Laplacian と極座標

桂田 祐史

2007 年 5 月 12 日, 2022 年 12 月 9 日

目 次

1 平面極座標

平面に直交する座標軸 x 軸, y 軸を取って座標を入れる xy 座標系で、(x,y) という座標を持つ点 P の原点 O からの距離を r, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸の正方向となす角を θ $(0\le\theta<2\pi)$ とすると、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

がなりたつ。

写像

$$f\colon [0,\infty)\times[0,2\pi)\ni(r,\theta)\longmapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$$

は C^∞- 級で、定義域を $r\ne0$ の範囲、すなわち $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ に制限すれば 1 対 1 である。特に

$$f|_{(0,\infty)\times[0,2\pi)}\colon (0,\infty)\times[0,2\pi)\ni(r,\theta)\longmapsto f(r,\theta)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

は全単射である。

逆の計算、つまり (x,y) から (r,θ) を求めるには、r の方は

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

と x, y の式として簡単に表されるが、θ の方は標準的な記法がない。強いて書けば

$$(x,y)\ne(0,0)\ \text{のとき}\quad \theta=\arg(x,y)\in[0,2\pi)$$

であろうか。多くの本に
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
とあるが、これは色々と問題を含んでいる式である (はっきり言えば「マズイ」)。実際、$\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数であるが、これが主値を表すと解釈すると値の範囲が $(-\pi/2, \pi/2)$ と幅 π に制限されてしまう。この式だけでは角度 π の差は無視されることになる。そもそも $(x', y') = -(x, y)$ として定義した (x', y') は、(x, y) とは角度 θ が π 異なるはずであるが、$y/x = y'/x'$ であるから、$\tan^{-1}$ を施す以前に角度 π の違いが消えてしまう。それ以外の情報 (x, y の符号など) から再生する手続きが必要になる。

$$\theta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pmod{\pi}$$

は正しい式であるのだが、これだけでは不十分であろう。

蛇足的注意　プログラミング言語の C や Fortran には角度を計算するための関数 atan2() がある[1]。atan2(y,x) とすると、点 (x, y) の角度を $[-\pi, \pi]$ の範囲で返す。そこで C プログラムで (x, y) から (r, θ) を計算するには

```
r = sqrt(x * x + y * y);
theta = atan2(y, x);
if (phi < 0.0) phi += 2 * pi;
```

とするとよい (もちろん pi には π の値が入っているとしている)。関数 atan2() を使わずに atan() のみで角度 θ を求めようとすると、分かりにくいプログラムになる。■

なお、

平面極座標のヤコビアン

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により $f\colon (r, \theta) \mapsto (x, y)$ を定義すると

$$\det f'(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

証明　ヤコビ行列は
$$f'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
であるから、
$$\begin{aligned}\det f'(r, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= r. \blacksquare\end{aligned}$$

2　空間極座標

空間に直交する座標軸 x 軸、y 軸, z 軸を取って座標を入れる xyz 座標系で (x, y, z) という座標を持つ点 P の原点からの距離を r, z 軸の正方向となす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$, P を xy 平面

[1] atan2() は、Fortran なら組み込み関数、C ならばライブラリィ関数である。なお、JIS 規格 BASIC では、THETA=ANGLE(x,y) として計算できる (これは名前も自然で良い)。

に正射影した点を P' として、$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$ が x 軸の正方向となす角を反時計回りに計った角度を ϕ $(0 \le \phi < 2\pi)$ とすると

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

が成り立つ。

写像

$$f\colon [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi) \ni (r,\theta,\phi) \longmapsto (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$$

は C^∞- 級で、定義域を $\Omega := (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$ に制限すれば 1 対 1 である。特に

$$f|_\Omega\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi) \ni (r,\theta,\phi) \longmapsto f(r,\theta,\phi) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,z); z \in \mathbf{R}\}$$

は全単射である。

逆の計算、つまり (x,y,z) から (r,θ,ϕ) を求めるには、r, θ は

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta &= \mathrm{Arccos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad (\text{ただし } (x,y,z) \ne (0,0,0)) \end{aligned}$$

と x, y, z の式として簡単に表される。ϕ の方は前と同様、強いて書けば

$$(x,y) \ne (0,0) \text{ のとき} \quad \phi = \arg(x,y) \in [0,2\pi).$$

なお、

空間極座標のヤコビアン

$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ により $f\colon (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z)$ を定義すると

$$\det f' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta.$$

証明　ヤコビ行列は

$$f'(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

後はこの行列の行列式を計算するだけである。

例えば、まず多重線形性を使って、

$$\det f' = r\cdot r\sin\theta\cdot\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

3 列目で展開し、再び多重線形性から

$$\begin{aligned} \det f' &= r^2\sin\theta\left((-1)^{1+3}(-\sin\phi)\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(\cos\phi)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}\right) \\ &= r^2\sin\theta\left(-\sin^2\phi\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} - \cos^2\phi\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}\right) \\ &= r^2\sin\theta\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = r^2\sin\theta. \blacksquare \end{aligned}$$

余談 2.1 微積分の期末試験でヤコビアンの計算をさせると、割と多くの学生が Sarrus[2] の法則 (Sarrus の方法) を使って計算する。この法則は一般性がないし、変な勘違いをして覚えられていることも多く (当然間違えて×採点となる)、教師としては少し複雑な気持ちになる。「この問題では Sarrus の法則を使う方が簡単だ」と判断して選択するのならば結構だが、どうも「行列式の展開は覚えていないから」という理由で選んでいる人が多いような雰囲気がある。線形代数を避けて学生生活を送るわけには行かないから、必要が生じた時点で良い機会だと考えて『行列式の展開』を復習すべきだと思う (説教がましいかしらん…)。 ■

3 一般の $\mathbf{R}^n$ における極座標

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & \cdots \\ x_i &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i \quad (2\le i\le n-1) \\ & \cdots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

ただし $(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})$ は次の条件式で定義される $\mathbf{R}^n$ の部分集合 D を動くとする:

$$(2)\qquad \begin{array}{l} r\ge 0, \\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-2}\in[0,\pi], \\ \theta_{n-1}\in[0,2\pi) \end{array}$$

注意 3.1 $n=3$ のとき、既に紹介した空間極座標

$$(3)\qquad \begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \qquad (r\ge 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi)) \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

とは異なる (座標の順番が異なるだけで、本質的には同じものであるが)。混乱しないこと。

写像

$$\varphi_n\colon D\ni(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})\longmapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

のヤコビアンについては、次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (極座標のヤコビアン)

$$(4)\qquad \det\varphi_n' = \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}.$$

この証明を与えるかわりに、そのヒントとなる問題を掲げておく。

[2]Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861, フランス). 「Sarrus の法則」は Sarrus' scheme と綴る。

問題 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対して、次の式を満たす $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ を 4 次元極座標と呼ぶ:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1 \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ w &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in I := [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,2\pi).$$

(1) $\begin{cases} X &= r\cos\theta_1 \\ Y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ u &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ v &= \theta_3 \end{cases}$ とすると、写像 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ のヤコビアンは $r^2\sin\theta_1$ であることを示せ。

(2) $\begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= u\cos v \\ w &= u\sin v \end{cases}$ とするとき、写像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求め、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンが $r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$ であることを示せ。

(3) 4 次元単位球 $\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2<1\}$ の 4 次元 Jordan 測度を求めよ。

4 Laplacian の極座標表示

$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ における Laplacian $\triangle$ の極座標表示を書いておく。

例 4.1 (平面極座標の Laplacian) 平面の極座標

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

によって、平面の Laplacian

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

を表示すると

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

となる。

この公式の導出の要点を書いておく。

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.\end{aligned}$$

これから

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 u + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 u.$$

後はこれをていねいに計算するだけである。■

例 4.2 (空間極座標の Laplacian) 空間の極座標

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

によって、空間の Laplacian

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

を表示すると

$$\begin{aligned}\triangle u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

となる。■

証明 ヤコビ行列

$$J := \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

は、

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき、

$$J = (\boldsymbol{a} \quad r\boldsymbol{b} \quad r\sin\theta\boldsymbol{c})$$

と表される。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底であることに注意すると、簡単な計算で

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^T \\ \dfrac{1}{r}\boldsymbol{b}^T \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{c}^T \end{pmatrix}$$

であることが確かめられる。ゆえに

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}^{-1} = J^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

これから

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\sin\phi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\cos\phi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}. \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) \\ &= \sin^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \\ &+ \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} - \frac{2}{r}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi} - \frac{2}{r^2}\cot\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\theta} \\ &+ \frac{1}{r^2}(\cot\theta\sin^2\phi - 2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi)\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{2\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi)\frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) \\ &= \sin^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \\ &+ \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + \frac{2}{r}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\cot\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\theta} \\ &+ \frac{1}{r^2}(\cot\theta\cos^2\phi - 2\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi)\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{2\cos\phi\sin\phi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi)\frac{\partial u}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

これらを加えて

$$\begin{aligned} \triangle u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

このように、(5) を得るために、すべてを連鎖律で計算していくのはとても大変なので[3]、色々な工夫が考えられている。

[3]ちなみに、私が計算を始めてから、子供がポケモンの映画を見始めて、計算が終ったときには、子供はもう別のことをしていました。つまり映画一本の時間ではすまない、ということです。

3次元の極座標変換を2つの3次元円柱座標変換に分解する方法

まずは私のお勧めの方法から紹介しよう。これは3次元の極座標変換の、2つの3次元円柱座標変換への分解に基づくもので、計算は比較的シンプルで済み(要するに面倒なことが全部2次元 Laplacian の極座標表示に押し付けられている)、高次元への一般化も可能という、すぐれた方法である。それにもかかわらず、案外載っている本が少ない(もちろん杉浦 [1] には載っている)。

$\rho = r\sin\theta$ とおくと、

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} z = r\cos\theta \\ \rho = r\sin\theta \\ \phi = \phi \end{cases}$$

であるから、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

辺々加えて

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

2次元極座標に関する

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

という公式と同様にして

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

が得られる。ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.\blacksquare\end{aligned}$$

グリーンの公式を利用する方法

グリーンの公式を用いると、ラプラシアンは 1 階微分である grad で特徴づけることができる。重積分の極座標への変数変換の公式、変分法の基本補題を放り込めば問題が解決できる。— このやり方は結構あちこちに載っているが、それほど簡単とは言えない。しかし、より複雑な座標変換を用いる場合への一般化が期待できるという点に価値がある(と筆者には想像される — 正直言うとよく知らない)。

まず $\mathbf{R}^3$ の極座標による grad の内積の公式を導く。

$\mathbf{R}^3$ の領域上定義された u, v に対して、

(6) $$\nabla u\cdot\nabla v = u_r v_r + \frac{1}{r^2}u_\theta v_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_\phi v_\phi.$$

証明　連鎖律より

$$(u_r, u_\theta, u_\phi) = (u_x, u_y, u_z)\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}.$$

ここに現れるヤコビ行列を U とおく。具体的には

$$U = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

となるが、これを (e_1, e_2, e_3) とおくと、e_i $(i = 1, 2, 3)$ は直交系になる:

$$e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j).$$

それゆえ、

$$U^T U = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix} (e_1 e_2 e_3) = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & & \\ & e_2 \cdot e_2 & \\ & & e_3 \cdot e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

$$\nabla u = (U^{-1})^T \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}, \quad \nabla v = (U^{-1})^T \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla u \cdot \nabla v = (\nabla v)^T \nabla u = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix}^T (U^{-1})^{TT} (U^{-1})^T \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}.$$

ここで

$$(U^{-1})^{TT}(U^{-1})^T = U^{-1}(U^T)^{-1} = (U^T U)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dfrac{1}{r^2} & \\ & & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dfrac{1}{r^2} & \\ & & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \\ &= u_r v_r + \frac{1}{r^2} u_\theta v_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_\phi v_\phi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

さて、v を $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす関数とすると、Green の定理から

$$\iiint_\Omega v \,\triangle\, u \; dx\, dy\, dz = -\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx\, dy\, dz.$$

$\nabla u \cdot \nabla v$ を極座標表示した式 (6) を代入して

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega v \,\triangle\, u \; dx\, dy\, dz &= -\iiint_{\tilde{\Omega}} (u_r v_r + \frac{1}{r^2} u_\theta v_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} u_\phi v_\phi) r^2 \sin\theta \; dr\, d\theta\, d\phi \\ &= -\iiint_{\tilde{\Omega}} (r^2 \sin\theta u_r v_r + \sin\theta u_\theta v_\theta + \frac{1}{\sin\theta} u_\phi v_\phi) \; dr\, d\theta\, d\phi. \end{aligned}$$

(ただし $\widetilde{\Omega}$ は、極座標で Ω に対応する領域である。)
　部分積分を施し、積分変数を元に戻すと

$$\iiint_{\Omega} v \triangle u \, dx\, dy\, dz = \iiint_{\widetilde{\Omega}} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta} u_\phi\right)\right] v \, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \iiint_{\Omega} \frac{1}{r^2\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta} u_\phi\right)\right] v \, dx\, dy\, dz.$$

　v の任意性から (変分法の基本補題から、というべきか)

$$\triangle u = \frac{1}{r^2\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta} u_\phi\right)\right].$$

整理して

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right]. \quad \blacksquare$$

　$\mathbf{R}^n$ における $\triangle$ の極座標表示については、

島倉紀夫, 楕円型偏微分作用素, 紀伊國屋書店 (1978)

を見ると良い。

5　2 次元における Laplacian の差分近似

　すでに何度も見たように、$\mathbf{R}^2$ における Laplacian の極座標表示

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

において、$r = 0$ で係数に特異性がある。これをどう差分近似するか。

注意 5.1 (良く知られた (だがここでは役に立たない) テクニック) 円環領域や円の外部領域など、原点 $(r=0)$ を含まない領域で考えるときは、$r = \exp\rho$ とおくことで、 $\blacksquare$

　$x_i = ih$, $y_j = jh$ $(i, j \in \mathbf{Z})$ と直角座標系にそって格子を入れた場合、

$$\triangle u(0,0) \fallingdotseq \frac{u(h,0) - 2u(0,0) + u(-h,0)}{h^2} + \frac{u(0,h) - 2u(0,0) + u(0,-h)}{h^2} \tag{7}$$
$$= \frac{4}{h_r^2}\left[\frac{u(h,0) + u(-h,0) + u(0,h) + u(0,-h)}{4} - u(0,0)\right].$$

　極座標 (r,θ) の空間を、角度方向に $N_\theta (= 4N)$ 等分して、

$$r_i = ih_r, \quad \theta_j = jh_\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots; \ j \in \mathbf{Z})$$

(ただし $h_\theta = 2\pi/N_\theta = \pi/(2N)$) と格子を入れた場合、(7) は

$$\triangle u(0,0) \fallingdotseq \frac{4}{h_r^2}\left[\frac{u_{1,0} + u_{1,N} + u_{1,2N} + u_{1,3N}}{4} - u(0,0)\right]$$

と書き直すことができる。ところで $\triangle$ は直交変換で不変であることを思い出せば、任意の j について

$$\triangle u(0,0) \fallingdotseq \frac{4}{h_r^2}\left[\frac{u_{1,j} + u_{1,j+N} + u_{1,j+2N} + u_{1,j+3N}}{4} - u(0,0)\right]$$

これから

$$\triangle u(0,0) \fallingdotseq \frac{4}{h_r^2}\left(\frac{1}{N_\theta}\sum_{j=0}^{N_\theta-1} u_{1,j} - u(0,0)\right) \tag{8}$$

という近似公式が得られる。

これは一般次元に拡張できる: $\mathbf{R}^n$ における Laplacian の近似として

$$\triangle u(0) \fallingdotseq \frac{2\times(\text{空間の次元})}{h_r^2}\Big[(r=r_1 \text{ における } u \text{ の平均値}) - (\text{原点における } u \text{ の値})\Big]. \tag{9}$$

6 Laplace-Beltrami 作用素と n 次元 Laplacian

$\mathbf{R}^3$ の単位球面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\}$ の上で定義されたスカラー関数 w が与えられているとする。平面領域上の関数と同様に、w の勾配 $\mathrm{grad}_S\, w$ なるものが自然に定義できて、S 上のベクトル場を形成する。S 上の関数 v で

$$\int_S \psi v\, d\sigma = -\int_S \mathrm{grad}_S\,\psi\cdot\mathrm{grad}_S\, w\, d\sigma \quad (\psi\in C^1(S))$$

を成り立たせるものが存在するとき、この v を $\triangle_S\, w$ と書くことにしよう。こうして定義された

$$\triangle_S : w \mapsto \triangle_S\, w$$

を球面上の **Laplace-Beltrami 作用素**と呼ぶ。

同様にして、任意次元の単位球面における Laplace-Beltrami 作用素が定義できる。

命題 6.1 (Laplacian と Laplace-Beltrami operator の関係) n 次元 Laplace 作用素は、(r,σ) $(r\in[0,\infty),\ \sigma\in S^{n-1})$ という座標系では

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle_S\, u.$$

と表される。ここで $\triangle_S$ は $n-1$ 次元単位球面 S^{n-1} 上の Laplace-Beltrami 作用素である。

証明 $\mathbf{R}^n$ で定義された滑らかな関数 ψ で、十分大きな球の外側および原点の近傍上で 0 になるものを任意に取る。部分積分により

$$\int_{\mathbf{R}^n}\psi\triangle u\, dx = -\int_{\mathbf{R}^n}\nabla\psi\cdot\nabla u\, dx = -\int_0^\infty r^{n-1}\left(\int_S \nabla\psi\cdot\nabla u\, d\sigma\right)dr.$$

以下で見るように

$$\nabla\psi\cdot\nabla u = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\mathrm{grad}_S\,\psi\cdot\mathrm{grad}_S\, u$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n}\psi\triangle u\, dx &= -\int_S\left(\int_0^\infty r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}dr\right)d\sigma - \int_0^\infty r^{n-3}\left(\int_S \mathrm{grad}_S\,\psi\cdot\mathrm{grad}_S\, u\, d\sigma\right)dr \\
&= \int_S\left(\int_0^\infty \psi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr\right)d\sigma + \int_0^\infty r^{n-3}\left(\int_S \psi\triangle_S\, u\, d\sigma\right)dr \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\psi\left[\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\triangle_S\, u\right]dx.
\end{aligned}$$

ψ の任意性から

$$\triangle u = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\triangle_S u$$

が得られる。 ■

$n = 2, 3$ の場合に得られている Laplacian の極座標表示から、Laplace-Beltrami 作用素の公式が得られる。

系 6.2 (2, 3 次元の Laplace-Beltrami 作用素) $\mathbf{R}^n$ $(n = 2,3)$ における Laplace-Beltrami 作用素は、極座標を用いると以下のように表される。

$$\triangle_S = \begin{cases} \dfrac{d^2}{d\theta^2} & (n=2) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} & (n=3). \end{cases}$$

系 6.3 (r のみによる調和関数) $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ における調和関数 u が r のみに依存する場合、適当な定数 C_1, C_2 を取ると

$$u = \begin{cases} C_1 \log r + C_2 & (n=2) \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 & (n \neq 2) \end{cases}$$

となる。

証明 仮定から 1 変数関数 $h = h(r)$ が存在して、$u(x) = h(|x|)$. すると $\triangle_S u = 0$ となるから、

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = h''(r) + \frac{n-1}{r}h'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}h(r))'.$$

ゆえに、もしも $\triangle u \equiv 0$ ならば

$$r^{n-1}h'(r) \equiv C \quad (C \text{ は定数}).$$

これから

$$h(r) = \int \frac{C}{r^{n-1}}dr = \begin{cases} C_2 + C\log r & (n = 2 \text{ のとき}) \\ C_2 + \dfrac{C}{2-n}\dfrac{1}{r^{n-2}} & (n \neq 2 \text{ のとき}). \end{cases} \quad ■$$

7 球面調和関数

(工事中)

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$r := |x|, \tag{10}$$

$$\sigma := \frac{x}{r} \tag{11}$$

とおくと、$r \in [0,\infty)$, $\sigma \in S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n; |x| = 1\}$ である。

独立変数 $x_1, \cdots, x_n$ の k 次同次多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は、k 次同次性の定義から

$$P(x) = P(r\sigma) = r^k P(\sigma)$$

を満たす。

定義 7.1 (体球調和関数、球面調和関数) k 次同次多項式 $P(x) = P(x_1, \cdots, x_n)$ が調和関数であるとき、これを k 次の**体球調和関数** (**solid harmonic function**) と呼び、またそのとき $P|_{S^{n-1}} \colon \sigma \mapsto P(\sigma)$ を k 次の**球面調和関数** (**spherical harmonic function**, **surface harmonic function**) と呼ぶ。

$P(x)$ が k 次の体球調和関数とするとき、

$$
\begin{aligned}
0 = \triangle P(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle_S\right)(r^k P(\sigma)) \\
&= (k(k-1)r^{k-2} + (n-1)kr^{k-2})P(\sigma) + r^{k-2}\triangle_S P(\sigma) \\
&= r^{k-2}(\triangle_S P(\sigma) + k(n+k-2)P(\sigma)).
\end{aligned}
$$

ゆえに k 次の球面調和関数 $P(\sigma)$ は

$$
\triangle_S P(\sigma) + k(n+k-2)P(\sigma) = 0 \tag{12}
$$

を満たす。すなわち $P(\sigma)$ は、球面上の Laplace-Beltrami 作用素 $\triangle_S$ の固有値 $-k(n+k-2)$ に属する固有関数である。

実は、球面上の Laplace-Beltrami 作用素の固有値と固有関数は、すべて上の形で求まる。(つまり、$\{k(n+k-2)\}_{k=0,1,\cdots}$ が固有値の全体であり、対応する固有関数は球面調和関数に取ることが出来る。)

$n = 2$ の場合

(上の議論をもう一度最初からやってみる) x, y の k 次同次多項式 $P(x, y)$ で調和なものに対して、$f(\theta) := P(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
0 = \triangle P &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(r^k f(\theta)) \\
&= k^2 r^{k-2} f(\theta) + r^{k-2} f''(\theta) = r^{k-2}(k^2 f(\theta) + f''(\theta)).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
f''(\theta) + k^2 f(\theta) = 0.
$$

この一般解は

$$
f(\theta) = C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta \quad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数}).
$$

ゆえに k 次同次多項式で調和なものは、以下の 2 つの多項式の 1 次結合に限られる。

$$
r^k \cos k\theta = \mathrm{Re}\ \left[(x + \sqrt{-1})^k\right], \quad r^k \sin k\theta = \mathrm{Im}\ \left[(x + \sqrt{-1})^k\right].
$$

上の議論を振り返れば、$n = 2$ の場合の球面 (円周と言うべきか) 上の Laplace-Beltrami 作用素の固有値は、$-k^2$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) で尽くされ、その固有関数は球面調和関数に他ならないことが簡単に分かる。

$n = 3$ の場合

$n = 3$ の場合、極座標を用いると、(12) は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} + k(k+1)P = 0 \tag{13}$$

と書ける。

$z = \cos\theta$ なる変換を行い、(13) の解で、変数分離形で表されるものを求めると、適当な非負整数 m と定数 α を用いて

$$P(z) = w(z)\sin(m\varphi - \alpha)$$

と書ける。ただし、w は

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2a\frac{dw}{dz} + \left[k(k+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]w = 0. \tag{14}$$

これを **Legendre の同伴微分方程式**と呼ぶ。

参考文献

[1] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる．　この eBook まともな目次を付けてほしい.