関数解析入門 II
積分・関数空間ノート[1]

桂田 祐史

2003 年 6 月 10 日, 2017 年 5 月 22 日

[1]自分のための注: ~/math/functional-analysis/functional-analysis-2.tex

目 次

第 1 章　Lebesgue 積分のいろは **2**
1.1　測度空間の定義 2
1.2　零集合、完備な測度空間 2
1.3　ほとんど至るところ等しい 2
1.4　Beppo Levi の単調収束定理 3
1.5　Fatou の補題 3
1.6　Fubini-Toneli の定理 4
1.7　直線上の絶対連続関数 4

第 2 章　Banach 空間 (1) **6**

第 3 章　Lebesgue 空間 L^p (1) **7**
3.1　稠密定理 7
3.2　局所可積分 7

第 4 章　Banach 空間 (2) **8**
4.1　$(X^*)^*$ への標準単射 8

第 5 章　Lebesgue 空間 L^p (2) **9**

第 6 章　Sobolev 空間 $W^{1,p}$ **10**

第 7 章　そのほか **11**
7.1　言葉遣い 11
7.1.1　a.e. VS. p.p 11
7.1.2　a.e. x VS. a.a. x 11
7.2　歴史 11
7.3　参考文献案内 11

第1章　Lebesgue 積分のいろは

Lebesgue 積分で覚えておかなければいけないことを証明抜きでまとめておく。
もちろん証明のない記述は信用しないことが肝心。

1.1　測度空間の定義

1.2　零集合、完備な測度空間

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の部分集合 A が零集合であるとは、

$$A \in \mathcal{B}, \quad \mu(A) = 0$$

を満たすことと定義する。

$\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度の場合は、簡単な言い換えがある。

定理 1.2.1 (Riemann 可積分の必要十分条件 (Lebesgue, 1902)) $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の有界な関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ が可積分であるための必要十分条件は、f の不連続点全体の集合が零集合 (Lebesgue 測度が 0) であることである。

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ あるいは測度 μ が完備であるとは、任意の零集合の部分集合が可測であることと定義する。

$\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度は完備である。

A が零集合であるとき、その部分集合 B は可測であれば、測度の単調性から、

$$0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = 0$$

となるので、$\mu(B) = 0$. ゆえに B は零集合に他ならない。したがって、完備であることの条件を「任意の零集合の部分集合が零集合である」と言ってもよい。

1.3　ほとんど至るところ等しい

完備な測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の可測部分集合 A 上で定義された関数 f, $g\colon A \to \mathbf{C}$ がほとんど至るところ等しいとは、

$$N := \{x \in A; f(x) \neq g(x)\}$$

が零集合、すなわち $\mu(N) = 0$ であることと定義する。このとき

$$f = g \quad \text{a.e. on } A$$

と書く。

命題 1.3.1 完備な測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の可測部分集合 A 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ について、

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n = g_n \quad \text{a.e. on } A$$

が成り立つならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \quad \text{a.e. on } A.$$

命題 1.3.2 (「ほとんど至るところ等しい」は同値関係) 完備な測度空間の部分集合 A 上の関数全体の集合の上の二項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad f = g \quad \text{a.e. on } A$$

と定義すると、これは同値関係になる。

命題 1.3.3 (ほとんど至るところ等しい関数) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を完備な測度空間、A をその部分集合とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $f, g \colon A \to \mathbf{C}$ がほとんど至るところ等しく、f が可測であれば、g も可測である。

(2) $f, g \colon A \to \mathbf{C}$ がほとんど至るところ等しい可測関数であれば、

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_A g(x)d\mu(x).$$

(一方が可積分であれば、もう一方も可積分で、それらの積分は等しい。)

1.4 Beppo Levi の単調収束定理

Beppo Levi (1875–1961) の名前のつけられた次の定理は便利である。

定理 1.4.1 () $\{f_n\}$ が $L^1(\Omega)$ の非負単調増加関数列で、

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$$

を満たならば、ほとんどすべての x で、$f_n(x)$ は有限な極限 $f(x)$ に収束し、$f \in L^1(\Omega)$, そして $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

1.5 Fatou の補題

定理 1.5.1 (Fatou の補題 (P. Fatou, 1906)) 可測集合 Ω 上定義された可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が、$f_n \geq 0$ a.e. on Ω $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすならば

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

仮定 $f_n \geq 0$ を、「ある可積分関数 φ が存在して、$f_n(x) \geq \varphi(x)$ (a.e. in Ω)」という条件で置き換えてある本もある。

1.6 Fubini-Toneli の定理

定理 1.6.1 (Fubini) $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ならば、ほとんとすべての $x \in \Omega_1$ に対して、

$$F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2) \quad \text{かつ} \quad \int_{\Omega_2} F(\cdot, y)dy \in L^1(\Omega_1).$$

同様にほとんとすべての $y \in \Omega_2$ に対して、

$$F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1) \quad \text{かつ} \quad \int_{\Omega_1} F(x, \cdot)dy \in L^2(\Omega_2).$$

そして

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)\, dxdy. \tag{1.1}$$

定理 1.6.2 (Tonelli) 可測関数 $F\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{C}$ が、ほとんどすべての $x \in \Omega_1$ について

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)|dy < \infty,$$

さらに

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)|dy < \infty$$

を満たすならば $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. 特に (1.1) が成り立つ。

1.7 直線上の絶対連続関数

昔、大学院の面接でいじめられたことを思い出す。

Lebesgue の意味で可積分 $\equiv$ 絶対連続関数のほとんど至るところ導関数

定義 1.7.1 (絶対連続) $I = [a, b]$ を $\mathbf{R}$ の有界閉区間, $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ とする。

(1) F が絶対連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ が存在して、I 内の交わらない区間の列 $(a_j, b_j]$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ で

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$$

を満たすものすべてについて、

$$\sum_{j=1}^{n}|F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義する。

(2) F が有界変動であるとは、ある定数 M が存在して、I の任意の分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

に対して

$$\sum_{j=1}^{n}|F(x_j) - F(x_{j-1})| \le M$$

が成り立つことと定義する。

命題 1.7.2 (絶対連続関数は有界変動)

定理 1.7.3 (可積分関数の原始関数 ≡ 絶対連続関数) $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の関数 $F\colon I \to \mathbf{R}$ に対して次の二条件は同値である。

(i) F は I 上絶対連続である。

(ii) $f \in L^1(I)$ が存在して、

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in I).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明には Radon-Nikodym の定理を用いる。

定理 1.7.4 (可積分関数の積分はほとんど至るところ微分できて元に戻る) $\mathbf{R}$ の区間 I 上の可積分関数 $f\colon I \to \mathbf{C}$, $a \in I$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in I)$$

とおくと、I 上ほとんどすべての x に対して、

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

が存在して、$f(x)$ に等しい。

第2章　Banach 空間 (1)

第3章　Lebesgue 空間 L^p (1)

3.1　稠密定理

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合, $1 \leq p < \infty$ とするとき、$C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である。すなわち

$$\forall f \in L^p(\Omega), \exists \{f_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) \quad \text{s.t.} \quad \|f - f_n\|_{L^p} \to 0.$$

3.2　局所可積分

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合, $p \in [1, \infty)$ とする。可測関数 $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$ が p 乗局所可積分であるとは、Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して、

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty$$

が成り立つことと定義する。

Ω 上の p 乗可積分関数全体を $L^p_{loc}(\Omega)$ と表わす。

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

$f \in L^1_{loc}(\Omega)$ とするとき、$\forall \varphi \in C_0(\Omega)$ に対して $f\varphi$ は Ω 上可積分である。特に $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) dx$$

は意味を持ち、実は $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ は超関数になる。

第4章　Banach 空間 (2)

4.1　$(X^*)^*$ への標準単射

X を Banach 空間とする。$x \in X$ を取り、

$$T\colon X^* \ni f \longmapsto {}_{X^*}\langle f, x\rangle_X \in \mathbf{K}$$

を考える。明らかに T は線形である。また

$$|Tf| = |{}_{X^*}\langle f, x\rangle_X| \le \|f\|_{X^*}\|x\|_X$$

であるから連続である。ゆえに $T \in (X^*)^* = X^{**}$. そして

$${}_{X^*}\langle f, T\rangle_{X^{**}} = {}_{X^*}\langle f, x\rangle_X.$$

$$\|T\|_{X^{**}} \equiv \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |{}_{X^*}\langle f, x\rangle_X|$$

であるから、まず明らかに

$$\|T\|_{X^{**}} \le \sup_{\|f\|_{X^*}=1} \|f\|_{X^*}\|x\|_X \le \|x\|_X.$$

実は $\|T\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ である。実際、

T のことを Jx と書こう。つまり $J\colon X \to X^{**}$ で、

$$Jx = T = (f \mapsto {}_{X^*}\langle f, x\rangle_X).$$

この J は線形である。実際

$$J(x+y) = (f \mapsto {}_{X^*}\langle f, x+y\rangle_X) = (f \mapsto {}_{X^*}\langle f, x\rangle_X) + (f \mapsto {}_{X^*}\langle f, y\rangle_X) = Jx + Jy.$$

これが分かりにくければ

$${}_{X^*}\langle f, J(x+y)\rangle_{X^{**}} =$$

第5章　Lebesgue 空間 L^p (2)

第6章　Sobolev 空間 $W^{1,p}$

第7章　そのほか

7.1　言葉遣い

7.1.1　a.e. VS. p.p

普通、日本の学生は、授業で “almost everywhere” 略して a.e. という言葉を習い、フランス人の書いた本 (例えばブレジス) を見て “presque partout” 略して p.p. を見て驚くのだが、実は Lebesgue はフランス人なので、p.p. の方が本家のわけである。

7.1.2　a.e. x VS. a.a. x

さて、「f と g が Ω 上ほとんど至るところ等しい」というのは、$f = g$ a.e. on Ω と書くわけであるが、「Ω に含まれるほとんどすべての x」というのはどう書くか？これを a.e. $x \in \Omega$ と書く本が多い (almost every x と読ませる) が、我らが I 先生は、「それはおかしい。almost all x となるはずだから、a.a. $x \in \Omega$ とすべきだ。」というのが持論だった。

7.2　歴史

G. B. Riemann は『三角級数によって表現できる関数について』(1854) で、Riemann 式の積分の定義を与えた。

Lebesgue は Thèse — Intégrale, Longueur, Aire, Milan (1902) で、Lebesgue 式の積分の定義を与えた。

7.3　参考文献案内

筆者が学生の時、教科書に指定されたのは伊藤 [2] だった。自習する際に読み易いとは言えないような感じがするが、参照するときに外せない文献だと思う。

吉田 [1] は、案外言及されることの少ない文献なのだが、定理の意味 (意義) が非常に分かりやすいので、自学自習する人にも勧められるのではないかと思う。「まえがき」を写経して、ここにコピーしたいくらい。

関連図書

[1] 藤田宏・吉田耕作, 現代解析入門, 岩波書店 (1991).
(前編が解析入門の続きで、後編が Lebesuge 積分論。)

[2] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).