定数係数線形常微分方程式の解の漸近挙動

桂田 祐史

2022年3月1日, 2022年3月4日

1　はじめに

定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

の解 $x(t)$ の漸近挙動 ($t \to +\infty$ のときどうなるか) について述べる。

これは、常識的なこと、あるいは常識的なことから簡単に導けることであるけれど (常識をマスターしている人は、多分結論を聞けば、少し考えて「なるほど」と言うと思われる)、意外と書いてあるテキストが少ないので、あえて書いてみた次第。常識は知らない人には調べるのが結構大変なので。

“常識” の多くは杉浦・横沼 [1](この本が電子化されて図書館に入れば素敵なのだが…) などで得ることができる。

定理 1.1 ($e^{tA} \to 0$ の条件) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対して、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0.$

(ii) A のすべての固有値 λ は $\operatorname{Re}\lambda < 0$ を満たす。

(証明は後述する。)

系 1.2 ($\max \operatorname{Re}\lambda < 0$ ならば 0 は漸近安定な平衡点) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ のすべての固有値 λ が $\operatorname{Re}\lambda < 0$ を満たすならば、任意の $x_0 \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}x_0 = 0.$$

証明　一般に $\left\|e^{tA}x_0\right\| \le \left\|e^{tA}\right\| \|x_0\|$ が成り立ち、定理から $\left\|e^{tA}\right\| \to 0$ であるから、$\left\|e^{tA}x_0\right\| \to 0$ $(t \to +\infty)$. ■

(**細かい注意**　漸近安定を証明するためには、$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ 以外に、安定であることも示す必要があるが、簡単である。)

定理 1.3 (e^{tA} が有界である条件) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対して、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) e^{tA} $(t \in [0,+\infty))$ は有界である。すなわち

$$(\forall t \in \mathbb{R} : t \geq 0) \quad \left\|e^{tA}\right\| \leq M.$$

(ii) A のすべての固有値 λ は次の条件 (a), (b) を満たす。

(a) $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

(b) $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ならば、λ は A の最小多項式の単根である (言い換えると、λ に対する A の Jordan 細胞のサイズは 1 である)。

(証明は後述する。)

注意 1.4 定理 1.3 の (i) を

(i′) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,+\infty)$ で e^{tA} は有界である。すなわち

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists M \in \mathbb{R})(\forall t \in \mathbb{R} : t \geq a) \quad \left\|e^{tA}\right\| \leq M.$$

とすることも出来る ([1] は、そのような記述「$+\infty$ の近傍で有界」にしてある)。しかし、この形にしておくと、対偶「(ii) が成り立たなければ e^{tA} $(t \in [0,+\infty))$ は非有界」が分かりやすい、と考えた。

e^{tA} は連続であるから、任意のコンパクトな区間 $I = [\alpha, \beta]$ に対して e^{tA} $(t \in I)$ は有界である。ゆえに a の値が何であるかは問題にならず、$a = 0$ としても一般性を失わない、ということである。 ■

「e^{tA} $(t \in [0,\infty))$ が非有界であれば、$e^{tA}x_0$ $(t \in [0,\infty))$ が非有界であるような x_0 が存在するか」は意外と分かりにくいのではないだろうか。別途証明しておくことにする。

定理 1.5 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ が定理 1.3 の条件 (ii) を満たさないならば、ある $x_0 \in \mathbb{C}^n$ が存在して、$\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}x_0\right\| = +\infty$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の場合は $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と取れる。

(証明は後述する。)

この定理を認めれば、次は簡単である ($\operatorname{Re}\lambda > 0$ を満たす固有値が存在するならば、定理 1.3 の条件 (ii) は成り立たないから)。

系 1.6 ($\max \operatorname{Re}\lambda > 0$ ならば 0 は不安定な平衡点) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値 λ で、$\operatorname{Re}\lambda > 0$ を満たすものが存在するならば、ある $x_0 \in \mathbb{C}^n$ が存在して、$\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}x_0\right\| = +\infty$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の場合は $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と取れる。

不要かもしれない。削除を検討する。

$\|e^{tA}\|$ と $\|e^{tA}x_0\|$ の関係について、注意しておく。

- 一般に $x, y \in \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ が $y = Ax$ を満たすとき、$\|y\| \le \|A\|\|x\|$ である。
- 特に $A \in GL(n;\mathbb{K})$ であるとき、$x = A^{-1}y$ であるから、$\|x\| \le \|A^{-1}\|\,\|y\|$ ゆえに $\|y\| \ge \|A^{-1}\|^{-1}\,\|x\|$.

$e^{tA} \in GL(n;\mathbb{K})$ であるから、

$$\left\|\left(e^{tA}\right)^{-1}\right\|^{-1}\|x_0\| \le \left\|e^{tA}x_0\right\| \le \left\|e^{tA}\right\|\,\|x_0\|$$

以上は、$t \to +\infty$ の場合のみ考えているが、$t \to -\infty$ の場合は、不等号の向きを逆にすればよい。

また e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ が有界であるためには、A の固有値がすべて純虚数で、A の最小多項式が重根を持たないことが必要十分である。

2 証明の準備: 行列の指数関数を Jordan 標準形で表す

(桂田 [2] で、A^m, $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ の話をしていて、それと重複する部分が多い。)

線形代数で、行列の Jordan 標準形の存在定理を学ぶ。すなわち、任意の $A \in \mathbb{C}^{n\times n} = M(n;\mathbb{C})$ に対して、適当な $P \in GL(n;\mathbb{C})$ が存在して、

$$P^{-1}AP = J$$

となる。ただし J は Jordan 行列である:

$$J = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
& \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
& & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & & \\
& & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& & & & \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
& & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & & & \\
& & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
& & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & & & \lambda_2 & & & & & & \\ \hline
& & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ \hline
& & & & & & & & & & & \lambda_r & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & & & \lambda_r & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & & & & \lambda_r & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & & \lambda_r
\end{array}\right)$$

(何も書いていないところは 0)

$$= J(\lambda_1, n_1) \oplus J(\lambda_2, n_2) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, n_r).$$

($\oplus$ は行列の直和を表す記号である。説明はさぼる。)

ただし、$\lambda\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$ に対して、$J(\lambda,n)$ を次式で定義する (いわゆる Jordan 行列)。

$$J(\lambda,n):=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1\\ \mathbf{0} & & & \lambda\end{pmatrix}\in M(n;\mathbb{C}). \tag{1}$$

任意の自然数 m に対して $A^m=PJ^mP^{-1}$ であるから、$\dfrac{t^m}{m!}A^m=P\left(\dfrac{t^m}{m!}J^m\right)P^{-1}$. 和を取って

$$e^{tA}=Pe^{tJ}P^{-1}.$$

さらに

$$e^{tJ}=e^{tJ(\lambda_1,n_1)}\oplus e^{tJ(\lambda_2,n_2)}\oplus\cdots\oplus e^{tJ(\lambda_r,n_r)}$$

であるから、e^{tJ} を調べるには、$e^{tJ(\lambda,n)}$ を調べればよい。

数学的帰納法により、任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$J(\lambda,n)^m=\begin{pmatrix}\lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \binom{m}{n-1}\lambda^{m-n+1}\\ & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \ddots & \vdots\\ & & \lambda^m & \ddots & \binom{m}{2}\lambda^{m-2}\\ & & & \ddots & \binom{m}{1}\lambda^{m-1}\\ \mathbf{0} & & & & \lambda^m\end{pmatrix}$$

であることが示せる。ゆえに次式が成り立つ

$$e^{tJ(\lambda,n)}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & \dfrac{te^{\lambda t}}{1!} & \dfrac{t^2e^{\lambda t}}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\\ & e^{\lambda t} & \dfrac{te^{\lambda t}}{1!} & \ddots & \vdots\\ & & e^{\lambda t} & \ddots & \dfrac{t^2e^{\lambda t}}{2!}\\ & & & \ddots & \dfrac{te^{\lambda t}}{1!}\\ \mathbf{0} & & & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

以下 $J=J(\lambda,n)$ の場合に e^{tJ} の漸近挙動を調べる。

(1) $\operatorname{Re}\lambda<0$ であれば、任意の $k\in\{1,\cdots,n\}$ に対して

$$\left|\frac{t^ke^{\lambda t}}{(k-1)!}\right|=\frac{|t|^ke^{(\operatorname{Re}\lambda)t}}{(k-1)!}\to 0\quad(t\to+\infty)$$

であるから

$$\lim_{t\to+\infty}e^{tJ}=0.$$

(これから定理 1.1 の (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つことが分かる。)

特に $\operatorname{Re}\lambda<0$ であれば e^{tJ} は有界である。

(2) $\operatorname{Re}\lambda>0$ であれば、$\boldsymbol{e}:=(1,0,\cdots,0)^\top\in\mathbb{R}^n$ とおくとき

$$e^{tJ}\boldsymbol{e}=e^{tJ}\text{ の第 1 列}=(e^{\lambda t},0,\cdots,0)^\top,\quad \left\|e^{tJ}\boldsymbol{e}\right\|=\left|e^{\lambda t}\right|=e^{\operatorname{Re}\lambda t}\to+\infty.$$

特に e^{tJ} $(t\in[0,\infty))$ は有界でない (有界とすると、すぐ矛盾が導ける)。

対偶を取ると「e^{tJ} $(t\in[0,\infty))$ が有界ならば、$\operatorname{Re}\lambda\le 0$」。

(3) $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ とする。$n=1$ であれば (1 次正方行列つまりはタダの数の話で)

$$e^{tJ} = \left(e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t}, \quad \left\|e^{tJ}\right\| = e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t} = e^{0\cdot t} = 1 \quad (\text{ゆえに有界}).$$

一方、$n \geq 2$ であれば、$\boldsymbol{e} := (0,1,0,\cdots,0)^\top$ とおくとき

$$e^{tJ}\boldsymbol{e} = e^{tJ} \text{ の第 2 列} = \left(te^{\lambda t}, e^{\lambda t}, 0, \cdots, 0\right)^\top$$

であるから

$$\left\|e^{tJ}\boldsymbol{e}\right\| = \sqrt{1+t^2}e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} = \sqrt{1+t^2} \to +\infty \quad (t \to +\infty).$$

特に e^{tJ} $(t \in [0,\infty))$ は有界でない。

3 定理の証明

それでは、定理 1.1, 定理 1.3, 定理 1.5 を証明しよう (前節までで状況は十分把握出来て、証明できた気になっている人もいるだろうが、念のため整理しておくということ)。

$A = J(\lambda, n)$ の場合に証明すれば良い。

定理 1.1 の証明 前節の (1) で、(ii)⇒(i) の証明は済んでいる。

以下 (i) が成り立つとき、(ii) が成り立つことを背理法で示そう。(ii) が成り立たないと仮定すると、$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ または $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ であるが、$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ のときは前節の (2) より、$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ のときは前節の (3) の後半より、$e^{tJ}x_0 \to 0$ を満たさない x_0 の存在が導ける。ゆえに (i) は成り立たない。これは矛盾であるから、(ii) が成り立つ。■

定理 1.3 の証明 (i) ⇒ (ii) を示そう。e^{tJ} が有界と仮定する。$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ ならば前節の (2) により e^{tJ} が非有界となり矛盾するので、$\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ である。すなわち (ii) の (a) が成り立つ。(ii) の (b) を背理法で示そう。(ii) の (b) が成り立たないと仮定する。つまり $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ であり、$n \geq 2$. このとき前節 (3) の後半より e^{tJ} は有界でない。これは (i) と矛盾するから、(ii) の (b) が成り立つ。

(ii)⇒(i) を示そう。(ii) の (a), (b) が成り立つとする。

- $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ ならば、(1) より $e^{tJ} \to 0$. 特に e^{tJ} は有界である。
- $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ で、$n = 1$ ならば、(3) で示したように $e^{tJ} = e^{\lambda t}$, $\left\|e^{tJ}\right\| = 1$. ゆえに e^{tJ} は有界である。

いずれの場合も (i) が成り立つ。■

定理 1.5 の証明 定理 1.3 の条件 (ii) が成り立たないとする。すなわち、$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ であるか、$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ かつ $n \geq 2$.

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ のときは前節の (2) より、$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ かつ $n \geq 2$ のときは前節の (3) より、$\left\|e^{tJ}\boldsymbol{e}\right\| \to +\infty$ を満たす $\boldsymbol{e}$ の存在が導かれた。このとき

$$x_0 := P\boldsymbol{e}$$

とおくと

$$e^{tA}x_0 = Pe^{tJ}P^{-1}P\boldsymbol{e} = Pe^{tJ}\boldsymbol{e}, \quad \left\|e^{tA}x_0\right\| \geq \left\|P^{-1}\right\|^{-1}\left\|e^{tJ}\boldsymbol{e}\right\| \to +\infty.$$

(念のため: $y = Px$ のとき $x = P^{-1}y$ であるから、$\|x\| \le \|P^{-1}\| \|y\|$. ゆえに $\|y\| \ge \|P^{-1}\|^{-1} \|x\|$.) 以上で、前半部分が証明できた。

後半は "明らか" と思う人が多いと思われるが、念のため書いておく。$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}z_0\right\| = +\infty$ を満たす $z_0 \in \mathbb{C}^n$ を取る。

$$\overline{e^{tA}z_0} = \overline{e^{tA}}\ \overline{z_0} = e^{tA}\ \overline{z_0}$$

であるから

$$\left\|e^{tA}\overline{z_0}\right\| = \left\|\overline{e^{tA}z_0}\right\| = \left\|e^{tA}z_0\right\| \to +\infty \quad (t \to +\infty).$$

$$x_0 := \operatorname{Re} z_0 = \frac{1}{2}(z_0 + \overline{z_0}), \quad y_0 := \operatorname{Im} z_0 = \frac{1}{2i}(z_0 - \overline{z_0})$$

とおくと、$x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ である。さらに

$$e^{tA}z_0 = e^{tA}(x_0 + iy_0) = e^{tA}x_0 + ie^{tA}y_0$$

であるから、

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}x_0\right\| = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tA}y_0\right\| = +\infty$$

の少なくとも一方が成立する。■

参考文献

[1] 杉浦光夫, 横沼健雄：Jordan 標準形・テンソル代数, 岩波書店 (1990), この前半は、杉浦光夫, Jordan 標準形と単因子論 I, II, 岩波講座 基礎数学 (1976,1977) が元になっている。

[2] 桂田祐史：発展系の数値解析の続き, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0-add.pdf (1997 年〜).