)$ ,  $f(z + \omega_2) = f(z)$ .

応用上もとても重要。

- **Riemann 面** (解説しない)

当初は多価関数を扱うために導入された。現代では1次元複素多様体と定義される。  
この講義では例として Riemann 球面が出て来るくらい (名前まぎらわしい)。

- **Riemann の写像定理** (これは解説する)

## 0 ガイダンス 関数論に続くもの (2)

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式  $\Delta u = 0$  の境界値問題 — これは解説する)。  
復習: 正則関数の実部・虚部は調和関数 (Laplace 方程式の解)。  
正則関数を求めるために、ポテンシャル問題を解く、というやり方がある。  
関数論を離れてもポテンシャル問題は非常に重要である (物理への応用が豊富)。
- **特殊関数** (解説しない)  
初等関数 ( $\equiv$  1 年生の微積で習う関数) に含まれない、応用上 (例えば偏微分方程式) 有名な関数がたくさんあり、特殊関数と総称される。  
微分方程式の解として特徴付けられることが多く、関数論で取り扱える。  
どれかを使うことになる人は多いだろう。
- **佐藤の超関数** (紹介する予定)  
関数概念を一般化した “超関数” の 1 つ。佐藤幹夫 (1928–2023) の創案。  
(超関数の必要性は高い。Schwartz の超関数が有名。)  
例えば Dirac の  $\delta$  関数 (任意の  $\varphi$  に対して  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0)$ ) は、  
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \varphi(0)$$
 (Cauchy の積分公式で分かる) と結びつけられる。
- **多変数複素関数論** (解説しない)  
岡潔 (1901–1978) の業績が有名。

1 つ 1 つに分厚いテキストが必要になる。

# ガイダンス (1) 講義内容

(授業では時間が足りなくなかったので、ここは飛ばした。どうせシラバスに書いてあるから、という言い訳。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介

# ガイダンス (1) 講義内容

(授業では時間が足りなくなかったので、ここは飛ばした。どうせシラバスに書いてあるから、という言い訳。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていることが多い)
  - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
  - 無限遠点  $\infty$  の導入, リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 1 次分数変換  $w = \frac{az+b}{cz+d}$
  - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
  - 解析接続 (時間なくなりそうな予感がする…)

# ガイダンス (1) 講義内容

(授業では時間が足りなくなかったので、ここは飛ばした。どうせシラバスに書いてあるから、という言い訳。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていることが多い)
  - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
  - 無限遠点  $\infty$  の導入, リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 1 次分数変換  $w = \frac{az+b}{cz+d}$
  - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
  - 解析接続 (時間なくなりそうな予感がする…)

(以上はペーパーテスト向きだが、選択式のレポートでやるつもり。)



# ガイダンス (1) 講義内容

(授業では時間が足りなくなかったので、ここは飛ばした。どうせシラバスに書いてあるから、という言い訳。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていることが多い)
  - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
  - 無限遠点  $\infty$  の導入, リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , 1 次分数変換  $w = \frac{az+b}{cz+d}$
  - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
  - 解析接続 (時間なくなりそうな予感がする…)

(以上はペーパーテスト向きだが、選択式のレポートでやるつもり。)

- 応用トピックの紹介
  - Ⓐ 流体力学への応用 (2次元ポテンシャル流など)
  - Ⓑ 数値積分公式の誤差解析, 特に台形公式の最適性と二重指数関数型積分公式
  - Ⓒ ポテンシャル問題の数値解法 (有限要素法 FreeFem++, 基本解の方法)
  - Ⓓ 佐藤超関数

(コンピューターを使う場面が多い。(a)-(c) でレポート課題を出す。)

- これらの項目は、完全に独立しているわけではなく、色々関係がある。

# 1 続 留数定理の応用

## 1.1 はじめに

(授業では、このスライドは飛ばして、次のスライドに移った。)

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

# 1 続 留数定理の応用

## 1.1 はじめに

(授業では、このスライドは飛ばして、次のスライドに移った。)

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  の説明 (「複素関数」で説明しそびれた(る)ので。)  
(積分路上に1位の極があるとき、どうなるかは学ぶに値する。)

# 1 続 留数定理の応用

## 1.1 はじめに

(授業では、このスライドは飛ばして、次のスライドに移った。)

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  の説明 (「複素関数」で説明しそびれた(る)ので。) (積分路上に1位の極があるとき、どうなるかは学ぶに値する。)

- 無限和  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$  の計算の話も知っておくと良い。

(登場する  $\pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ,  $\pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$  が意外と人気者)

# 1 続 留数定理の応用

## 1.1 はじめに

(授業では、このスライドは飛ばして、次のスライドに移った。)

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  の説明 (「複素関数」で説明しそびれた(る)ので。)  
(積分路上に1位の極があるとき、どうなるかは学ぶに値する。)

- 無限和  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$  の計算の話も知っておくと良い。

(登場する  $\pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ,  $\pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$  が意外と人気者)

- 有限区間の積分  $\int_a^b f(x) dx$  の計算への、留数定理の応用は、後の数値積分公式の誤差解析や、佐藤超関数に通じるところがある。— これは時間がなければカットするかも (後になってから話しても良いので)。

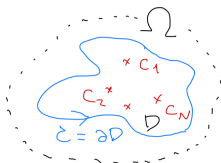
## 1.2 留数定理と極における留数の計算 (1)

この 1.2 は復習なので、超特急で進めます。使いそうなものを列挙しました。(うろ覚えならば「複素関数」復習してください。)

### 命題 1.1 (留数定理)

$D$  は  $\mathbb{C}$  内の有界領域で、その境界  $\partial D$  は区分的  $C^1$  級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また  $c_1, c_2, \dots, c_N$  は  $D$  内の相異なる点であり、 $\Omega$  は  $\overline{D} \subset \Omega$  を満たす  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_N\} \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$



(以下の 3 枚のスライドは授業では飛ばした。「やったことある」から。)

## 1.2 留数定理と極における留数の計算 (2)

留数を求める方法はケース・バイ・ケースであるが、極の場合は少し一般的な話ができる (知っておくべき)。

### 命題 1.2 (極の留数)

$k \in \mathbb{N}$ ,  $c$  が  $f$  の高々  $k$  位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left[ (z-c)^k f(z) \right].$$

(次の定理は、この定理に含まれているが、念のため書いておく。)

### 命題 1.3 (1 位の極の留数)

$c$  が  $f$  の高々 1 位の極ならば、

$$(1) \quad \operatorname{Res}(f; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z).$$

## 1.2 留数定理と極における留数の計算 (3)

(lim 求めるより、微分を計算する方が簡単なこともある、ということで次も良く使う。)

### 命題 1.4 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数)

$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $P(z)$  と  $Q(z)$  は  $c$  の近傍で正則、 $c$  は  $P(z)$  の 1 位の零点 ( $P(c) = 0$  かつ  $P'(c) \neq 0$  という条件) ならば、 $c$  は  $f$  の高々 1 位の極で

$$(2) \quad \text{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$



## 1.2 留数定理と極における留数の計算 (4)

次の命題は「複素関数」ではやや軽めの扱いだった。後の例では

$$\varphi(z) = \log z, \quad \varphi(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z, \quad \varphi(z) = \pi \cot \pi z$$

として利用することが多い。

### 命題 1.5 (1位の極を持つ関数と正則関数の積の留数)

$c$  は  $f$  の 1 位の極であり、 $\varphi$  は  $c$  の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \varphi(c) \operatorname{Res}(f; c).$$

### 証明.

(念のため略証だけでも)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f\varphi; c) &= \lim_{z \rightarrow c} (z - c) (f(z)\varphi(z)) = \left( \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) \right) \lim_{z \rightarrow c} \varphi(z) \\ &= \operatorname{Res}(f; c) \varphi(c). \end{aligned}$$



## 1.3 定積分計算への留数の応用 1.3.1 「複素関数」の復習

$z$  の複素係数多項式全体を  $\mathbb{C}[z]$  で表す。多項式の次数を  $\deg$  で表す。

### 命題 1.6 (有理関数の実軸上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ ,  
 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

### 命題 1.7 (有理関数の Fourier 変換)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ ,  $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ ,  
 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $a > 0$  とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

## 1.3.1 「複素関数」の復習

上の定理 (「複素関数」で学んだ) 以外にも色々ある。

簡単のため、 $f$  は有理関数とする。次のような定積分についても、留数定理を応用した計算法がある (どちらも対数関数がらみ)。

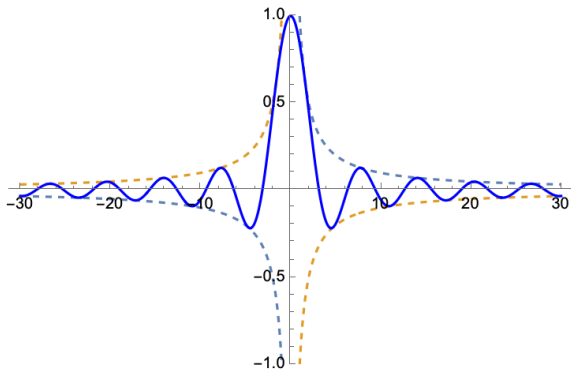
- $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$  に対して、 $\int_0^{\infty} f(x)(\log x)^n dx$
- $0 < \alpha < 1$  に対して、 $\int_0^{\infty} x^\alpha f(x) dx$  (Mellin 変換)

次のテキストは、コンパクトだが、面白い例がたくさん載っている。

一松 信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).

(こういうのが好きな人もいるだろうから、授業で紹介しなかった方法を使う例を詳しく説明しなさい、という課題はあるかな。)

# $\frac{\sin x}{x}$ のグラフ



$\frac{\sin x}{x}$  のグラフ ( $x \rightarrow \pm\infty$  で減衰していく)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ はどうなる?}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0, R \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \text{ と考えるべき??}$$

## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

とても有名な定積分である。関数論を使わなくても解ける。

被積分関数は、Fourier 解析を勉強した人にはおなじみの sinc である。

## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

とても有名な定積分である。関数論を使わなくても解ける。

被積分関数は、Fourier 解析を勉強した人にはおなじみの sinc である。

分母が  $x$  であり、積分区間の端  $x=0$  で 0 になるので、その意味でも広義積分である。 $x \rightarrow 0$  のとき  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  であるので (複素関数論的にも 0 は  $\frac{\sin z}{z}$  の **除去可能特異点** である)、 $x=0$  での値を 1 として、連続とみなせる。

$x \rightarrow \infty$  のとき、正負交互に現れ、絶対値が小さくなるので、広義積分が収束 (存在) することが分かる。—— これは認めよう。

ただし積分は絶対収束はしない:  $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$ .

以上は  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  が収束し、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$  となることと似ている。

## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 計算のアイデア

$\frac{\sin z}{z}$  は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 計算のアイディア

$\frac{\sin z}{z}$  は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た  $\sin x = \text{Im } e^{ix}$  という関係を使おう。



## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 計算のアイディア

$\frac{\sin z}{z}$  は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た  $\sin x = \text{Im } e^{ix}$  という関係を使おう。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

さっき出て来た定理が使える？

## 1.3.2 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 計算のアイディア

$\frac{\sin z}{z}$  は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た  $\sin x = \text{Im } e^{ix}$  という関係を使おう。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

さっき出て来た定理が使える？

**そのままでは使えない!**  $\frac{e^{ix}}{x}$  は  $x=0$  でマズい状態 (分母 0, 分子  $\neq 0$ )。

この広義積分は収束しない。

( $P(x) = x$  が、さっきの定理の条件「 $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ 」を満たさない。)

### 1.3.3 主値積分 (1) 紹介

(このスライドと次のスライドは次回の授業で説明します。)

実軸上の区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f$ ,  $c \in (a, b)$  に対して、広義積分

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

は一般には存在しない ( $f(c) \neq 0$  であれば発散する)。

しかし ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  という制限をつけての極限)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

は存在することがある。このとき、この極限值を

$$\text{p.v.} \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx$$

と表し、**Cauchyの主値積分** (the Cauchy principal value) と呼ぶ。

一般の場合の定義は書かない。特異点を避ける「穴」を(右と左で同じになるよう)対称性があるように取るのが要点である。

## 1.3.3 主値積分 (2) 例 広義積分は発散、主値積分は存在

例 1.8 (広義積分は発散するが、主値積分は存在する)

$a < 0 < b$  とするとき、 $I_1 := \int_a^b \frac{dx}{x}$  は発散するが、

$$I_2 := \text{p.v.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{|a|}.$$

実際、

$$\begin{aligned} \int_a^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x} &= [\log |x|]_a^{-\varepsilon_1} + [\log |x|]_{\varepsilon_2}^b \\ &= \log \varepsilon_1 - \log |a| + \log b - \log \varepsilon_2 = \log \frac{b}{|a|} + \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

であるから、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0$  としても収束しないが、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  として  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすれば  $\log \frac{b}{|a|}$  に収束する。ゆえに  $I_1$  は収束せず、 $I_2 = \log \frac{b}{|a|}$ 。

## 1.3.3 主値積分 (3) 実軸上に1位の極がある場合

### 定理 1.9 (実軸上に1位の極がある場合の定積分の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $P$  は  $\mathbb{R}$  上で高々1位の零点しか持たないとする。

①  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$  のとき

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f; c).$$

②  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$  のとき、任意の  $a > 0$  に対して

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx &= 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c) \\ &\quad + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c). \end{aligned}$$

(実軸上の孤立特異点 ( $\text{Im } c = 0$  を満たす  $c$ ) の留数は半分だけ加えれば良い。)

### 1.3.3 主値積分 (4) 状況の図による説明

これまで:  $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$

今回:  $P(c) = 0, P'(c) \neq 0, \text{Im } c = 0$  を満たす  $c$  が存在しうる

# 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 1)

$f$  の極のうち、実軸上にあるものを  $c_1 < c_2 < \dots < c_N$  とする。

$\bar{D}(c_j; \varepsilon)$  に  $c_j$  以外の極が含まれないように  $\varepsilon > 0$  を十分小さく取る。

$R$  を十分大きく取り、 $f$  のすべての極が  $|z| < R$  の中にあり、 $-R < c_1 - \varepsilon$ ,  $c_N + \varepsilon < R$  を満たすとする。

半円弧  $C_{\varepsilon, j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) を

$$-C_{\varepsilon, j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

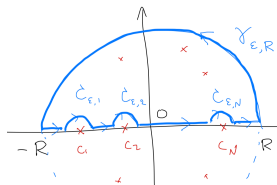
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\Gamma_{\varepsilon, R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{\varepsilon, j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = R e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon, R} := \Gamma_{\varepsilon, R} + C_R$$

により閉曲線  $\gamma_{\varepsilon, R}$  を定める。



## 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \left( \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx \right) + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \left( \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \right) + \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned}$$



# 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 3) じっくり考えよう

$\varepsilon \rightarrow +0$  のとき、右辺第 1 項は

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \rightarrow \text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

右辺第 2 項について考える。 $f$  の  $c_j$  における Laurent 展開の主部は  $\frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j}$  である。

$g_j$  を、 $g_j(z) := f(z) - \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j}$  で定めると、

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz &= \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j} dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz, \\ \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j} dz &= - \int_0^\pi \frac{\text{Res}(f; c_j)}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -\pi i \text{Res}(f; c_j). \end{aligned}$$

$g_j$  は  $c_j$  の十分小さな近傍で正則であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$  とするとき

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz \rightarrow 0.$$

$$\text{ゆえに } \varepsilon \rightarrow +0 \text{ のとき } \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \rightarrow -\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$

## 定理 1.9(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j) + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c)$$

$R \rightarrow +\infty$  のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j). \quad \square$$

(「この証明を細部まできちんと書け」というのは良い課題になるかも。)

### 1.3.4 5 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

定理 1.9 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \pi i \text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \pi i \frac{e^{iz}}{(z)'} \Big|_{z=0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{Im} (\pi i \cdot e^{i0}) = \frac{\pi}{2}.$$

(注意 「複素関数」の教科書(神保 [1])では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。)

# 本日のまとめ

- この講義科目のガイダンスを行った。
- 1 続 留数定理の応用のイントロ
- 1.1, 1.2 「複素関数」の復習

- 題材として  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  を選択

- 主値積分の紹介
- 実軸上に1位の極を持つ有理関数  $f$  に対して、(主値) 積分

p.v.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , p.v.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$  を留数で計算する方法の紹介

- [1] 神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店 (2003) — 「複素関数」の教科書.
- [2] 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).