常微分方程式の Green 関数

桂田 祐史

2008 年 6 月 8 日, 2009 年 12 月

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/green2.pdf

こんなのも書いていたっけ。つい最近、桂田 [1] というのを書いた (差分法の話題がメイン)。マージするかもしれない。

1　1 次元 Poisson 方程式

$$-x''(t) = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

結果を先に書くと

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\,ds, \quad G(t,s) := \begin{cases} s(1-t) & (0 \le s \le t \le 1) \\ t(1-s) & (0 \le t \le s \le 1). \end{cases}$$

1.1　素朴に積分して解く

$$x'(t) - x'(0) = -\int_0^t f(s)\,ds.$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) - x'(0)t &= -\int_0^t \left(\int_0^r f(s)\,ds\right) dr = -\int_0^t \left(\int_s^t f(s)\,dr\right) ds \\ &= -\int_0^t (t-s) f(s)\,ds. \end{aligned}$$

ゆえに ($x(0) = 0$ を用いて)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s)\,ds = x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s)\,ds.$$

$$0 = x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s) f(s)\,ds$$

であるから、

$$x'(0) = \int_0^1 (1-s) f(s)\,ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x(t) &= t\int_0^1 (1-s)f(s)\,ds - \int_0^t (t-s)f(s)\,ds \\ &= \int_0^t \left[t(1-s)-(t-s)\right] f(s)\,ds + t\int_t^1 (1-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t s(1-t)f(s)\,ds + \int_t^1 t(1-s)f(s)\,ds. \end{aligned}$$

1.2 定数変化法で解く

$x''(t)=0$ の一般解は $x(t)=C_1+C_2t$ (C_1, C_2 は任意定数) である。そこで $x(t)=C_1(t)+C_2(t)t$ とおく。

$$x'(t)=C_1'(t)+C_2'(t)t+C_2(t).$$

$$C_1'(t)+C_2'(t)t=0 \tag{1}$$

を仮定すると、$x'(t)=C_2(t)$. ゆえに $x''(t)=C_2'(t)$ であるから

$$C_2'(t)=-f(t).$$

(1) から

$$C_1'(t)=-C_2'(t)t=tf(t).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} C_1(t) &= C_1(0)+\int_0^t sf(s)\,ds, \\ C_2(t) &= C_2(0)-\int_0^t f(s)\,ds. \end{aligned}$$

これから

$$x(t)=C_1(0)+\int_0^t sf(s)\,ds + C_2(0)t - t\int_0^t f(s)\,ds.$$

境界条件 $x(0)=0$ より $C_1(0)=0$ である。$x(1)=0$ より

$$0=x(1)=\int_0^1 sf(s)\,ds - \int_0^1 sf(s)ds.$$

ゆえに

$$C_2(0)=\int_0^1 f(s)\,ds - \int_0^1 sf(s)\,ds = \int_0^1 (1-s)f(s)\,ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t sf(s)\,ds + \int_0^1 t(1-s)f(s)\,ds - t\int_0^t f(s)\,ds \\ &= \int_0^t \left[s+t(1-s)-t\right] f(s)\,ds + \int_t^1 t(1-s)f(s)\,ds \\ &= \int_0^t s(1-t)f(s)\,ds + \int_t^1 t(1-s)f(s)\,ds. \end{aligned}$$

2　より一般の 2 階線形常微分方程式の境界値問題の Green 関数

ここに書いてある話は良く知られていることではあるが、(初学者は探すのが一苦労であろうから) 参考書をあげれば、例えば藤田 [2]。桂田 [3] というノートがある。[3] で書いたまとめを引用しておく。

2 階線形常微分方程式の境界値問題のまとめ

- 正値性の仮定 ($p(t) \geq \exists\delta > 0$) を満たす 2 階線型常微分方程式の境界値問題について、交代定理「可解 $\Leftrightarrow$ 一意 $\Leftrightarrow$ 一意可解」がなりたつ。
- 同次境界条件の場合、一意可解性が成り立つならば、境界値問題の解は Green 関数を用いて表わされる。
- 形式的自己共役な場合には、一意可解性の簡単で具体的な判定条件がある。またその場合、Green 関数は対称性を持つ。
- 形式的自己共役でない場合も、十分小さい (絶対値の大きな負数) λ に対して、$L_\lambda := L_0 + \lambda$ に対する境界値問題の一意可解性が成り立つ。

また明治大学数学科 3 年生向けの「常微分方程式 1」 (by 森本先生) でも講義される。以下のまとめかたは、その講義の内容を拝借したものである。

直接のつながりはないが、初期値問題の Green 関数については、桂田 [4] を見よ。

$A \in M(n; \mathbf{C})$, $b \in \mathbf{C}^n$ に対して、

$$Ax = b \tag{2}$$

という線形方程式を考えよう (未知数の個数 = 方程式の個数，の連立 1 次方程式)。

$$A^{-1} \text{ が存在} \quad \Longleftrightarrow \quad (Ax = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0)$$

に注意しよう。このとき、任意の b に対して、(2) の解は一意的に存在し、それは $x = A^{-1}b$ で与えられる。

定理 2.1 (同次方程式の解の一意性 $\Longrightarrow$ 非同次方程式の解の一意存在 (交代定理), Green 関数) $I=[a,b]$, $p,q,r\in C(I;\mathbf{C})$,

$$\exists\delta>0\quad\forall t\in I\quad p(t)\ge\delta$$

とするとき、

$$L_0[u]:=pu''+qu'+ru\quad(u\in C^2(I;\mathbf{C}))$$

とおく (つまり $L_0[u](t)=p(t)u''(t)+q(t)u'(t)+r(t)u(t)$, $t\in I$)。同次 Dirichlet 境界値問題

$$L_0[u](t)=0\quad(a<t<b),\quad u(a)=u(b)=0$$

の解が $u\equiv 0$ のみであれば、$\forall f\in C(I;\mathbf{C})$ に対して、

$$L_0[u](t)=f(t)\quad(a<t<b),\quad u(a)=u(b)=0 \tag{3}$$

の解は一意的に存在し、次式で与えられる:

$$u(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)\,ds\quad(t\in I).$$

ただし

$$G(t,s):=\begin{cases}\dfrac{\varphi(t)\psi(s)}{W(s)p(s)} & (a\le t\le s\le b)\\ \dfrac{\varphi(s)\psi(t)}{W(s)p(s)} & (a\le s\le t\le b),\end{cases}$$

$$\varphi \text{ は } L_0[\varphi]=0,\ \varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=1 \text{ の解},$$

$$\psi \text{ は } L_0[\psi]=0,\ \psi(b)=0,\ \psi'(b)=1 \text{ の解},$$

$$W(s):=\det\begin{pmatrix}\varphi(s) & \psi(s)\\ \varphi'(s) & \psi'(s)\end{pmatrix}=\varphi(s)\psi'(s)-\psi(s)\varphi'(s).$$

G を境界値問題 (3) の **Green 関数** (**Green function**) と呼ぶ。

例 2.2 $u''(t)=f(t)$, $u(0)=u(1)=0$ という問題の場合、

$$\varphi''=0,\quad\varphi(0)=0,\quad\varphi'(0)=1,$$

$$\psi''=0,\quad\psi(1)=0,\quad\psi'(1)=1$$

から

$$\varphi(s)=s,\quad\psi(s)=s-1$$

と求まるので、

$$W(s)=\det\begin{pmatrix}\varphi(s) & \psi(s)\\ \varphi'(s) & \psi'(s)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}s & s-1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=s\cdot 1-(s-1)\cdot 1=1,$$

これと $p(s)\equiv 1$ から

$$u(t)=\int_0^t G(t,s)f(s)\,ds,$$

$$G(t,s)=\begin{cases}t(s-1) & (0\le t\le s\le 1)\\ s(t-1) & (0\le s\le t\le 1)\end{cases}$$

が得られる。1 節の問題の解は、これに -1 をかけたものである。■

なお、藤田 [2] 定理? では、

$$-u'(a)+\sigma_1 u(a)=u'(b)+\sigma_2 u(b)=0$$

という境界条件も扱っている。

任意の f に対して解が存在することから、一意性が出るか？

$p,q,r\in C([a,b];\mathbf{C})$ かな？ $p(t)\geq\delta>0$ はどこで効くのだろう？

証明 φ, ψ を定める常微分方程式の初期値問題は、確かに一意可解である。

φ, ψ は 1 次独立である。実際、$c_1\varphi+c_2\psi=0$ とすると、

$$v(t):=c_1\varphi(t)=-c_2\psi(t)$$

とおくと、

$$L_0[v]=0,\quad v(a)=c_1\varphi(a)=0,\quad v(b)=-c_2\psi(b)=0$$

であるから、一意性の仮定から $v=0$ が導かれ、

$$c_1=c_1\varphi'(a)=v'(a)=0,\quad c_2=c_2\psi'(b)=-v'(b)=0.$$

ゆえに Wronskian は 0 にならない: $W(s)\neq 0$ $(s\in I)$.

後のために、$\varphi(b)\neq 0$, $\psi(a)\neq 0$ を示す。もしも $\varphi(b)=0$ と仮定すると、φ は $L_0[\varphi]=0$, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ を満たすので、仮定 (同次境界値問題の解の一意性) から、$\varphi\equiv 0$ が導かれ、$\varphi'(a)=1$ と矛盾する。同様にして $\psi(a)\neq 0$ が得られる。

定数変化法で解を求めよう。

$$u(t)=c_1(t)\varphi(t)+c_2(t)\psi(t)$$

とおくと、

$$u'(t)=(c_1'\varphi+c_2'\psi)+(c_1\varphi'+c_2\psi').$$

ここで

$$c_1'(t)\varphi(t)+c_2'(t)\psi(t)=0\quad(t\in I)\tag{4}$$

を仮定すると、

$$u'(t)=c_1\varphi'+c_2\psi'.$$

ゆえに

$$u''(t)=c_1'\varphi'+c_2'\psi'+c_1\varphi''+c_2\psi''.$$

これらから、

$$L_0[u]=c_1L_0[\varphi]+c_2L_0[\psi]+p(c_1'\varphi'+c_2'\psi').$$

u が $L_0[u]=f$ の解であるためには

$$c_1'\varphi'+c_2'\psi'=\frac{f}{p}\tag{5}$$

であることが必要十分である。(4), (5) をまとめて

$$\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{f}{p}\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \psi' & -\psi \\ -\varphi' & \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\psi f}{pW} \\ \dfrac{\varphi f}{pW} \end{pmatrix}.$$

これから (a と b のどちらから積分するかは、後を見越した工夫)

$$c_1(t) = c_1(b) + \int_b^t \frac{-\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds, \quad c_2(t) = c_2(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds. \tag{6}$$

ゆえに

$$u(t) = \left(c_1(b) + \int_t^b \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds\right)\varphi(t) + \left(c_2(b) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds\right)\psi(t).$$

境界条件に代入して ($\varphi(a) = \psi(b) = 0$ に注意すると)、

$$0 = u(a) = c_2(a)\psi(a), \quad 0 = u(b) = c_1(b)\varphi(b).$$

$\psi(a) \neq 0$, $\varphi(b) \neq 0$ であるから、$c_1(b) = c_2(a) = 0$. ゆえに

$$u(t) = \varphi(t)\int_t^b \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds + \psi(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)}\,ds = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds.\blacksquare$$

p, q, r が実数値で、$q = p'$ である場合、L_0 は**形式的自己共役**であるという[1]。これは

$$(L_0[u], v) = (u, L_0[v])$$

となることにちなむ。実際

$$L_0[u] = pu'' + qu' + ru = pu'' + p'u' + ru = (pu')' + ru$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
(L_0[u], v) &= \int_a^b (pu')'v\,dt + \int_a^b ruv\,dt = [p(t)u'(t)v(t)]_a^b - \int_a^b (pu')v'\,dt + \int_a^b ruv\,dt \\
&= -\int_a^b u'(pv')dt + \int_a^b ruv\,dt = -[u(t)p(t)v'(t)]_a^b + \int_a^b u(pv')'dt + \int_a^b ruv\,dt \\
&= \int_a^b u\left[(pv')' + rv\right]dt = (u, L_0[v]).
\end{aligned}$$

この証明を見れば分かるように、「形式的自己共役」というときは、境界条件も込めて考えるべきものである (そういう意味では、境界条件に言及しない「L_0 は形式的自己共役」という言い方には問題がある)。

[1]もともと「自己共役」とは、Hilbert 空間内の線形作用素についての言葉である。

定理 2.3 (定数項の係数 ≤ 0 である形式的自己共役な境界値問題の一意性) $I = [a,b]$, $p, r \in C(I;\mathbf{R})$,

$$\exists\delta > 0 \quad \forall t \in I \quad p(t) \geq \delta,$$

$$\forall t \in I \quad r(t) \leq 0$$

とするとき、

$$L_0[u] := (pu')' + ru \quad (u \in C^2(I;\mathbf{C}))$$

とおくと、境界値問題

$$L_0[u](t) = 0 \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解は $u \equiv 0$ のみである。

証明 u_1, u_2 が共に解とする。$u := u_1 - u_2$ とおく。

$$L_0[u] = 0, \quad u(a) = u(b) = 0$$

が成り立つ。$L_0[u]$ に u をかけて部分積分すると

$$\begin{aligned} 0 = (L_0[u], u) &= \int_a^b (pu')'u\,dt + \int_a^b ru^2\,dt = [pu'u]_a^b - \int_a^b pu'u'\,dt + \int_a^b ru^2\,dt \\ &= -\int_a^b p(u')^2\,dt + \int_a^b ru^2\,dt \leq -\delta \int_a^b (u')^2\,dt. \end{aligned}$$

移項して δ で割って

$$\int_a^b (u')^2\,dt \leq 0.$$

これから $u' = 0$. u は定数だが、$u(a) = u(b) = 0$ なので実は $u = 0$. ゆえに $u_1 = u_2$. ■

定理 2.4 定数項の係数が ≤ 0 であるような形式的自己共役作用素の境界値問題に対して、Green 関数が存在する。

証明 上の二つの定理の系である。■

参考文献

[1] 桂田祐史：1 次元の Poisson 方程式, `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/poisson1d.pdf` (2024/8/25).

[2] 藤田宏：現代解析入門, 前篇「現代解析入門」, 岩波書店 (1991), 後篇は吉田耕作著.

[3] 桂田祐史：常微分方程式ノート, `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/members/ODE.pdf` (1991〜).

[4] 桂田祐史：$y'' + py' + qy = f(x)$ の初期値問題の Green 関数, `https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/green.pdf` (2008〜).