

微分作用素の固有値問題

桂田 祐史

2010年12月20日～2016年12月17日

目次

1	はじめに	3
2	1次元 Laplacian の固有値問題	3
2.1	微分方程式 $-u''(x) = \lambda u(x)$ の一般解	3
2.2	微分作用素 $-d^2/dx^2$ の対称性	4
2.3	Dirichlet 境界条件	6
2.4	Neumann 境界条件	6
2.5	周期境界条件 (periodic boundary condition)	6
2.6	Dirichlet-Neumann 境界条件	6
2.7	Neumann-Dirichlet 境界条件	7
2.8	Robin 境界条件	7
3	行列の固有値についての準備	8
3.1	記号	8
3.2	J のスペクトル解析	8
4	1次元 Laplacian の固有値問題の差分解	10
4.1	両側 Dirichlet 境界条件	10
4.1.1	差分方程式	10
4.1.2	差分解	11
4.1.3	MATLAB プログラム	11
4.2	両側 Neumann 境界条件	12
4.2.1	差分方程式	12
4.2.2	差分解	13
4.2.3	(4.4), (4.5) をどうやって発見したか	13
4.2.4	数値実験	15
4.3	周期境界条件	17
4.4	離散 Fourier 変換との関係	19
5	2次元長方形領域の Laplacian の固有値問題	19
5.1	Dirichlet 境界条件	20
5.2	Neumann 境界条件	20

6	2次元長方形領域の Laplacian の固有値問題の差分解	21
6.1	Dirichlet 境界条件	21
6.2	Neumann 境界条件	21
6.3	MATLAB で実験	23
6.3.1	Dirichlet 境界条件の場合	23
6.3.2	Neumann 境界条件の場合	24
7	2次元円盤領域における Laplacian の固有値問題	25
7.1	準備: Bessel 関数	25
7.2	Dirichlet 境界条件	26
7.3	Neumann 境界条件	27
8	その他の2次元領域における Laplacian の固有値問題	27
9	2次元 Laplacian の固有値問題を FreeFem++ で解く	27
10	1次元重 Laplacian の固有値問題	28
10.1	問題の由来	28
10.2	微分方程式 $v''''(x) = \lambda v(x)$ の一般解	30
10.3	準備: 超越方程式 $\cos \nu\pi - 1/\cosh \nu\pi = 0$ の解	30
10.4	Dirichlet 境界条件 (両端固定)	31
10.5	固定境界条件	32
10.6	単純支持境界条件	33
10.7	両端が自由な棒	34
10.7.1	領域が $(0, 1)$ の場合	34
10.7.2	領域が $(-1, 1)$ の場合	36
10.8	数値実験 (1) 両端を固定された長さ π の棒	37
10.9	数値実験 (2) 両端が自由な長さ π の棒	37
10.10	数値実験 (3) 両端が自由な長さ 1 の棒	40
11	2次元重ラプラシアン固有値問題	41
11.1	板の振動	41
11.2	文献探し	41
11.3	長方形領域	42
11.4	円盤領域	42
11.5	変分法の議論	43
A	2次元 Neumann	43
A.1	準備	43
A.2	Neumann 境界条件のもとでの Laplacian の固有値	44
A.3	おまけ	46
B	対称行列の固有値問題	47
B.1	線形写像の行列	47
B.2	対称な線形変換	48
B.3	対称変換の固有値問題	49
B.4	対称行列の固有値問題	49
B.5	おまけ: 固有値・固有ベクトルの存在	50

一部だぶったりしている。

1 はじめに

微分作用素の固有値問題については、これまであちこちで扱ってきたが、昨年 (2010 年) に重ラプラシアン Δ^2 の固有値問題に興味を持ったのがきっかけで、独立したノートの必要性が感じられるようになって来た。この文書は、まずはこれまであちこちに書き散らしたものを集める形でスタートするが、将来的にはこれだけで筋の通ったものにするよう努力したい。

この文書では、微分作用素の固有値問題と、それを数値計算でどのように解くかについて説明するが、行列の固有値問題のアルゴリズムについては、既にある文書に任せることにする。

- 桂田 [1] (2006~)
- 桂田 [2] (2003~)

2 1次元 Laplacian の固有値問題

偏微分方程式の入門講義で良く問題のネタになる。さすがに証明を書く必要はあまりないと思うが、<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/pde/> を探せば出て来るであろう。

2.1 微分方程式 $-u''(x) = \lambda u(x)$ の一般解

与えられた $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、微分方程式

$$(2.1) \quad -u''(x) = \lambda u(x)$$

は定数係数線形常微分方程式で、特性方程式は (特性根を s として) $s^2 = \lambda$ であるから、特性根は $s = \pm\sqrt{\lambda}$ で、一般解は、

(a) $\lambda = 0$ の場合

$$u(x) = C_1 + C_2 x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(b) $\lambda \neq 0$ の場合

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

この後明らかになるように、境界条件によっては、 $\lambda \geq 0$ が導かれるので、 $\omega := \sqrt{\lambda}$ で $\omega \geq 0$ を定めると、(2.1) は

$$u''(x) = -\omega^2 u(x)$$

となる。これは $\omega \neq 0$ であれば有名な単振動の方程式で、(これもまた有名な)

$$u(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

という一般解を持つことが分かる。

2.2 微分作用素 $-d^2/dx^2$ の対称性

$$A := -\frac{d^2}{dx^2}$$

とおく。適当な境界条件のもとで、 A がある種の対称性を持つことを示す。

$I = (a, b)$ で考えているとき、 $\varphi, \psi \in L^2(I)$ に対して、

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

と定める。

例えば $\varphi, \psi \in C^2(\bar{I})$ が両側 Dirichlet 境界条件

$$(2.2) \quad \varphi(a) = \varphi(b) = \psi(a) = \psi(b) = 0$$

を満たすとき、

$$(2.3) \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle$$

が成り立つ (対称性)。実際

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= - \int_a^b \varphi''(x) \overline{\psi(x)} dx = - \left[\varphi'(x) \overline{\psi(x)} \right]_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \left(\overline{\psi(x)} \right)' dx \\ &= \int_a^b \varphi'(x) \overline{\psi'(x)} dx = \left[\varphi(x) \overline{\psi'(x)} \right]_a^b - \int_a^b \varphi(x) \left(\overline{\psi'(x)} \right)' dx \\ &= - \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi''(x)} dx = \langle \varphi, A\psi \rangle. \end{aligned}$$

ここで

$$(2.4) \quad \left[\varphi'(x) \overline{\psi(x)} \right]_a^b = 0$$

となるのは $\psi(a) = \psi(b) = 0$ により、

$$(2.5) \quad \left[\varphi(x) \overline{\psi'(x)} \right]_a^b = 0$$

となるのは $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ による。

対称性から、固有値が実数であることと、固有関数の直交性が得られる。実際、 $A\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$ ならば、

$$\lambda\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle\lambda\varphi, \varphi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi, A\varphi\rangle = \langle\varphi, \lambda\varphi\rangle = \bar{\lambda}\langle\varphi, \varphi\rangle$$

であるから、 $\langle\varphi, \varphi\rangle (\neq 0)$ で割って $\lambda = \bar{\lambda}$. すなわち $\lambda \in \mathbb{R}$.

一方、 $A\varphi = \mu\varphi$, $A\psi = \nu\psi$, $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$, $\mu \neq \nu$ とするとき、

$$\mu\langle\varphi, \psi\rangle = \langle\mu\varphi, \psi\rangle = \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, A\psi\rangle = \langle\varphi, \nu\psi\rangle = \bar{\nu}\langle\varphi, \psi\rangle = \nu\langle\varphi, \psi\rangle$$

であるから、 $(\mu - \nu)\langle\varphi, \psi\rangle = 0$ が成り立つので、 $\mu - \nu \neq 0$ で割って、 $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$.

また、対称性を導く式変形を途中で止めると、

$$(2.6) \quad \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi', \psi'\rangle.$$

これから $A\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$ とするとき、

$$\lambda\langle\varphi, \varphi\rangle = \langle\lambda\varphi, \varphi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi', \varphi'\rangle \geq 0$$

であるから、両辺を $\langle\varphi, \varphi\rangle > 0$ で割って、 $\lambda \geq 0$. すなわち固有値が非負であることが得られる。

さて、(2.2) を次の境界条件に変えても、(2.3) は成立する。

(a) (両側 Neumann 境界条件) $\varphi'(a) = \varphi'(b) = \psi'(a) = \psi'(b) = 0$.

(2.4) は $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$, (2.5) は $\psi'(a) = \psi'(b) = 0$.

(b) (周期境界受験) $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\varphi'(a) = \varphi'(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$, $\psi'(a) = \psi'(b)$.

(2.4) は $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ と $\psi(a) = \psi(b)$, (2.5) は $\varphi(a) = \varphi(b)$ と $\psi'(a) = \psi'(b)$.

(c) (Dirichlet-Neumann 境界条件) $\varphi(a) = \varphi'(b) = \psi(a) = \psi'(b) = 0$.

(2.4) は $\psi(a) = 0$ と $\varphi'(b) = 0$, (2.5) は $\varphi(a) = 0$ と $\psi'(b) = 0$.

(d) (Neumann-Dirichlet 境界条件) $\varphi'(a) = \varphi(b) = \psi'(a) = \psi(b) = 0$.

(2.4) は $\varphi'(a) = 0$ と $\psi(b) = 0$, (2.5) は $\psi'(a) = 0$ と $\varphi(b) = 0$.

(e) (Robin 境界条件) $-\varphi'(a) + \gamma_1\varphi(a) = \varphi'(b) + \gamma_2\varphi(b) = -\psi'(a) + \gamma_1\psi(a) = \psi'(b) + \gamma_2\psi(b) = 0$.
見通し良く証明するため、少し工夫をする。

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = [\varphi'\psi]_a^b - [\varphi\psi']_a^b + \langle\varphi, A\psi\rangle$$

であるが、

$$\begin{aligned} [\varphi'\psi]_a^b - [\varphi\psi']_a^b &= \varphi'(b)\psi(b) - \varphi'(a)\psi(a) - \varphi(b)\psi'(b) + \varphi(a)\psi'(a) \\ &= \begin{vmatrix} \varphi'(b) & \psi'(b) \\ \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi'(a) & \psi'(a) \\ \varphi(a) & \psi(a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varphi'(b) + \gamma_2\varphi(b) & \psi'(b) + \gamma_2\psi(b) \\ \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi'(a) - \gamma_1\varphi(a) & \psi'(a) - \gamma_1\psi(a) \\ \varphi(a) & \psi(a) \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

2.3 Dirichlet 境界条件

$$\begin{aligned}(\text{EPD}_1) \quad & -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u(0) = u(1) = 0. \\ & \lambda = \lambda_n := n^2 \pi^2, \quad u(x) = \varphi_n(x) := \sin n\pi x \quad (n \in \mathbb{N}). \\ & \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nm}.\end{aligned}$$

2.4 Neumann 境界条件

$$\begin{aligned}(\text{EPN}_1) \quad & -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u'(0) = u'(1) = 0. \\ & \lambda = \mu_n := n^2 \pi^2, \quad u(x) = \psi_n(x) := \cos n\pi x \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \\ & \langle \psi_n, \psi_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nm}.\end{aligned}$$

2.5 周期境界条件 (periodic boundary condition)

$$\begin{aligned}(\text{EPP}_1) \quad & -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \\ & \nu_0 := 0, \quad \nu_{2n-1} = \nu_{2n} := 4n^2 \pi^2, \\ & \zeta_0(x) := 1, \quad \zeta_{2n-1}(x) := \sin 2n\pi x, \quad \zeta_{2n}(x) := \cos 2n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

固有値は ν_0 を除くと重根であるから、 $\{\zeta_n\}_{n \geq 0}$ の直交性は明らかではない。実際に計算するなどして確認する必要がある。

$$\langle \zeta_n, \zeta_m \rangle = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{1}{2} & (n = m \neq 0) \\ 1 & (n = m = 0). \end{cases}$$

2.6 Dirichlet-Neumann 境界条件

$$\begin{aligned}(\text{EPDN}_1) \quad & -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u(0) = u'(1) = 0. \\ & \lambda = \rho_n := (n - 1/2)^2 \pi^2, \quad u(x) = \xi_n(x) := \sin [(n - 1/2) \pi x] \quad (n \in \mathbb{N}). \\ & \langle \xi_n, \xi_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nm}.\end{aligned}$$

2.7 Neumann-Dirichlet 境界条件

$$(EPND_1) \quad -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

$$\lambda = \rho_n := (n - 1/2)^2 \pi^2, \quad u(x) = \eta_n(x) := \cos [(n - 1/2) \pi x] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\langle \eta_n, \eta_m \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nm}.$$

2.8 Robin 境界条件

$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ とする。

$$(EPR_1) \quad -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad -u'(0) + \gamma_1 u(0) = u'(1) + \gamma_2 u(1) = 0.$$

よくある議論で $\lambda > 0$ であることが分かる。この微分方程式の一般解は

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

である。境界条件に代入して

$$-\sqrt{\lambda} B + \gamma_1 A = 0, \quad \sqrt{\lambda} (-A \sin \sqrt{\lambda} + B \cos \sqrt{\lambda}) + \gamma_2 (A \cos \sqrt{\lambda} + B \sin \sqrt{\lambda}) = 0.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \gamma_2 \cos \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \gamma_2 \sin \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

非自明解を持つために

$$(2.7) \quad 0 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \gamma_2 \cos \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \gamma_2 \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \\ = (\gamma_1 \gamma_2 - \lambda) \sin \sqrt{\lambda} + (\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}.$$

これは $\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}$ のとき、

$$(2.8) \quad \tan \sqrt{\lambda} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{\lambda}}{\lambda - \gamma_1 \gamma_2}$$

に同値である。一方 $\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \in \frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}$ のときは、

$$\lambda = \gamma_1 \gamma_2 \quad \text{または} \quad \tan \sqrt{\lambda} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{\lambda}}{\lambda - \gamma_1 \gamma_2}.$$

(2.8) の場合、正の解全体は

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$$

と並べることが出来、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda_n - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \right| = 0$$

であることが分かる。 $\lambda = \lambda_n$ のとき、(2.8) の解は、

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0).$$

対応する固有関数は

$$X(x) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x + \gamma_1 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

固有値の近似値を求め、固有関数のグラフの概形を描くのは簡単である。

Mathematica で遊ぶ

```
gamma1=1
gamma2=1
solnear[x0_]:=FindRoot[Tan[x]-(gamma1+gamma2)*x/(x-gamma1*gamma2)==0,
  {x,x0},WorkingPrecision->20,AccuracyGoal->40]
rootlambda[1]= x /. solnear[1.5]
rootlambda[n_]:=rootlambda[n]=x /. solnear[rootlambda[n-1]+Pi]
Table[rootlambda[n],{n,10}]
eigenfunc[n_]:=Plot[rootlambda[n]*Cos[rootlambda[n]*x]
  +gamma1*Sin[rootlambda[n]*x],{x,0,1}]
```

γ_1, γ_2 が小さい時に Neumann 境界条件に近いが、 γ_1, γ_2 が大きい時に Dirichlet 境界条件に近いかなどなど、研究に値すると思う。

3 行列の固有値についての準備

3.1 記号

この文書では、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 次の単位行列を I_n で、($n \geq 2$ のとき) 対角線の両隣の成分のみが 1 で他の成分が 0 である n 次正方行列を J_n で表す:

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 J のスペクトル解析

行列 $J = J_{N-1}$ の固有値、固有ベクトルは次のように完全に求まる。

命題 3.1 任意の $N \geq 3$ に対して、 $J_{N-1} \in M_{N-1}(\mathbb{R})$ の固有値、固有ベクトルは、

$$2 \cos n\pi h, \quad \mathbf{v}_n = (\sin n\pi x_1, \dots, \sin n\pi x_{N-1})^T \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

である。ただし

$$h = \frac{1}{N}, \quad x_j = jh \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

この命題の証明を直接行うことも出来るが¹、それ自身明快な意味を持つ次の命題を足掛か

¹ さわりの部分は $\sin \frac{(j-1)n\pi}{N} + \sin \frac{(j+1)n\pi}{N} = 2 \cos \frac{n\pi}{N} \sin \frac{jn\pi}{N}$.

(2016/12/17 追記) L_{N-1} は実対称行列であるから、相異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する。ゆえに $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N-1}$ は直交系である (これが「選点直交性」というやつかな?)。正規化したくなる。 $\omega := e^{2\pi i/N}$ が 1 の原始 N 乗根であることから、 $m \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 m\pi x_k &= 0 + \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 m\pi x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2 m\pi x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e^{im\pi x_k} - e^{-im\pi x_k}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{2m\pi x_k} + e^{-2m\pi x_k} - 2) = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{mk} + \omega^{-mk} - 2) \\ &= -\frac{1}{4} (0 + 0 - 2N) = \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに $\|\mathbf{v}_m\| = \sqrt{N/2}$.

$$P := \sqrt{\frac{2}{N}} (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_{N-1}) \quad \text{すなわち} \quad p_{mk} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{mk\pi}{N} \quad (m, k \in \{1, 2, \dots, N-1\})$$

とおくと、 P は実直交行列で

$$P^T L_{N-1} P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}).$$

命題 3.1 の証明 $J_{N-1} = 2I_{N-1} - L_{N-1}$ であるから、

$$\mu_n := 2 - \lambda_n = 2 - 4 \sin^2 \frac{n\pi h}{2} = 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{n\pi h}{2} \right) = 2 \cos n\pi h$$

とおくと、

$$\begin{aligned} J_{N-1} \mathbf{v}_n &= (2I_{N-1} - L_{N-1}) \mathbf{v}_n = 2I_{N-1} \mathbf{v}_n - L_{N-1} \mathbf{v}_n = 2\mathbf{v}_n - \lambda_n \mathbf{v}_n = (2 - \lambda_n) \mathbf{v}_n \\ &= \mu_n \mathbf{v}_n \quad (n = 1, 2, \dots, N-1). \blacksquare \end{aligned}$$

4 1次元 Laplacian の固有値問題の差分解

4.1 両側 Dirichlet 境界条件

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

4.1.1 差分方程式

(EPD₁) を素直に離散化すると、次の行列の固有値問題が現れる。

$$(4.1) \quad \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

ただし $h := \frac{1}{N}$ である。

$$L_{N-1} := \frac{1}{h^2} (2I_{N-1} - J_{N-1}), \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$(4.2) \quad L_{N-1} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

4.1.2 差分解

実は、行列 L_{N-1} の固有値問題 (4.2) は、補題 3.2(p.9) で解決済みである。固有値、固有ベクトルは

$$\lambda_n = \left(\frac{\sin(n\pi h/2)}{h/2} \right)^2, \quad \mathbf{v}_n = (\sin n\pi x_1, \dots, \sin n\pi x_{N-1})^T \quad (n = 1, 2, \dots, N-1).$$

$\|\mathbf{v}_n\| = \sqrt{N/2}$ であるから

$$P := \sqrt{\frac{2}{N}} (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_{N-1}) \quad \text{すなわち} \quad p_{mk} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{mk\pi}{N} \quad (m, k \in \{1, 2, \dots, N-1\})$$

とおくと、 P は実直交行列で

$$P^T L_{N-1} P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}).$$

(EPD₁) の固有値・固有関数は

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad \varphi_n(x) = \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられることを思い出すと、

(EPD₁) を差分法ですなおいに離散化して得られた固有値問題の固有関数は、
もとと同じく $\sin n\pi x$ である

ということを主張していることになる。このことを理解すると、上の補題の主張の後半 (\mathbf{v}_n が固有ベクトルになること) は覚えやすいであろう。なお、番号 n が小さいときに、対応する固有値も良い近似になっている。このこともチェックしておこう。特に $n \in \mathbb{N}$ を固定したとき、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_n = n^2 \pi^2$$

である。

4.1.3 MATLAB プログラム

```
laplacian1DD
% 1次元 Laplacian, Dirichlet 境界条件の差分近似
function a=laplacian1DD(N)
    h=1/N;
    n=N-1;
    a=2*eye(n,n)-diag(ones(n-1,1),1)-diag(ones(n-1,1),-1);
```

```
plot1DD.m
```

```
% 1次元 Laplacian, Dirichlet 境界条件の固有関数の描画
function plot1DD(v)
    [n,dummy]=size(v);
    N=n+1;
    u=zeros(N+1,1);
    u(2:N)=v;
    x=0:1/N:1;
    plot(x,u);
```

この2つの関数を用意しておいて、例えば次のように用いる。

区間

```
a=laplacian1DD(100);
eig(a)
[v,p]=eig(a);
plot1DD(v(:,1))
```

区間 $(0,1)$ を 100 等分した場合の差分近似の行列を a とし、そのすべての固有値を表示した後、固有値を p , 固有ベクトルを v に代入して、最後の `plot1DD(v(:,1))` で、第1固有関数のグラフを描いている。

4.2 両側 Neumann 境界条件

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

4.2.1 差分方程式

仮想格子点近似を用いると、

$$(4.3) \quad \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

という行列の固有値問題を得る。この行列が対称でないので、少し工夫をする。

$$(4.4) \quad \mathcal{L}_{N+1} := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & & & \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ & & & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \in M(N+1; \mathbb{R}), \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} U_0/\sqrt{2} \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおくと、(4.3) は

$$(4.5) \quad \mathcal{L}_{N+1} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

と同値である。つまり対称行列の固有値問題に変換されたわけである。

4.2.2 差分解

\mathcal{L}_{N+1} の固有値、固有ベクトルは、

$$\lambda_n = \left(\frac{\sin(n\pi h/2)}{h/2} \right)^2, \quad \mathbf{v}_n = \left(\frac{\cos n\pi x_0}{\sqrt{2}}, \cos n\pi x_1, \dots, \cos n\pi x_{N-1}, \frac{\cos n\pi x_N}{\sqrt{2}} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

$\cos n\pi x_0 = \cos 0 = 1$, $\cos n\pi x_N = \cos n\pi = (-1)^n$ であるから、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_n\|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 n\pi x_k + \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 n\pi x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2 n\pi x_k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e^{in\pi x_k} + e^{-in\pi x_k}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{nk} + \omega^{-nk} + 2) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} (N + N + 2N) = N & (n \equiv 0) \\ \frac{1}{4} (0 + 0 + 2N) = \frac{N}{2} & (n \not\equiv 0). \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} P &:= \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_{N-1} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_N \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \pi x_1 & \cos 2\pi x_1 & \cdots & \cos(N-1)\pi x_1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \pi x_2 & \cos 2\pi x_2 & \cdots & \cos(N-1)\pi x_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \pi x_{N-1} & \cos 2\pi x_{N-1} & \cdots & \cos(N-1)\pi x_{N-1} & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{2}} & \frac{(-1)^N}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくと

$$P^T \mathcal{L}_{N+1} P = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

P は $(N+1)$ 次の正方行列で、 (m, k) 成分 ($m, k \in \{0, 1, \dots, N\}$) を p_{mk} と表すとき

$$p_{mk} = \frac{1}{\sqrt{2}^{r+s}} \cos \frac{mk\pi}{n}, \quad r = \begin{cases} 1 & (m=0 \text{ または } m=N) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \quad s = \begin{cases} 1 & (k=0 \text{ または } k=N) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

4.2.3 (4.4), (4.5) をどうやって発見したか

(4.3) は

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$A'u = \lambda Bu$$

という一般化固有値問題に書き換えられる。標準固有値問題ではなくなってしまったが、現れる行列が対称になったのが良いところである。

しかも B はいわゆる正値対称行列であるので、その Cholesky 分解を用いて、標準固有値問題に帰着するという定跡手順を辿ることができる。

以下、それを実行しよう。

$$U := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$B = U^T U$$

が成り立つ。これは B をいわゆる Cholesky 分解をしたことになる。 U^T の逆行列を左からかけると、

$$(U^T)^{-1} A'u = \lambda Uu.$$

$(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$, $I = U^{-1}U$ であるから、

$$(U^{-1})^T A'U^{-1}Uu = \lambda Uu.$$

$$A := (U^{-1})^T A'U^{-1}, \quad v := Uu$$

とおくことで、

$$Av = \lambda v.$$

A' が対称であるから、 $A = (U^{-1})^T A'U^{-1}$ も対称であるのは明らかであるが、実際に、

$$\begin{aligned} A &= (U^{-1})^T A'U^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & & & \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ & & & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \\ v = Uu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0/\sqrt{2} \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.4 数値実験

laplacian1DN.m

```
% 1次元 Laplacian, Neumann 境界条件の差分近似の行列
function a=laplacian1DN(N)
    h=1/N;
    n=N+1;
    a=2*eye(n,n)-diag(ones(n-1,1),1)-diag(ones(n-1,1),-1);
    a(1,2)=-2;
    a(n,n-1)=-2;
```

laplacian1DNs.m

```
% 1次元 Laplacian, Neumann 境界条件の差分近似の行列, 対称行列版
function a=laplacian1DNs(N)
    h=1/N;
    n=N+1;
    a=2*eye(n,n)-diag(ones(n-1,1),1)-diag(ones(n-1,1),-1);
    a(1,2)=-sqrt(2);
    a(2,1)=-sqrt(2);
    a(n-1,n)=-sqrt(2);
    a(n,n-1)=-sqrt(2);
```

plot1DNs.m

```
% plot1DNs.m --- グラフを描く
function plot1DNs(v)
    [n,dummy]=size(v);
    N=n-1;
    x=0:1/N:1;
    v(1)=sqrt(2)*v(1);
    v(N+1)=sqrt(2)*v(N+1);
    plot(x,v);
```

区間を 10 等分して計算

```
>> N=10;  
>> a=laplacian1DNs(N);  
>> [v,p]=eig(a)
```

ans =

```
-0.0000  
 0.0979  
 0.3820  
 0.8244  
 1.3820  
 2.0000  
 2.6180  
 3.1756  
 3.6180  
 3.9021  
 4.0000
```

```
>> plot1DNs(v(:,1))  
>> plot1DNs(v(:,2))
```

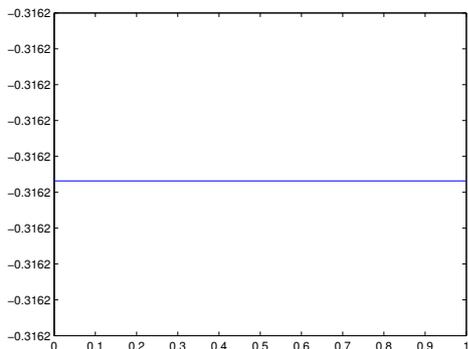


図 1: 最小固有値 $\lambda_1 = 0$ に属する固有関数

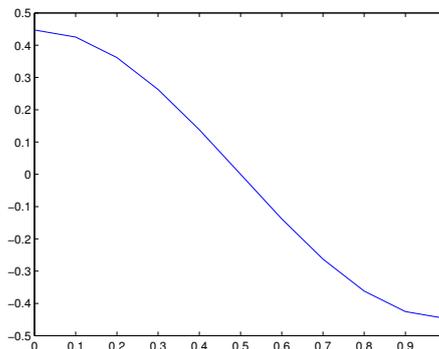


図 2: λ_2 に属する固有関数

注意 4.1 (4.3) のまま MATLAB で計算してみても、まともな計算結果が得られない (これはやってみることをおすすめする)。非対称であり、かつ 0 が固有値であることが難しくしているのであろう (と考えているが、自信があるわけではない)。むしろ、境界での導関数を

$$u'(0) \doteq \frac{u(h) - u(0)}{h}, \quad u'(1) \doteq \frac{u(1) - u(1-h)}{h}$$

のように前進差分、後退差分近似して得られる

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$$

の方が ($u'(0)$, $u'(1)$ の近似の精度は低いはずであるが) 良い結果を得ることが出来る。これは行列が対称になったからであろう。 ■

4.3 周期境界条件

(ここは工事中。未整理状態。忙しいので何もしなくて蒸発するよりは良いだろう。)

$N \in \mathbb{N}$ に対して $h = \frac{2\pi}{N}$, $x_k = kh$,

$$\tilde{A} := \frac{1}{h^2} A, \quad A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq N/2$ に対して

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \cos(nx_0) \\ \cos(nx_1) \\ \vdots \\ \cos(nx_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sin(nh/2)}{h/2} \right)^2 = \left(\frac{\sin(n\pi/N)}{\pi/N} \right)^2,$$

$n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq N/2$ に対して

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \sin(nx_0) \\ \sin(nx_1) \\ \vdots \\ \sin(nx_{N-1}) \end{pmatrix}$$

とおく。

$$A\mathbf{u}_n = \lambda_n \mathbf{u}_n, \quad A\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n$$

が成り立つ。

命題 4.2 (1) つねに $E(\lambda_0) = \langle \mathbf{u}_0 \rangle$.

$$\|\mathbf{u}_n\| = \begin{cases} \sqrt{N} & (n = 0 \text{ であるか、または } N \text{ が偶数で } n = N/2) \\ \sqrt{\frac{N}{2}} & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

$$\|\mathbf{v}_n\| = \begin{cases} 0 & (N \text{ が偶数で } n = N/2) \\ \sqrt{\frac{N}{2}} & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

(2) N が奇数のとき、 $1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$ に対して、

$$\dim E(\lambda_k) = 2, \quad E(\lambda_k) = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \rangle.$$

そして $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_{\frac{N-1}{2}}, \mathbf{v}_{\frac{N-1}{2}}$ が \mathbb{R}^N の直交基底である。

(3) N が偶数のとき、 $1 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ に対して、

$$\dim E(\lambda_k) = 2, \quad E(\lambda_k) = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \rangle.$$

$$\dim E(\lambda_{\frac{N}{2}-1}) = 1, \quad E(\lambda_{\frac{N}{2}-1}) = \langle \mathbf{u}_{\frac{N}{2}-1} \rangle.$$

そして $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_{\frac{N}{2}-1}, \mathbf{v}_{\frac{N}{2}-1}, \mathbf{u}_{\frac{N}{2}}$ が \mathbb{R}^N の直交基底である。

証明

(1) 任意の n に対して、 \mathbf{u}_n の第 0 成分は 1 であるから、 $\mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$ 。

任意の n ($1 \leq n < N/2$) に対して、 $0 < n \cdot \frac{2\pi}{N} < \frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{N} = \pi$ であるから、 \mathbf{v}_n の第 1 成分 $\sin(n\frac{2\pi}{N}) \neq 0$ 。ゆえに $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ 。 \mathbf{v}_n の第 0 成分は 0 であるから、 \mathbf{u}_n と \mathbf{v}_n は 1 次独立である。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(nx_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e^{inx_k} + e^{-inx_k}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i2nx_k} + e^{-i2nx_k} + 2) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{2nk} + \omega^{-2nk} + 2). \end{aligned}$$

特に $\|\mathbf{u}_0\|^2 = N$ はすぐ分かる。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_n\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(nx_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e^{inx_k} - e^{-inx_k}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i2nx_k} + e^{-i2nx_k} - 2) \\ &= \frac{-1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{2nk} + \omega^{-2nk} - 2). \end{aligned}$$

• N が奇数であれば、 $n \geq 1$ に対して $\omega^{2n} \neq 1$ であるから

$$\|\mathbf{u}_n\|^2 = \frac{N}{2}, \quad \|\mathbf{v}_n\|^2 = \frac{N}{2}.$$

• N が偶数であれば、 $1 \leq n \leq N/2 - 1$ のとき、 $\omega^{2n} \neq 1$ であるから、

$$\|\mathbf{u}_n\|^2 = \frac{N}{2}, \quad \|\mathbf{v}_n\|^2 = \frac{N}{2}.$$

$n = N/2$ のとき、 $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{N/2}$ の第 k 成分は $\sin\left(\frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}k\right) = \sin(k\pi) = 0$ であるから、 $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. $\omega^{2n} = 1$ であるから

$$\|\mathbf{u}_n\|^2 = \frac{1}{4}(1 + 1 + 2) = N.$$

(2) N が奇数であれば

$$0 = \frac{0 \cdot \pi}{N} < \frac{1 \cdot \pi}{N} < \dots < \frac{(N-1)/2 \cdot \pi}{N} < \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\frac{N-1}{2}}.$$

(3) N が偶数であれば

$$0 = \frac{0 \cdot \pi}{N} < \frac{1 \cdot \pi}{N} < \dots < \frac{(N/2-1) \cdot \pi}{N} < \frac{(N/2) \cdot \pi}{N} = \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\frac{N}{2}}.$$

■

N が奇数であれば

$$P := \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_{\frac{N-1}{2}} & \mathbf{v}_{\frac{N-1}{2}} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^T A P = \text{diag} \left(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{N-1}{2}}, \lambda_{\frac{N-1}{2}} \right).$$

N が偶数であれば

$$P := \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_{\frac{N}{2}-1} & \mathbf{v}_{\frac{N}{2}-1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$P^T A P = \text{diag} \left(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{N}{2}-1}, \lambda_{\frac{N}{2}-1}, \lambda_{\frac{N}{2}} \right).$$

4.4 離散 Fourier 変換との関係

(準備中)

5 2次元長方形領域の Laplacian の固有値問題

一言でまとめると、1次元問題のテンソル積になっている。

5.1 Dirichlet 境界条件

$\Omega := (0, a) \times (0, b)$ における Laplacian の固有値問題

$$(5.1) \quad -\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega), \quad u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega), \quad u \not\equiv 0.$$

まず、

$$\lambda_{mn} := \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad \varphi_{mn}(x, y) := \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

とおくと、 $\{\varphi_{mn}\}$ は完全系をなし、 φ_{mn} は固有値 λ_{mn} に属する固有関数であることがすぐ分かる。

u が (5.1) の解であるとする。境界条件を満たすなめらかな関数であることから、 $\exists \{b_{mn}\}$ s.t.

$$u(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} b_{mn} \varphi_{mn}(x, y).$$

$-\Delta u = \lambda u$ に代入して、

$$\sum_{m, n} b_{mn} \lambda_{mn} \varphi_{mn}(x, y) = \lambda \sum_{m, n} b_{mn} \varphi_{mn}(x, y).$$

係数を比較して、

$$\forall (m, n) \quad b_{mn} (\lambda_{mn} - \lambda) = 0.$$

これから

$$\{(m, n); b_{mn} \neq 0\} \subset \{(m, n); \lambda_{mn} = \lambda\}.$$

$b_{mn} = 0$ となる項は省略して良いので、

$$u(x, y) = \sum_{b_{mn} \neq 0} b_{mn} \varphi_{mn}(x, y).$$

ゆえに

$$-\Delta$$

5.2 Neumann 境界条件

$\Omega := (0, a) \times (0, b)$ における Laplacian の固有値問題

$$(5.2) \quad -\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega).$$

$$\lambda = \lambda_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad u(x, y) = \psi_{mn}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

6 2次元長方形領域の Laplacian の固有値問題の差分解

6.1 Dirichlet 境界条件

やや天下りであるが、差分方程式から次の行列の固有値問題が導かれる。

$$A = I_{N_y-1} \otimes \left[\frac{1}{h_x^2} (2I_{N_x-1} - J_{N_x-1}) \right] + \left[\frac{1}{h_y^2} (2I_{N_y-1} - J_{N_y-1}) \right] \otimes I_{N_x-1}.$$

元々の固有値問題の解は

$$\lambda = \lambda_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad u(x, y) = \varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

$$h_x := \frac{a}{N_x}, \quad h_y := \frac{b}{N_y},$$

$$\lambda_m := \frac{\left(2 \sin \frac{m\pi h_x}{2} \right)^2}{h_x^2}, \quad \mu_n := \frac{\left(2 \sin \frac{n\pi h_y}{2} \right)^2}{h_y^2} \quad (1 \leq m \leq N_x - 1, 1 \leq n \leq N_y - 1)$$

とおくと、 $\lambda_m + \mu_n$ ($1 \leq m \leq N_x - 1, 1 \leq n \leq N_y - 1$) が A の固有値の全体となる。

6.2 Neumann 境界条件

1次元 Laplacian の Neumann 境界条件下の固有値問題に現れた行列 C を用いる。すなわち、 $C_m \in M(m; \mathbb{R})$ を

$$C_m := \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & & & \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ & & & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

と定める。

$$A := \frac{1}{h_x^2} I_{N_y+1} \otimes C_{N_x+1} + \frac{1}{h_y^2} C_{N_y+1} \otimes I_{N_x+1},$$

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} U_{00}/2 \\ U_{10}/\sqrt{2} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,0}/\sqrt{2} \\ U_{N_x,0}/2 \\ \hline U_{01}/\sqrt{2} \\ U_{11} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,1} \\ U_{N_x,1}/\sqrt{2} \\ \hline U_{02}/\sqrt{2} \\ U_{12} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,2} \\ U_{N_x,2}/\sqrt{2} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{0N_y}/2 \\ U_{1N_y}/\sqrt{2} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,N_y}/\sqrt{2} \\ U_{N_x,N_y}/2 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

要するに長方形の頂点 (四隅) にある格子点に対応する

$$U_{ij} \quad ((i, j) \in V := \{(0, 0), (0, N_y), (N_x, 0), (N_x, N_y)\})$$

は 2 で割り、辺上にあるそれ以外の格子点に対応する

$$U_{ij} \quad ((i, j) \in (\{0, N_x\} \times \{0, \dots, N_y\} \cup \{0, \dots, N_x\} \times \{0, N_y\}) \setminus V)$$

は $\sqrt{2}$ で割る、ということである。

$$\lambda_m := \frac{\left(2 \sin \frac{m\pi h_x}{2}\right)^2}{h_x^2}, \quad h_x := \frac{a}{N_x},$$

$$\mu_n := \frac{\left(2 \sin \frac{n\pi h_y}{2}\right)^2}{h_y^2}, \quad h_y := \frac{b}{N_y}$$

とおくと、 $\lambda_m + \mu_n$ ($0 \leq m \leq N_x, 0 \leq n \leq N_y$) が固有値の全体となる。

6.3 MATLAB で実験

6.3.1 Dirichlet 境界条件の場合

eigp2sp_vec.m

```
% 正方形領域 (0,1) × (0,1)
% Dirichlet 境界条件のラプラシアン固有値
% 小さい方から 6 個求め、それを大きい方から提供する
% [v,d]=eigp2dsp_vec(nx,ny)
% d は 6 次正方形行列で、対角線に固有値が (大きい方から) 並ぶ
% v は、(nx-1)*(ny-1) 行、6 列の行列
% v(:,6) は最小固有値に対応する固有ベクトル
function [v,d]=eigp2dsp_vec(nx,ny)
    hx=1/nx;
    hy=1/ny;
    m=nx-1;
    n=ny-1;
    Im=speye(m,m);
    In=speye(n,n);
    Cm=2*Im-sparse(diag(ones(m-1,1),1)+diag(ones(m-1,1),-1));
    Cn=2*In-sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
    A=kron(In,Cm)/(hx*hx)+kron(Cn,Im)/(hy*hy);
    [v,d]=eigs(A,6,0);
end
```

plotd.m

```
% 正方形領域上の関数の表示
function plotd(v,nx,ny)
    vv=zeros(ny+1,nx+1);
    vvv=zeros(nx-1,ny-1);
    vvv(:)=v;
    vv(2:ny,2:nx)=vvv';
    x=0:1/nx:1;
    y=0:1/ny:1;
% 左側にグラフの鳥瞰図
    subplot(1,2,1);
    colormap hsv;
    mesh(x,y,vv);
% 右側に等高線
    subplot(1,2,2);
    contour(x,y,vv);
end
```

6.3.2 Neumann 境界条件の場合

```
eigp2nsp.m  
% 2次元正方形領域 (0,1) × (0,1)  
% Neumann 境界条件、Laplacian  
% sparse 命令を使う  
% Bug を取りました (2011/6/7)  
% 例: eigs(eigp2nsp(20,20),10,0) 20,20 等分して、固有値を小さい順に 10 個  
function A=eigp2nsp(nx,ny)  
    hx=1/nx;  
    hy=1/ny;  
    m=nx+1;  
    n=ny+1;  
    Im=speye(m,m);  
    In=speye(n,n);  
    Cm=2*Im-sparse(diag(ones(m-1,1),1)+diag(ones(m-1,1),-1));  
    Cm(1,2)=-sqrt(2);  
    Cm(2,1)=-sqrt(2);  
    Cm(m-1,m)=-sqrt(2);  
    Cm(m,m-1)=-sqrt(2);  
    Cn=2*In-sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));  
    Cn(1,2)=-sqrt(2);  
    Cn(2,1)=-sqrt(2);  
    Cn(n-1,n)=-sqrt(2);  
    Cn(n,n-1)=-sqrt(2);  
    A=kron(In,Cm)/(hx*hx)+kron(Cn,Im)/(hy*hy);  
end
```

```

plotn.m
% 正方形領域上の関数の表示 (Neumann 境界条件用)
% 使用例
% [v,d]=eigs(eigp2nsp(nx,ny),10,0); 小さい方から 10 個の固有値、固有関数を求める
% plotn(v(:,10),nx,ny);                最小の固有値に属する固有関数を表示
function plotn(v,nx,ny)
    % vv は ny+1,nx+1
    vvv=zeros(nx+1,ny+1);
    vvv(:)=v;
    vv=vvv';
    vv(1,:)=vv(1,:)*sqrt(2);
    vv(ny+1,:)=vv(ny+1,:)*sqrt(2);
    vv(:,1)=vv(:,1)*sqrt(2);
    vv(:,nx+1)=vv(:,nx+1)*sqrt(2);
    x=0:1/nx:1;
    y=0:1/ny:1;
% 左側にグラフの鳥瞰図
    subplot(1,2,1);
    colormap hsv;
    mesh(x,y,vv);
% 右側に等高線
    subplot(1,2,2);
    contour(x,y,vv);
end

```

7 2次元円盤領域における Laplacian の固有値問題

7.1 準備: Bessel 関数

桂田 [3] にある程度詳しく書いた。

定義 7.1 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、

$$(7.1) \quad J_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

で定められる関数 J_ν を ν 次の (第1種) Bessel 関数 (Bessel's function of order ν) と呼ぶ。

$J_\nu(z) = (\text{整関数}) \times (z/2)^\nu$ という形をしているので、 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で正則な関数が得られる。特に $\nu = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ならば、 $J_\nu = J_n$ 自身が整関数である。

$\nu = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) のとき、 $k = 0, \dots, n-1$ に対して、 $\Gamma(-n+k+1) = \infty$ であるので、

$$J_\nu(z) = J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}$$

$\nu \in \mathbb{C}$ とする。

$$(7.2) \quad J''(r) + \frac{1}{r}J'(r) + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)J(r) = 0$$

を Bessel の微分方程式という。一般解は

$$J(r) = C_1 J_\nu(r) + C_2 Y_\nu(r).$$

ここで Y_ν は、 ν 階第2種の Neumann の Bessel 関数 (Neumann's Bessel function of the second kind of order ν) である (この Y_ν の定義に関しては、色々な定義があるというか、混乱状態であることを注意する必要がある。)

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ であるとき、 J_n の零点はすべて実数で、0 に関して対称に分布する。そこで J_n の正の零点を小さい方から順に並べたものを

$$\mu_{1,n} < \mu_{2,n} < \cdots < \mu_{m,n} < \cdots$$

とすると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m,n} = \infty.$$

7.2 Dirichlet 境界条件

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$(7.3) \quad -\Delta u = \lambda u \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(7.4) \quad u = 0 \quad (\text{in } \partial\Omega)$$

$$U(r, \theta) = u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = -\lambda U.$$

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0.$$

$$R(1) = 0, \quad R(0) \text{ は有限.}$$

$$\rho = \sqrt{\lambda}r, \quad W(\rho) = R(r).$$

$$W''(\rho) + \frac{1}{\rho}W'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)W(\rho) = 0.$$

$$W(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad W(0) \text{ は有限.}$$

$$R(r) = C J_n(\sqrt{\lambda}r).$$

$$R(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{\lambda} = \mu_{m,n}.$$

$$U(r, \theta) = C J_n(\mu_{m,n}r)(A \cos n\theta + B \sin n\theta).$$

7.3 Neumann 境界条件

8 その他の2次元領域における Laplacian の固有値問題

9 2次元 Laplacian の固有値問題を FreeFem++ で解く

F. Hecht, FreeFem++ a software to solve PDE² に分かりやすい解説がある。次に掲げるプログラムはそこに載っているものである。

LaplacianEigenvalues.edp

```
1  verbosity=10 ;
2  mesh Th=square(20,20,[pi*x,pi*y]);
3  fespace Vh(Th,P2);
4  Vh u1,u2;
5  real sigma = 20; // value of the shift
6                      // OP = A - sigma B; // the shifted matrix
7  varf op(u1,u2)= int2d(Th)( dx(u1)*dx(u2) + dy(u1)*dy(u2) - sigma* u1*u2 )
8                      + on(1,2,3,4,u1=0) ; // Boundary condition
9  varf b([u1],[u2]) = int2d(Th)( u1*u2 ); // no Boundary condition
10 matrix OP= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
11                      // crout solver because the matrix in not positive
12 matrix B= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
13 // important remark:
14 // the boundary condition is make with exact penalisation:
15 // we put 1e30=tdgv on the diagonal term to lock the degree of freedom.
16 // So take dirichlet boundary condition just on a variationnal form
17 // and not on b variationnal form.
18 // because we solve w=OP^-1*B*v
19
20 int nev=20; // number of computed eigen valeu close to sigma
21 real[int] ev(nev); // to store the nev eigenvalue
22 Vh[int] eV(nev); // to store the nev eigenvector
23
24 int k=EigenValue(OP,B,sym=true,sigma=sigma,value=ev,vector=eV,
25                 tol=1e-10,maxit=0,ncv=0) ;
26                 // return the number of computed eigenvalue
27 for (int i=0;i<k;i++) {
28     u1=eV[i];
29     real gg = int2d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1));
30     real mm= int2d(Th)(u1*u1);
31     cout<<"----"<< i<<" "<<ev[i]<<"err="
32         <<int2d(Th)(dx(u1)*dx(u1) + dy(u1)*dy(u1) - (ev[i])*u1*u1)
33         << " --- "<<endl;
34     plot(eV[i],cmm="Eigen Vector "+i+" valeur =" + ev[i] ,wait=1,value=1);
35 }
```

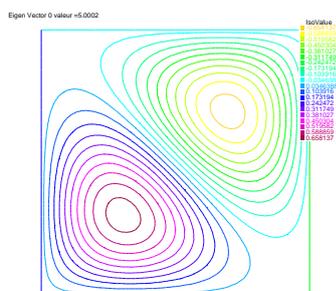


図 3: 0

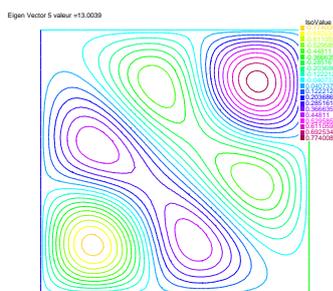


図 4: 5

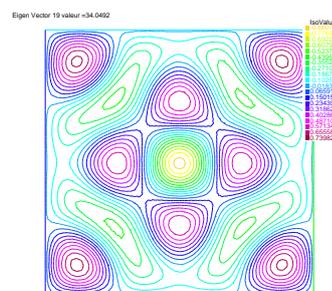


図 5: 19

²<http://www.freefem.org/ff++/ftp/CIMPA/CIMPA-Guadeloupe-FF.pdf>

なお、8行目の $+on(1,2,3,4,u=0)$ を削除すると、Dirichlet 境界条件の代わりに、自然境界条件である Neumann 境界条件となる。

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の両辺に試験関数 v をかけて積分し、部分積分すると、

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \lambda \int_{\Omega} uv \, dx \, dy.$$

すなわち

$$\iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy = \lambda \iint_{\Omega} uv \, dx \, dy.$$

これを有限要素法で離散化すると、一般化固有値問題と呼ばれる

$$A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}$$

という形をした方程式が得られる。ここで B は正値対称、 A は実対称である。

「シフト法で解く」と簡単に書いてあるだけで、詳しいことは書いてない。次のようなことかと推測する。一般化固有値に近いと考えられる実数 σ を与えたとき、 $A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}$ の両辺から $\sigma B\mathbf{u}$ を引くと、

$$(A - \sigma B)\mathbf{u} = (\lambda - \sigma)B\mathbf{u}.$$

ゆえに

$$(A - \sigma B)^{-1} B\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda - \sigma} \mathbf{u}.$$

これは \mathbf{u} が、行列 $(A - \sigma B)^{-1} B$ の、固有値 $\frac{1}{\lambda - \sigma}$ に属する固有ベクトルであることを示す。ゆえに行列 $(A - \sigma B)^{-1} B$ について冪乗法を実行すれば、絶対値が最大であるような固有値 $\mu = \frac{1}{\lambda - \sigma}$ が得られる。

10 1次元重 Laplacian の固有値問題

ここで考えるのは次の二つの固有値問題である。

$$(10.1) \quad v''''(x) = \lambda v(x) \quad (x \in (0, \pi)), \quad v(0) = v'(0) = v(\pi) = v'(\pi) = 0,$$

$$(10.2) \quad v''''(x) = \lambda v(x) \quad (x \in (0, \pi)), \quad v''(0) = v'''(0) = v''(\pi) = v'''(\pi) = 0,$$

10.1 問題の由来

棒の振動 (横振動ということ?) については、クーラント・ヒルベルト [4] (第2巻の第5章) に記述がある。適当な単位のつけかえで

$$(10.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R})$$

という方程式で支配されるそうである。

$$(a) \quad u(0, t) = u_x(0, t) = u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0 \quad \text{両端固定 (clamped)}$$

(b) $u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0$ 両端支持 (simply supported)

(c) $u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0$ 両端自由 (free edge)

(d) $u_x(0, t) = u_{xxx}(0, t) = u_x(\pi, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0$ 特に名はない

Fourier の変数分離法で、 $u(x, t) = v(x)\eta(t)$ とおくと、

$$(10.4) \quad v''''(x) = \lambda v(x) \quad (x \in (0, \pi))$$

という微分方程式が得られる。もちろん対応する境界条件がつく。

(a) $v(0) = v'(0) = v(\pi) = v'(\pi) = 0$ 両端固定 (clamped)

(b) $v(0) = v''(0) = v(\pi) = v''(\pi) = 0$ 両端支持 (simply supported)

(c) $v''(0) = v'''(0) = v''(\pi) = v'''(\pi) = 0$ 両端自由 (free edge)

(d) $v'(0) = v'''(0) = v'(\pi) = v'''(\pi) = 0$ 特に名はない

$A\varphi := \varphi''''$ とおくと、適当な境界条件を満たす φ と ψ に対して

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

が成り立つことを A は対称と言う。上にあげた境界条件の下で、 A は対称となる。実際、次の式変形が成り立つことが容易に確かめられる。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi''''(x)\psi(x)dx &= [\varphi''''(x)\psi(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi''''(x)\psi'(x)dx \\ &= - \int_0^\pi \varphi''''(x)\psi'(x)dx \\ &= - [\varphi''(x)\psi'(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \varphi''(x)\psi''(x)dx \\ &= \int_0^\pi \varphi''(x)\psi''(x)dx \\ &= [\varphi'(x)\psi''(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(x)\psi'''(x)dx \\ &= - \int_0^\pi \varphi'(x)\psi'''(x)dx \\ &= - [\varphi(x)\psi'''(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \varphi(x)\psi''''(x)dx \\ &= \int_0^\pi \varphi(x)\psi''''(x)dx. \end{aligned}$$

$\varphi, \psi \in X$ ならば、

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi).$$

これから固有値が実数であり、異なる固有値に属する固有関数が互いに直交することが分かる。

また、

$$\lambda \int_0^\pi |v(x)|^2 dx = \int_0^\pi \lambda v(x)\overline{v(x)} dx = \int_0^\pi v''''(x)\overline{v(x)} dx = \int_0^\pi v''(x)\overline{v''(x)} dx = \int_0^\pi |v''(x)|^2 dx.$$

ゆえに

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi |v''(x)|^2 dx}{\int_0^\pi |v(x)|^2 dx} \geq 0.$$

10.2 微分方程式 $v''''(x) = \lambda v(x)$ の一般解

次の微分方程式を考えよう。

$$(10.5) \quad v''''(x) = \lambda v(x) \quad (x \in (0, \pi)).$$

$$(10.6) \quad \nu := \sqrt[4]{\lambda}$$

とおくと (我々が考える境界条件のもとでは $\lambda \geq 0$ なので、4乗根に難しさはない), 特性方程式は

$$s^4 = \nu^4.$$

特性根は

$$s = \pm\nu, \pm i\nu.$$

$\nu \neq 0$ のとき, 重根はないので, (10.5) の一般解は

$$v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x + C_3 \cosh \nu x + C_4 \sinh \nu x \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ は任意定数}).$$

$\nu = 0$ のとき, $s = 0$ (4重根) であるから, (10.5) の一般解は

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ は任意定数}).$$

えーと、ここにコピペ

$\lambda > 0$ の場合、

$$\nu := \sqrt[4]{\lambda}$$

とおくと、 $v''''(x) = \lambda v(x)$ の一般解は、

$$(10.7) \quad v(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x + C_3 \cosh \nu x + C_4 \sinh \nu x \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ は任意定数}).$$

$\lambda = 0$ の場合は、 $v''''(x) = \lambda v(x)$ の一般解は、

$$(10.8) \quad v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 \text{ は任意定数}).$$

10.3 準備: 超越方程式 $\cos \nu\pi - 1/\cosh \nu\pi = 0$ の解

方程式

$$(10.9) \quad \cos \nu\pi \cosh \nu\pi = 1$$

の正の解を求めよう。 $y = \frac{1}{\cosh \pi x}$ と $y = \cos \pi x$ のグラフを描いて、交点を考えることにより、正の解を小さい方から順に

$$0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$$

と番号付けたとき、

$$\nu_n \doteq n + \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \infty$$

が分かる。

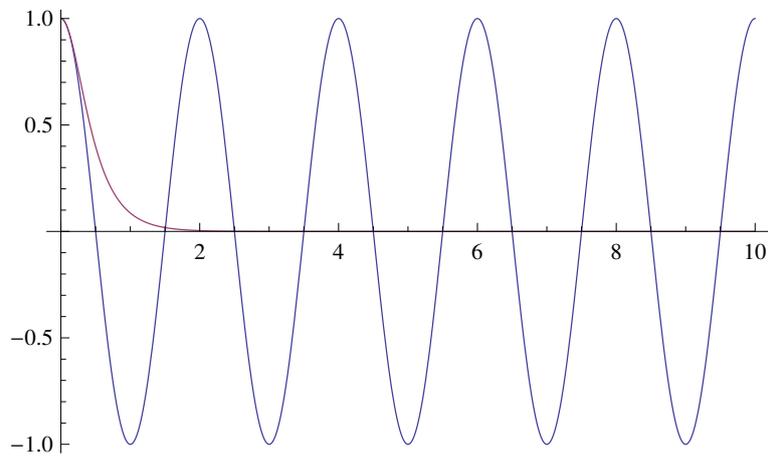


図 6: $\cos \nu\pi$ と $\frac{1}{\cosh \nu\pi}$ のグラフ

```
Plot[Cos[nu Pi]-1/Cosh[nu Pi],{nu,0,10}]
```

あるいは別々に描く。

```
Plot[{Cos[nu Pi], 1/Cosh[nu Pi]},{nu,0,10}]
```

1.5 近くの解 (根, root) は

```
FindRoot[Cos[nu Pi]-1/Cosh[nu Pi]==0, {nu, 1.5}, WorkingPrecision->100]
```

1.505618731141939769074774272820341419231760016958445297128686913628891439135399528299840871

後のために

```
rootnear[x_]:=FindRoot[Cos[nu Pi]-Cosh[nu Pi]==0,{nu, x},
  WorkingPrecision->100]
rootnear2[x_]:= nu /. rootnear[x]
```

10.4 Dirichlet 境界条件 (両端固定)

ここで扱う境界条件は次のものである。

$$(10.10) \quad v(0) = v'(0) = v(\pi) = v'(\pi) = 0.$$

$\nu = 0$ のとき $v \equiv 0$ となり, 不適であることが分かる。

$\nu \neq 0$ の場合を考える。

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2.$$

がすぐに得られて,

$$\begin{pmatrix} \cos \nu\pi - \cosh \nu\pi & \sin \nu\pi - \sinh \nu\pi \\ -(\sin \nu\pi + \sinh \nu\pi) & \cos \nu\pi - \cosh \nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これから (10.2) が非自明解を持つためには

$$(10.11) \quad \cos \nu\pi \cosh \nu\pi = 1$$

であることが必要十分である。この方程式の正の解を小さい方から順に

$$0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$$

と番号付けたとき、

$$\nu_n := n + \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \infty$$

となることが分かっている。

固有値 $\lambda = \nu_n^2$ に属する固有関数は

$$v_n(x) := (\sin \nu_n \pi - \sinh \nu_n \pi) (\cos \nu_n x - \cosh \nu_n x) + (\cos \nu_n \pi - \cosh \nu_n \pi) (\sin \nu_n x - \sinh \nu_n x).$$

ν_n を数値計算で求める Mathematica の関数

```

nu[n_] :=
nu[n] =
nu /. FindRoot[Cos[nu Pi] == 1/Cosh[nu Pi], {nu, 0.5 + n},
WorkingPrecision -> 100]

```

10.5 固定境界条件

微分方程式

$$v''''(x) = \lambda v(x)$$

と、固定境界条件と呼ばれる

$$(10.12) \quad v(0) = v'(0) = v(\pi) = v'(\pi) = 0$$

を満たすような $\lambda, v(\neq 0)$ を求める。

$\lambda = 0$ は固有値ではない。実際、(10.8) の v が (10.12) を満たすとして、

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) = C_1, \\ 0 &= v'(0) = C_2, \\ 0 &= v(\pi) = C_1 + C_2\pi + C_3\pi^2 + C_4\pi^3, \\ 0 &= v'(\pi) = C_2 + 2C_3\pi + 3C_4\pi^2 \end{aligned}$$

から $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, すなわち $v(x) \equiv 0$ が導かれるから。

以下では $\lambda > 0$ とする。(10.7) の v が (10.12) を満たすとして、

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) = C_1 + C_3, \\ 0 &= v'(0) = \nu(C_2 + C_4), \\ 0 &= v(\pi) = C_1 \cos \nu\pi + C_2 \sin \nu\pi + C_3 \cosh \nu\pi + C_4 \sinh \nu\pi, \\ 0 &= v'(\pi) = \nu(-C_1 \sin \nu\pi + C_2 \cos \nu\pi + C_3 \sinh \nu\pi + C_4 \cosh \nu\pi) \end{aligned}$$

が必要十分である。これは

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2, \quad B \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \quad B := \begin{pmatrix} \cos \nu\pi - \cosh \nu\pi & -\nu(\sin \nu\pi + \sinh \nu\pi) \\ \sin \nu\pi - \sinh \nu\pi & \nu(\cos \nu\pi - \cosh \nu\pi) \end{pmatrix}.$$

と同値である。もし $\det B = 0$ ならば自明解しか存在しない。非自明解が存在するためには、 $\det B = 0$ が成り立つことが必要十分である。

$$\det B = \nu(2 - 2\cos \nu\pi \cosh \nu\pi) = 2\nu(1 - \cos \nu\pi \cosh \nu\pi)$$

であるから、

$$\cos(\nu\pi) \cosh \nu\pi = 1.$$

この方程式の正の解を小さい方から順に ν_1, ν_2, \dots とする。このとき、

$$\nu_n := n + \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

そのとき、

$$v(x) = Cv_n(x),$$

$$v_n(x) = [(\sin \nu_n\pi - \sinh \nu_n\pi)(\cos \nu_n x - \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n\pi - \cosh \nu_n\pi)(\sin \nu_n x - \sinh \nu_n x)].$$

10.6 単純支持境界条件

微分方程式

$$v''''(x) = \lambda v(x)$$

と、単純支持境界条件と呼ばれる

$$(10.13) \quad v(0) = v''(0) = v(\pi) = v''(\pi) = 0$$

を満たすような $\lambda, v(\neq 0)$ を求める。

$\lambda = 0$ は固有値ではない。実際、(10.8) の v が (10.13) 満たすとして、

$$0 = v(0) = C_1,$$

$$0 = v''(0) = 2C_3,$$

$$0 = v(\pi) = C_1 + C_2\pi + C_3\pi^2 + C_4\pi^3,$$

$$0 = v''(\pi) = 2C_3 + 2C_3\pi + 6C_4\pi$$

から $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, すなわち $v(x) \equiv 0$ が導かれるから。以下では $\lambda > 0$ とする。

(10.7) の v が (10.13) 満たすとして、

$$0 = v(0) = C_1 + C_3,$$

$$0 = v''(0) = \nu^2(-C_1 + C_3),$$

$$0 = v(\pi) = C_1 \cos \nu\pi + C_2 \sin \nu\pi + C_3 \cosh \nu\pi + C_4 \sinh \nu\pi,$$

$$0 = v''(\pi) = \nu^2(-C_1 \cos \nu\pi - C_2 \sin \nu\pi + C_3 \cosh \nu\pi + C_4 \sinh \nu\pi)$$

が必要十分である。これは

$$C_1 = C_3 = 0, \quad B \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0, \quad B := \begin{pmatrix} \sin \nu\pi & \sinh \nu\pi \\ -\sin \nu\pi & \sinh \nu\pi \end{pmatrix}.$$

と同値である。もし $\det B \neq 0$ ならば自明解しか存在しない。非自明解が存在するためには、 $\det B = 0$ が成り立つことが必要十分である。

$$\det B = 2 \sin \nu\pi \sinh \nu\pi$$

であるから、

$$\sin(\nu\pi) = 0.$$

この方程式の正の解は $\nu = n$ ($n \in \mathbb{N}$). このとき、

$$v(x) = C \sin nx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

10.7 両端が自由な棒

ここで扱う境界条件は、free edge の境界条件と呼ばれる、次のものである。

$$(10.14) \quad v''(0) = v'''(0) = v''(\pi) = v'''(\pi) = 0.$$

$\nu = 0$ のとき、 $v(x) = C_1 + C_2x$ となる。直交系を選ぶと、例えば

$$(10.15) \quad \nu_0 = 0, \quad v_0(x) = 1,$$

$$(10.16) \quad \nu_1 = 0, \quad v_1(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

$\nu \neq 0$ のとき、 $C_1 = C_3$ かつ $C_2 = C_4$ がすぐに得られて、

$$\begin{pmatrix} \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi & \sinh \nu\pi - \sin \nu\pi \\ \sinh \nu\pi + \sin \nu\pi & \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これから非自明解を持つためには

$$(10.17) \quad \cos \nu\pi \cosh \nu\pi = 1$$

であることが必要十分である。これは固定された棒の場合と同じ方程式である。 $n = 2$ から番号をつけるので、固定された棒と番号が1ずれて、

$$\nu_n := n - \frac{1}{2} \quad (n \geq 2).$$

固有値 $\lambda = \nu_n^4$ に属する固有関数は

$$v_n(x) := (\sin \nu_n\pi - \sinh \nu_n\pi) (\cos \nu_n x + \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n\pi - \cosh \nu_n\pi) (\sin \nu_n x + \sinh \nu_n x).$$

10.7.1 領域が $(0, 1)$ の場合

(2014/12/3)

固有値問題

$$u''''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u''(0) = u'''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$$

の解に次のように記号をつける。固有値を小さい方から $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, 対応する固有関数を $\{u_n\}_{n \geq 0}$ とする。

$\lambda_n \geq 0$ である。 $\mu_n := \sqrt[4]{\lambda_n}$ とおく。

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0.$$

$n \geq 2$ のとき $\mu_n > 0$ であり、 μ_n は

$$\cos \mu_n = \frac{1}{\cosh \mu_n}$$

の正の解である。右辺は正の小さな値であるから、

$$\begin{aligned} \mu_n &:= \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \\ \text{sign} \left(\mu_n - \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi\right) &= (-1)^n. \end{aligned}$$

一方、固有関数は、 $n = 0, 1$ のとき

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = x - 1/2,$$

$n \geq 2$ のとき、

$$u_n(x) := (\sin \mu_n - \sinh \mu_n) (\cos \mu_n x + \cosh \mu_n x) - (\cos \mu_n - \cosh \mu_n) (\sin \mu_n x + \sinh \mu_n x).$$

$(0, \pi)$ のときの ν_n, v_n とは、

$$\mu_n = \nu_n \pi, \quad u_n(x) = v_n(\pi x)$$

の関係にある。

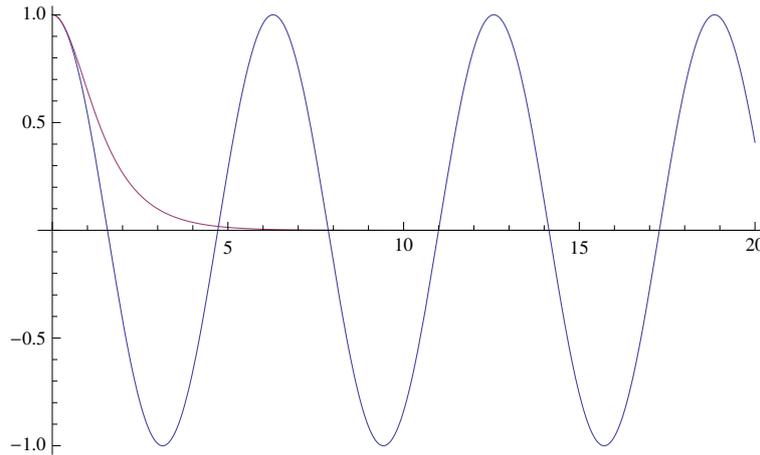


図 7: $\cos x$ と $\frac{1}{\cosh x}$ のグラフ

一方で

$$\sinh \mu_n = \sqrt{\cosh^2 \mu_n - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \mu_n} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \mu_n}{\cos^2 \mu_n}} = \sqrt{\tan^2 \mu_n} = |\tan \mu_n|$$

であり、左辺は正、右辺の sign は $(-1)^{n-1}$ であるから

$$\sinh \mu_n = (-1)^{n-1} \tan \mu_n.$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &\doteq 4.73004074486270402602404810082, \\ \mu_3 &\doteq 7.85320462409583755647706668725, \\ \mu_4 &\doteq 10.9956078380016709066690325191, \\ \mu_5 &\doteq 14.1371654912574641771059178551, \\ \mu_6 &\doteq 17.2787596573994814380910739758, \\ \mu_7 &\doteq 20.4203522456260610909364111893, \\ \mu_8 &\doteq 23.5619449020404550753920168006, \\ \mu_9 &\doteq 26.7035375555081862484194076458, \\ \mu_{10} &\doteq 29.8451302091032542670014932794 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = \pi$$

であるが、 π に近づくのはかなり速く、(すでに $n = 2$ で) $\mu_3 - \mu_2 = 3.123163879233133530 \dots$

- $n \geq 2$ のとき、 u_n の節は n 個
- $n \geq 2$ のとき、 u_n の山と谷は合わせて $n - 1$ 個
- n が偶数のとき、 u_n のグラフは $x = \frac{1}{2}$ に関して線対称 (偶関数的)
- n が奇数のとき、 u_n のグラフは $(\frac{1}{2}, 0)$ に関して点対称 (奇関数的)

偶関数、奇関数というには、定義域が $(-1, 1)$ のようなのが良い。

10.7.2 領域が $(-1, 1)$ の場合

Gander-Kwok [5] は、 $(-1, 1)$ の場合で計算をしている。本質的には同じことだが、式の形がかなり違うので、きちんと詳細を書いておきたい (E さんがやってくれると期待している)。とりあえず結果だけ引用しておく。

$k_0 = k_1 = 0$. $m \geq 2$ のとき k_m は m が偶数のときは $\tan k_m + \tanh k_m = 0$ の解、 m が奇数のときは $\tan k_m - \tanh k_m = 0$ の解で、いずれの場合も $(m - 1/2)\pi/2$ に近い。

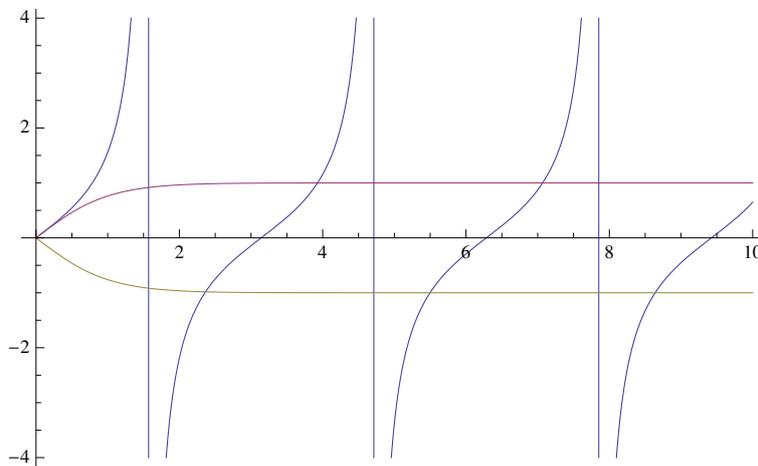


図 8: $\tan k$, $\tanh k$, $-\tanh k$ のグラフ

$$u_m(x) = \begin{cases} \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}} & (m \text{ は偶数}) \\ \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}} & (m \text{ は奇数}). \end{cases}$$

10.8 数値実験 (1) 両端を固定された長さ π の棒

```

Plot[{Cos[nu Pi], 1/Cosh[nu Pi]}, {nu, 0, 10}]

nu[n_] :=
  nu[n] = nu /. FindRoot[Cos[nu Pi] == 1/Cosh[nu Pi], {nu, 0.5 + n},
    WorkingPrecision -> 50]

Table[nu[n], {n, 100}]

vc[n_, x_] := ((Sin[nu[n] Pi] - Sinh[nu[n] Pi]) (Cos[nu[n] x] -
  Cosh[nu[n] x]) - (Cos[nu[n] Pi] -
  Cosh[nu[n] Pi]) (Sin[nu[n] x] - Sinh[nu[n] x]))/Sinh[nu[n] Pi]

Plot[vc[1, x], {x, 0, Pi}]

Plot[Table[vc[n, x], {n, 1, 5}], {x, 0, Pi}]

```

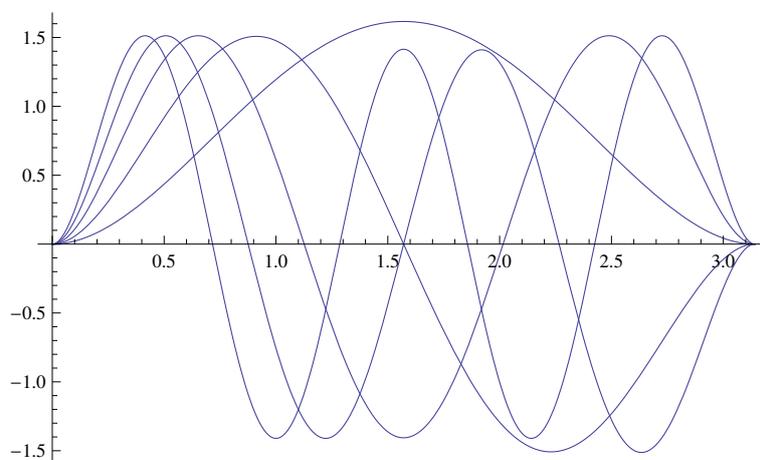


図 9: 両端を固定された棒の固有関数

10.9 数値実験 (2) 両端が自由な長さ π の棒

固有値 ν_n ($n = 0, 1, \dots$) は次のように求められる。

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = 0.$$

$n \geq 2$ のとき、 ν_n は次の方程式の $n - 1/2$ 近くの解:

$$\cos \nu\pi = \frac{1}{\cosh \nu\pi}.$$

固有関数 v_n ($n = 0, 1, \dots$) は次のように求められる。

$$v_0(x) = 1, \quad v_1(x) = x - \pi/2,$$

$n \geq 2$ に対しては

$$v_n(x) := \frac{1}{\sinh \nu_n \pi} [(\sin \nu_n \pi - \sinh \nu_n \pi) (\cos \nu_n x + \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n \pi - \cosh \nu_n \pi) (\sin \nu_n x + \sinh \nu_n x)].$$

表 1: ν_n の計算値 (50桁)

n	ν
1	1.5056187311419397690747742728203414192317600169584
2	2.4997526700739646572628088393687962949448017384134
3	3.5000106794359084826236036080451803242177819259309
4	4.4999995384835765581424310186675776194250937876777
5	5.5000000199439028337910224695847862711502857566313
6	6.499999991381457567463775843021860050807045788249
7	7.5000000000372440987180476158468678782199974112313
8	8.499999999983905365619939710675426424288519846838
9	9.5000000000000695512214581555423651279256025870498
10	10.499999999999694419200761058698551331916596048
11	11.500000000000000129882922993473601709440210788441
12	12.499999999999994387249981900204046105897756673
13	13.50000000000000000242548920517150793402219875839
14	14.499999999999999989518510773805653566784305793
15	15.500000000000000000452946218703371932992619723
16	16.4999999999999999980426419127067775829922516
17	17.50000000000000000000845851123972229017838136
18	18.49999999999999999963447458665344207001547
19	19.5000000000000000000001579578533568972059675
20	20.4999999999999999999931740222359141210574
21	21.50000000000000000000002949772451675340293
22	22.499999999999999999999872528774376574766
23	23.500000000000000000000005508531125073569
24	24.4999999999999999999999761954786207625
25	25.50000000000000000000000010286866411906
26	26.49999999999999999999999555464195686
27	27.50000000000000000000000019210133913
28	28.499999999999999999999999169854843
29	29.500000000000000000000000035873825
30	30.49999999999999999999999998449751
31	31.50000000000000000000000000066992
32	32.4999999999999999999999999997105
33	33.50000000000000000000000000000125
34	34.4999999999999999999999999999995
35	35.500000000000000000000000000000000
36	36.500000000000000000000000000000000
37	37.500000000000000000000000000000000
38	38.500000000000000000000000000000000
39	39.500000000000000000000000000000000
40	40.500000000000000000000000000000000
⋮	⋮
99	99.50000000000000000000000000000000000
100	100.50000000000000000000000000000000000

上で書いたものとは異なり、 $\sinh \nu_n \pi$ で割っているのは、そうしないと値が大きくなるからである。 $(\frac{\exp \nu_n \pi}{2})$ で割るのでも良かったか?) こうすると、 $n \neq 1$ 以外で

$$\int_0^\pi v_n(x)^2 dx = \pi.$$

v_1 を定義しなおす?

$$v_1(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

こうすると $\int_0^\pi v_1(x)^2 dx = \pi$ になる。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/freebar.nb>

```

nu[0]=0
nu[1]=0
nu[n_] :=
  nu[n] = nu /. FindRoot[Cos[nu Pi] == 1/Cosh[nu Pi], {nu, n-0.5},
    WorkingPrecision -> 50]

Table[nu[n], {n, 0, 100}]

vf[n_, x_] :=
  Switch[n,
    0, 1,
    1, x-Pi/2,
    _, ((Sin[nu[n]Pi] - Sinh[nu[n]Pi]) (Cos[nu[n]x] + Cosh[nu[n]x])
      - (Cos[nu[n]Pi] - Cosh[nu[n]Pi]) (Sin[nu[n]x] + Sinh[nu[n]x]))
      /Sinh[nu[n] Pi]]

Plot[Table[vf[n, x], {n, 0, 5}], {x, 0, Pi}]

```

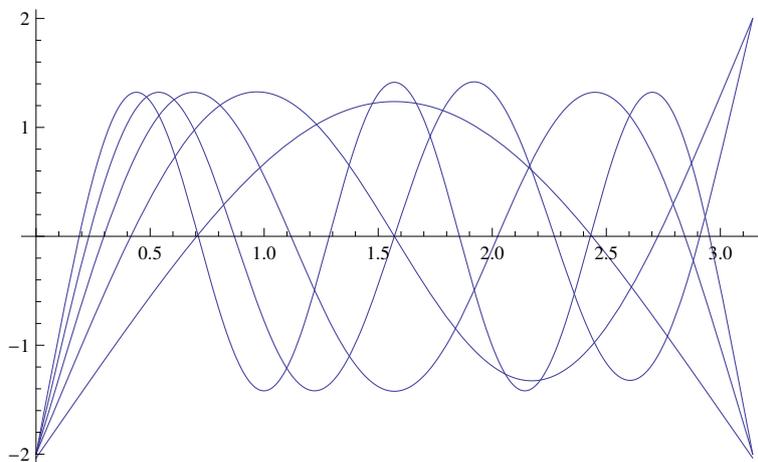


図 10: 両端が自由な棒の固有関数

$v_n(x) = (-1)^n v_n(\pi - x)$ という性質を持っているか?

```
Table[Plot[{vf[n, x], (-1)^n vf[n, Pi - x]}, {x, 0, Pi}], {n, 0, 10}]
```

10.10 数値実験 (3) 両端が自由な長さ 1 の棒

```

mu[n_] := mu[n] = If[n == 0 || n == 1, 0,
  x /. FindRoot[Cos[x] == 1/Cosh[x], {x, (n - 1/2) Pi},
    WorkingPrecision -> 50]]

Table[mu[n], {n, 0, 100}]

uf[n_, x_] :=
  Switch[n,
    0, 1,
    1, x-1/2,
    _, ((Sin[mu[n]] - Sinh[mu[n]]) (Cos[mu[n] x] + Cosh[mu[n] x])
      - (Cos[mu[n]] - Cosh[mu[n]]) (Sin[mu[n] x] + Sinh[mu[n] x]))
      /Sinh[mu[n]]]

Plot[Table[uf[n, x], {n, 0, 5}], {x, 0, 1}]

```

u_1 は $2\sqrt{3}$ をかけて

$$u_1(x) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

とした方が良くも。

```

uf[n_, x_] :=
  Switch[n,
    0, 1,
    1, 2 Sqrt[3] (x - 1/2),
    _, ((Sin[mu[n]] - Sinh[mu[n]]) (Cos[mu[n] x] + Cosh[mu[n] x])
      - (Cos[mu[n]] - Cosh[mu[n]]) (Sin[mu[n] x] + Sinh[mu[n] x]))
      / Sinh[mu[n]]]

```

こうしておく

```
Table[Integrate[uf[n, x]^2, {x, 0, 1}], {n, 0, 10}]
```

に対して、ほぼ 1 という値になる。つまり $\{u_n\}$ は正規直交系に近くなる。

これも http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/freebar_length1.nb に置いておく。

いっそのこと、完璧な正規直交系を作る？

少し考える…

```

a = Integrate[(((Sin[mu] - Sinh[mu]) (Cos[mu x] +
  Cosh[mu x]) - (Cos[mu] - Cosh[mu]) (Sin[mu x] +
  Sinh[mu x]))^2, {x, 0, 1}]
b = FullSimplify[a]
b /. {Cosh[mu] -> 1/Cos[mu], Sinh[mu] -> (-1)^n Tan[mu]}
FullSimplify[%]

```

もう一息で簡単になりそう。

11 2次元重ラプラシアン固有値問題

桂田 [6] というノートもあり、そちらも参照すること。

11.1 板の振動

板の振動は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = 0$$

という方程式に従うそうである。

Gazzola-Grunau-Sweers [7] によると、Chladni の結果が知られてから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

という方程式を提唱した人もいたが、うまく行かなかったとか。

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \Delta^2 u = 0.$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

D は板の曲げ剛性、 ρ は密度、 h は板の厚さである。 E はヤング率 (Young's, 縦弾性係数) で、鋼鉄の場合、約 10^{11} [Pa] 程度。 ν は Poisson 比 と呼ばれる無次元定数で、0.28 ~ 0.30 程度。

11.2 文献探し

板の振動について、物理の教科書に説明が書いてあるのは発見出来なかった。工学系の本を探して、近藤 [8] (1993), 入江・小林 [9] (2006) を発見した。

歴史的には、Chladni の研究が発端であるらしい ([10] (1787), [11] (1802), [12] (1817))。現在受け入れられている (薄い板の) 正しい方程式は、Sophie Germain が提出したそうである (初めての論文かは分からないが、Germain [13] (1821) に確かに方程式が載っている)。

Sophie Germain の論文

Remarques sur la nature, les bornes et l'endue de la questuib des surfaces élastiques et équation gvénérale de ces surfaces (Paris, 1826); Mémoire sur la courbure des surfaces (Paris, 1830); Oeuvers philosophique de Sophie Germain (Paris, 1879); and mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques (Paris, 1880).

Kirchhoff-Love の理論と呼ばれるらしいので、Kirchhoff [14] (1850) などを読むべきらしい。Rayleigh [15] が由緒ある古典らしい³。

有名な Ritz の方法 (Rayleigh-Ritz の方法) は、Ritz [17] (1909) で提唱されたが、そこで取り上げられている内容はまさに板の振動である。

³余談であるが、尺八で博士論文を書いた寺田寅彦による Rayleigh の人となりの紹介寺田 [16] (1930) がある。

現代の数学書としては、Gazzola-Grunau-Sweers [7] がある (2010 年秋の日本数学会の書籍売場で見つけた)。

板が厚くなったり、また高次のモードを問題とすると、剪断変形が無視できなくなり、Kirchhoff-Love の理論は合わなくなり、Mindline plate の理論が必要になるとか。

重調和作用素の差分近似については、Bauer and Reiss [18] (1972) がある。正方形領域の Dirichlet 境界条件 (clamped plate) の場合の固有値問題が解いてある。

Chladni 図形に関する実験としては、Chladni 自身のものを除くと、Wheatstone1833 [19] (1833), そして何と言っても Mary D Waller Rossing-Russel [20] (1990)

11.3 長方形領域

11.4 円盤領域

クーラント・ヒルベルト [4] (第2巻の第5章)

pp.30-31

2. 円板の場合 問題を扱う際の解析的な困難が、膜の場合より根本的に大きくなることはいうまでもない。たとえば、長方形の形をした板の場合を、具体的に知られている関数を使って扱うことは不可能なのである。このような具体的な取り扱いができるような境界のただ一つの例は、円である。極座標 r, θ を導入すると、このときもまたベッセル関数に達する。すなわち、 $\lambda = k^4$ とおいて、微分方程式を

$$(\Delta \Delta - k^4) v = 0$$

あるいは

$$(\Delta - k^2) (\Delta + k^2) v = 0$$

という作用子の形になおすことができる。(中略) さて、 v がフーリエ級数

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(r) e^{in\theta}$$

に展開されているものと考えると、級数の各項がそれ自身上の微分方程式を満たすはずである。したがって、 y_n は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) y = 0$$

の解でなければならない。この微分方程式の互いに独立な、 $r = 0$ で正則な解は、すぐに得られる。それはすなわち、 $i = \sqrt{-1}$ とおけば、 $J_n(kr)$ と $J_n(ikr)$ とである。したがって、関数

$$v(r, \theta) = J_n(kr) (a_1 \cos n\theta + b_1 \sin n\theta) + J_n(ikr) (a_2 \cos n\theta + b_2 \sin n\theta)$$

が (32) の解である。これらが、境界条件 $v(1, \theta) = 0, v_r(1, \theta) = 0$ を満足させるためには、

$$\begin{aligned} J_n(k)a_1 + J_n(ik)a_2 &= 0, & J_n(k)b_1 + J_n(ik)b_2 &= 0, \\ J_n'(k)a_1 + iJ_n'(ik)a_2 &= 0, & J_n'(k)b_1 + iJ_n'(ik)b_2 &= 0 \end{aligned}$$

でなければならない。これから、固有振動数 k に対して、超越方程式

$$\frac{J'_n(k)}{J_n(k)} = \frac{iJ'_n(ik)}{J_n(ik)}$$

が得られる。27 ページの級数展開からわかるように、この中の虚数単位 i は、実際にはあらわれてこない。これについても、くわしいことは、参考文献を参照されたい。

11.5 変分法の議論

A 2次元 Neumann

A.1 準備

n 次行列 V を

$$V := \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dots, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

で定める。すなわち

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

明らかに

$$V^{-1} = \text{diag} \left(\sqrt{2}, 1, \dots, 1, \sqrt{2} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

任意の n 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、

$$VAV^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \hline \sqrt{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \sqrt{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \sqrt{2}a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \sqrt{2}a_{n-1,n} \\ \hline a_{n1} & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{n2} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}a_{n,n-1} & a'_{nn} \end{array} \right).$$

(第 $1, n$ 行を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍し、第 $1, n$ 列を $\sqrt{2}$ 倍する。四隅は変わらない。)

さて、

$$W := V \otimes V,$$

すなわち

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & & & \mathbf{0} \\ & V & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & V \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{2}}V \end{pmatrix}$$

とおく。

$$W^{-1} = V^{-1} \otimes V^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}V^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & V^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & V^{-1} \\ & & & & \sqrt{2}V^{-1} \end{pmatrix}.$$

補題 A.1 任意の

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、

$$WAW^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} A'_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}}A'_{12} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}A'_{1,n-1} & A'_{1n} \\ \hline \sqrt{2}A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n-1} & \sqrt{2}A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \sqrt{2}A'_{n-1,1} & A'_{n-1,2} & \cdots & A'_{n-1,n-1} & \sqrt{2}A'_{n-1,n} \\ \hline A'_{n1} & \frac{1}{\sqrt{2}}A'_{n2} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}A'_{n,n-1} & A'_{nn} \end{array} \right), \quad A'_{ij} := VA_{ij}V^{-1}$$

が成り立つ。

A.2 Neumann 境界条件のもとでの Laplacian の固有値

実は Neumann 境界条件下の Laplacian の固有値問題

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を差分法で離散化したとき、

$$A = \begin{pmatrix} D & 2B & & & & \\ B & D & B & & & \\ & B & D & B & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & B & D & B \\ & & & & 2B & D \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & & \\ & \beta & \alpha & \beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & & 2\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad B := \gamma I$$

で定義される行列 A の固有値問題

$$AU = \lambda U$$

が導かれる。

命題 A.2 $\tilde{A} := WAW^{-1}$, $\mathbf{V} := WU$ とおくと、 \tilde{A} は対称行列で、 $AU = \lambda U$ は

$$\tilde{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$$

と同値である。

証明 補題 A.1 より

$$\tilde{A} = WAW^{-1} = \begin{pmatrix} D' & \sqrt{2}B' & & & & & \\ \sqrt{2}B' & D' & B' & & & & \\ & B' & D' & B' & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & B' & D' & \sqrt{2}B' & \\ & & & & \sqrt{2}B' & D' & \end{pmatrix}, \quad D' := VDV^{-1}, \quad B' := VB^{-1}$$

であるが、

$$D' = VDV^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2}\beta & & & & & \\ \sqrt{2}\beta & \alpha & \beta & & & & \\ & \beta & \alpha & \beta & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \beta & \alpha & \sqrt{2}\beta \\ & & & & & \sqrt{2}\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$B' = VB^{-1} = V(\gamma I)V^{-1} = \gamma VV^{-1} = \gamma I = B$$

であるから、 \tilde{A} は対称行列である。

また $\mathbf{V} := WU$ より、 $U = W^{-1}\mathbf{V}$ であるから、

$$AU = \lambda U \Leftrightarrow AW^{-1}\mathbf{V} = \lambda W^{-1}\mathbf{V} \Leftrightarrow WAW^{-1}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}. \blacksquare$$

B.2 対称な線形変換

補題 B.1 V は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ \mathbb{R} 上の n 次元線形空間、 u_1, \dots, u_n は V の正規直交基底、 $T: V \rightarrow V$ は線形変換 (同じ空間への線形写像のことを線形変換と呼ぶ)、 $A = (a_{ij})$ を u_1, \dots, u_n に関する T の行列とすると、

$$a_{ij} = \langle Tu_j, u_i \rangle.$$

証明 $(Tu_1 \ \cdots \ Tu_n) = (u_1 \ \cdots \ u_n)A$, すなわち

$$Tu_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}u_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

であるから、

$$\langle Tu_j, u_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle u_k, u_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}. \blacksquare$$

定義 B.2 (対称な線形変換) 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ \mathbb{R} 上の線形空間 V 上の線形変換 $T: V \rightarrow V$ が対称であるとは、

$$\forall x, \forall y \in V \quad \langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle$$

が成り立つことをいう。

実は、 T が対称であるためには、 V の正規直交基底に関する T の行列が対称行列であることが必要十分である。正規直交基底は無数に存在するわけだが、任意の1つについてチェックすれば十分である、というのが次の命題から分かる。

命題 B.3 V を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ \mathbb{R} 上の n 次元線形空間、 $T: V \rightarrow V$ を V 上の線形変換とする。

- (1) T が対称ならば、 V の任意の正規直交基底 u_1, \dots, u_n に関する T の行列 A は実対称行列である。
- (2) V のある正規直交基底 u_1, \dots, u_n に関する T の行列 A が実対称行列ならば、 T は対称である。

証明

- (1) 補題 B.1 と、 T の対称性から

$$a_{ij} = \langle Tu_j, u_i \rangle = \langle u_j, Tu_i \rangle = \langle Tu_i, u_j \rangle = a_{ji}.$$

- (2) 仮定から

$$(Tu_1 \ \cdots \ Tu_n) = (u_1 \ \cdots \ u_n)A, \quad A = A^T.$$

つまり $\langle Tu_j, u_i \rangle = \langle u_j, Tu_i \rangle$ が成り立つ。任意の $x, y \in V$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \left\langle T \sum_{j=1}^n x_j u_j, \sum_{i=1}^n y_i u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i \langle Tu_j, u_i \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i \langle u_j, Tu_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j u_j, T \sum_{i=1}^n y_i u_i \right\rangle = \langle x, Ty \rangle. \end{aligned}$$

B.3 対称変換の固有値問題

対称性があると、非常にすんなりと数学的帰納法にのっかる、という分かりやすい証明。

命題 B.4 V は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ n 次元線形空間、 $T: V \rightarrow V$ は対称変換とすると、 V の正規直交基底 u_1, \dots, u_n が存在して

$$(Tu_1 \ \cdots \ Tu_n) = (u_1 \ \cdots \ u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

λ_j は T の固有値で、 u_j は λ_j に属する T の固有ベクトルである。

$V = \mathbb{R}^n$ のとき、 u_1, \dots, u_n に関する T の行列を A , $U := (u_1 \ \cdots \ u_n)$ とおくと、

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

証明 数学的帰納法によって証明する。 $n = 1$ のとき、 $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $Tx = ax$ ($x \in V$) であるから、 u_1 として長さ 1 の任意の (と言っても二つしかないが) ベクトルを取れば良い。 $n = k$ (k はある自然数) まで成り立つと仮定する。 $\dim V = k + 1$ とする。 T の 1 つの固有値 λ_1 と、それに属する長さ 1 の固有ベクトル u_1 を取る (普通の特性多項式 $\det(\lambda I - T) = 0$ の根を任意に 1 つ取って λ_1 として、 $(\lambda_1 I - T)u = 0$ の非自明解 u を取って、 $u_1 := \frac{1}{\|u\|}u$ とすれば良い)。 $W := \text{Span}\langle u_1 \rangle$ とおく。 W^\perp は T 不変である。実際、 $x \in W^\perp$ とすると、任意の $y \in W$ に対して、(T の対称性を用いて)

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

であるから $Tx \in W^\perp$ 。 $\dim W^\perp = k$ であり、 $T': W^\perp \rightarrow W^\perp$ を $T'x = Tx$ ($x \in W^\perp$) で定めると、 T' は対称な線形変換である (T の制限なので、言葉の本当の意味で明らか)。帰納法の仮定により、 W^\perp の正規直交基底 u_2, \dots, u_n が存在して、

$$(T'u_2 \ \cdots \ T'u_n) = (u_2 \ \cdots \ u_n) \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

すると u_1, u_2, \dots, u_n は V の正規直交基底で、

$$(Tu_1 \ Tu_2 \ \cdots \ Tu_n) = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$n = k + 1$ のときにも成り立つことが分かった。■

B.4 対称行列の固有値問題

前項で十分と思うが、初等的に行列の言葉だけで記述してみる (本質的に上と同じことをするのだが、対称性の証明が少しだけ難しくなる)。

命題 B.5 A は n 次実対称行列とすると、 n 次実直交行列 U と、 n 個の実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在して

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である。)

証明 数学的帰納法により証明する。 $n = 1$ のとき。 $\exists a \in \mathbb{R}$ s.t. $A = a$. このとき、 $U = 1$, $\lambda = a$ として、 $U^{-1}AU = \lambda$ であるから、 $n = 1$ のとき成り立つことが分る。

$n - 1$ まで成り立つと仮定し、 A を n 次の実対称行列とする。 A の 1 つの固有値とそれに属する固有ベクトル u を取る。($\det(\lambda I - A) = 0$ の根 λ を 1 つ取り、 $(\lambda I - A)u = 0$ の非自明解を任意に 1 つ取れば良い。)

$u_1 := \frac{1}{\|u\|}u$ とおき、 \mathbb{R}^n の正規直交基底 u_1, \dots, u_n を作る。 $W := \text{Span}\langle u_1 \rangle$ とおくと、 $W^\perp = \text{Span}\langle u_2, \dots, u_n \rangle$. W^\perp は A 不変である。実際、 $x \in W^\perp$ とすると、任意の $y \in W$ に対して、

$$(Ax, y) = (x, Ay) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

ゆえに $Ax \in W^\perp$.

$Q := (u_1, \dots, u_n)$ とおくと、(列ベクトルが正規直交系であるから) Q は実直交行列で

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix}$$

となる。 A が実対称行列なので、 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ$ も実対称行列であるから ($\because (Q^T AQ)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T AQ$)、 A' は $n - 1$ 次実対称行列である。帰納法の仮定により、 $n - 1$ 次実直交行列 Q' が存在して、

$$Q'^{-1}A'Q' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

このとき $U := Q \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix}$ とおくと、 U は 2 つの実直交行列の積であるから実直交行列で、

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix}^{-1} (Q^{-1}AQ) \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & & Q'^{-1}A'Q' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

B.5 おまけ: 固有値・固有ベクトルの存在

上の証明中で、固有値が存在することは、固有値が特性多項式の根であることに基づき証明したが、特性多項式を用いなくて証明することも出来る。そのアイデア (Rayleigh 商の最大値または最小値を考える) は、無限次元空間への拡張をする場合に重要である。

スピヴァックの有名な教科書 [21] の問題 5-17 は、次のようなものである。

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を対称線型変換, $A = (a_{ij})$ を T の行列とする ($a_{ij} = a_{ji}$).

- (a) $f(x) = \langle Tx, x \rangle = \sum a_{ij} x^i x^j$ に対し, $D_k f(x) = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x^j$ であることを示せ. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ 上での f の最大値を考えることにより, $Tx = \lambda x$ となる $x \in S^{n-1}$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ.
- (b) この x に対し, $V = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, y \rangle = 0\}$ と置くととき, $T(V) \subset V$ および $T: V \rightarrow V$ が対称線型変換であることを示せ.
- (c) T の固有ベクトルから成る \mathbb{R}^n の基底が存在することを示せ.

つまり $|x| = 1$ (これは $\langle x, x \rangle - 1 = 0$ と同値) という条件の下での 2 次形式 $\langle Tx, x \rangle$ の最大値を考えろ、ということである。それは (同次性から) Rayleigh 商

$$R[x] := \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

の最大値を考えることと同値である。最大値の存在は、例えばコンパクト集合上の連続関数が必ず最大値を持つという定理から証明できる。最大値を与える x が、適当な λ に対して $Tx = \lambda x$ を満たすことは Lagrange の未定乗数法から証明できる。以上が上の (a) の解答のシナリオである。

参考文献

- [1] 桂田祐史：行列の固有値問題, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/eigenvalues.pdf> (2006).
- [2] 桂田祐史：一般化固有値問題, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/generalized-eigen/generalized-eigenvalue-problem.pdf> (2003).
- [3] 桂田祐史：熱方程式に対する差分法 II — 円盤における熱方程式 —, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-2.pdf> (1998~).
- [4] R. クーラント, D. ヒルベルト：数理物理学の方法 1-4, 東京図書 (1959-1968), 齋藤利弥 監訳, 丸山滋弥訳.
- [5] Gander, M. J. and Kwok, F.: Chladni Figures and the Tacoma bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates, *SIAM Review*, Vol. 54(3), pp. 573-596 (2012).
- [6] 桂田祐史：Chladni 図形メモ, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/chladni_figures.pdf (2010~).
- [7] Gazzola, F., Grunau, H.-C. and Sweers, G.: *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Springer (2010).
- [8] 近藤恭平：工学基礎 振動論, 培風館 (1993).
- [9] 入江敏博, 小林幸徳：機械振動学通論, 朝倉書店 (2006).

- [10] Chladni, E. F. F.: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, Leipzig: Weidmanns Erben und Reich (1787), European Cultural Heritage Online などを読めます。
- [11] Chladni, E. F. F.: *Die Akustik*, Leipzig: Breitkopf und Härtel (1802, 1830), Waller によると、第2版は初版と同じであるそうです。第2版はネットで読める。
- [12] Chladni, E. F. F.: *Neue Beyträge Akustik*, Leipzig: Breitkopf und Härtel (1817), ペーパーバックで入手出来ますが、ネットでも読めます。
- [13] Germain, S.: *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques* (1821), Mme. Veuve Courcier, Paris とあるけど何だろう？
- [14] Kirchhoff, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **44**, pp. 51–92 (1850).
- [15] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).
- [16] 寺田寅彦：レーリー卿 (Lord Rayleigh), 岩波講座 物理学及び化学 (1930), 青空文庫に収録されている。
- [17] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている。
- [18] Bauer, L. and Reiss, E. L.: Block Five Diagonal Matrices and the Fast Numerical Solution of the Biharmonic Equation, *Mathematics of Computation*, Vol. 26, pp. 311–326 (1972).
- [19] Wheatston, C.: On the Figures obtained by strewing Sand on Vibrating Surfaces, commonly called Acoustic Figures, *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. 123, pp. 593–634 (1833).
- [20] Rossing, T. D. and Russell, D. A.: Laboratory observation of elastic waves in solids, *American Journal of Physics*, Vol. **58** (12), pp. 1153–1162 (1990).
- [21] M. スピヴァック：スピヴァック多変数の解析学 — 古典理論への現代的アプローチ, 東京図書 (2007), 齋藤正彦訳. 1972 年に出版されたものをお色直しして復刊。