

Chladni 図形メモ

桂田 祐史

2010年2月28日, 2022年3月9日

目次

第1章 序	6
1.1 なぜ今これをするのか (2014/6/1)	6
1.2 お気楽に学部卒研	6
1.3 長い道程の始まり	8
1.3.1 Waller 先生を見つける	8
1.3.2 40年前の差分法	9
1.3.3 灯台下暗しで加藤敏夫先生	9
1.4 歴史をひも解く	9
1.4.1 Chladni	9
1.4.2 Sophie Germain	9
1.4.3 Wheatstone	10
1.4.4 Kirchhoff — Kirchhoff の板理論	10
1.4.5 Rayleigh	11
1.4.6 Lamb	11
1.4.7 Ritz	11
1.5 平野君が修士論文でやったこと	12
1.6 小釜君が修士論文でやったこと	12
1.7 二人の修論が終わった後に	13
1.8 遠藤さんの学部卒研	13
1.9 遠藤さんの修士論文	13
1.10 遠藤さんの相手をしていたときの備忘録	13
1.11 ある日半分眠りながら	15
1.12 平井君の修士論文	16
第2章 振動の微分方程式と境界条件	17
2.1 微分方程式	17
2.2 境界条件	18
2.2.1 clamped edge	18
2.2.2 free edge	19
2.2.3 単純支持	19
2.3 無次元化	19
2.3.1 固有振動数	20
第3章 微分方程式、境界条件、弱形式の導出	24
3.1 エネルギー汎関数	24
3.2 境界条件に現れる導関数と部分積分公式	26
3.3 停留条件の部分積分	28
3.4 微分方程式と境界条件の導出	29

第4章	弱形式、微分方程式、境界条件の導出	31
4.1	Rayleigh [1] の §214~217	31
4.2	Rayleigh の、特に境界条件を導くあたりに再挑戦	33
4.3	Gazzola-Grunau-Sweers [2] の §1.1.2	36
4.4	加藤 [3] に載っている変分法的定式化	37
4.5	弱形式	37
第5章	円盤領域の場合の厳密解	38
5.1	Laplacian の固有値・固有関数	38
5.1.1	Dirichlet 境界条件	38
5.1.2	Neumann 境界条件	39
5.2	変形 Bessel 関数	39
第6章	円形板のクラドニ図形の計算	40
6.1	良く知られている結果	40
6.2	準備	41
6.2.1	Bessel 関数, 変形 Bessel 関数	41
6.2.2	$\partial/\partial n, \partial/\partial t$ の極座標表示	41
6.3	固有関数	41
6.4	固有値の Mathematica による数値計算	44
6.5	固有関数の Mathematica による数値計算	52
6.6	以上をまとめたコード	53
6.7	やってみよう	58
6.8	フレッチャー&ロッシング [4] から引用	58
6.9	Leissa 由来のデータの Poisson 比は	59
6.10	なんであの形 (6.5) に書けるのか考える	60
第7章	FreeFem++ による計算	61
7.1	Laplacian の固有値問題	61
7.2	Morley 要素	62
7.3	参考: 重調和作用素の現れる方程式	62
7.4	重調和作用素の固有値問題	64
7.5	計算プロジェクトのための工夫を考える	64
7.6	対称性を持つメッシュ分割	64
7.6.1	hexagon.c	65
7.6.2	BiharmonicEigenvaluesHexagon20150215.edp	66
7.6.3	数値実験	67
7.7	マイナーチェンジ	68
7.7.1	メッシュ分割 polygon20150515.c	68
7.7.2	free edge 境界条件下の重調和作用素の固有値問題 bh_evp20150515.edp	71
7.8	2015/5/19	72
7.8.1	polygon.edp	72
7.8.2	bh_evp_v6.edp	74
7.8.3	compute-all2.edp	75
7.8.4	readtest.edp	76

第 8 章	平野修論第 5 章 free edge を持つ正方形板の固有値問題	77
8.1	free edge 境界条件での固有値問題	77
8.2	差分方程式	77
8.3	境界条件の差分方程式の整理	81
8.3.1	境界から 2 離れたところ	81
8.3.2	境界から 1 離れたところ	82
8.3.3	角の近く	83
8.3.4	この節のまとめ	85
8.4	通常格子点での値のみを用いた差分方程式	86
8.4.1	境界から 2 以上離れた内部のところ	86
8.4.2	境界から 1 離れたところ	87
8.4.3	境界上 (角の近くを除く)	87
8.4.4	角に近いところ	88
8.5	差分方程式の行列表現	89
8.5.1	差分方程式の整理	89
8.5.2	行列化	91
第 9 章	行列の対称化	97
9.1	1次元の Neumann 境界条件付き Laplacian の固有値問題	97
第 10 章	2015 年度応用数理学会で発表した内容	99
第 11 章	Chladni の法則	100
11.1	Chladni の法則とは	100
11.2	平井の修士論文の主な結果	101
付 録 A	1次元の棒の振動	103
A.1	渡部 [5] から $(0, 1)$ での結果	103
A.1.1	対称性の議論のために	106
A.2	Gander-Kwok [6] から $(-1, 1)$ での結果	106
付 録 B	Bauer-Reiss メモ	109
付 録 C	Ritz [7] を読む	112
C.1	Einleitung. – Zusammenfassung der Resultate	112
付 録 D	Waller の諸論文	119
D.1	単語帳	119
D.2	Vibrations produced in bodies by contact with solid carbon dioxide (1933)	119
D.3	The production of sounds from heated metals by contact with ice and other substances (1934)	119
D.4	The production of chladni figures by means of solid carbon dioxide. Part 1: bars and other metal bodies (1937)	120
D.5	Vibrations of free circular plates. Part 1: Normal modes (1938)	120
D.6	Vibrations of free circular plates. Part 2: Compounded normal modes (1938)	120
D.7	Vibrations of free circular plates. Part 3: A study of Chladni's original figures (1938)	121
D.8	Fundamental Vibration of a Rectangular Plate	121
D.9	Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes (1939)	121

D.10 Vibrations of free square plates: part II. compounded normal modes (1940)	121
D.11 A simple method of finding poisson's ratio (1940)	121
D.12 Vibrations of Free Rectangular Plates (1949)	122
D.13 Vibrations of Free Elliptical Plates (1950)	122
D.14 Interpreting Chladni Figures ()	122
付録E Waller 1939 を解読する	123
E.1 実験写真	123
E.2 「Ritz の予想」について	124
E.3 節線パターン (nodal system) の対称性	124
付録F Ritz の数値計算	125
F.1	125
F.2 Mathematica で再現 (その1)	126
F.3 Mathematica で再現 (2)	127
F.4 感想	129
付録G 群論	130
G.1 二面体群	130
G.2 クラインの四元群	131
付録H 遠藤さんの実験	132
付録I リアルな実験	133
I.1 2012/9/21 福岡市	133
付録J Laplacian の場合	134
付録K プログラム	135
K.1 MATLAB プログラム (平野)	135
K.1.1 プログラムの入手法	135
K.1.2 リモート接続で使う その1	135
K.1.3 リモート接続で使う その2	135
K.1.4 plate_c.m — 重調和作用素, clamped edge	135
K.1.5 plate_f1.m — 重調和作用素, free edge の場合の係数行列	140
K.1.6 plate_f2.m — free edge の場合の係数行列 (同じ結果)	142
K.1.7 データ処理 MATLAB プログラム集	144
K.1.8 固有関数を描くための MATLAB プログラム	148
K.2 Mathematica プログラム (小釜)	150
K.2.1 MATLAB で作ったデータの読み方	150
K.2.2 手動で固有関数を混合	151
K.2.3 固有関数を回転	151
K.2.4 重根の固有関数として、自動的 $y = x$ について対称なものを選ぶ	151
K.2.5 固有値を読み込み、重根を探す	151
K.2.6 とにかく描く	152
K.2.7 2012/10/20	153
K.3 遠藤さん	156
K.3.1 小釜プログラムの解説 (2014/12/15)	156

第1章 序

1.1 なぜ今これをやるのか (2014/6/1)

Fourier とほぼ同時代人である Chladni 不思議で印象的な現象を見つけた直後から、なぜそうなるかの追求が始まった。方程式そのものは、19世紀のうちに Kirchhoff-Love のモデル (Germain は入らないのか…) と呼ばれるものが得られた (今でも十分に良いモデルとされている)。考えている境界条件のもとでの重調和作用素の固有値問題が解ければ、Fourier の方法によって解が表示できる。Chladni 図形は固有関数の節であると考えられる。

残念ながら重調和作用素の固有値問題は難しく、紙と鉛筆計算で「解けた」のは円盤の場合だけで、それ以外はもっとも簡単そうな正方形板の場合も解けなかった。1909年の Ritz の論文 (Ritz の方法を打ち立てたことで有名) で、ようやく長方形板の場合を満足に計算できるようになった。

工学的には、板の固有振動数を見積もることが重要で、固有値の精度良い評価が追求されてきたように見受けられるが、印象的な (高い対称性があるからそう感じるのだろうか?) パターンが生じる原因も理解したいと思う。

二十世紀中頃の M. D. Waller の一連の研究は、最後の著作 (逝去後にまとめられた) の表題 “Chladni Figures — A Study in Symmetry” に現れているように、パターンの持つ対称性を理解しようというものである。彼女が述べていることの中には、数学的な結果 (平たくいうと定理) につながるものがあるように思われる。

固有値問題の数値計算を一つの武器としてそれを追求してみたい。まず、Waller はどのような実験結果を得て、何を主張したのか理解し、数値実験により確認する。その上で固有関数の節線パターンの持つ (と期待される) 性質を数学的に記述し、その証明を目指す。

重調和作用素の固有値問題の数値計算は、あまりポピュラーでなく、いくつか工夫、検討すべき点があるので、それについても調べてみたい。

1.2 お気楽に学部卒研

クラドニ図形 (Chladni figures) を知ったのは、小学生向けの図鑑 [8] の中の1ページ「音をアート作品にする」を見る機会があったためである。「美術作家の金沢健一さん」によってつくられた、円形または正方形の鉄板上に白い粉で描かれた印象的な対称性を持つパターンの写真を見ることが出来た。今となっては赤面ものだが、「ラプラシアン固有関数の節線だ」と早とちりした。それは数学のテキストで、長方形領域や円盤領域におけるラプラシアンの固有関数の節線を見たことがあって、それとなんとなく似ていると感じたこと (これは悪くない)、板の振動も膜の振動と同じような波動方程式だと誤解した (これは浅はかだ) せいである。

(Google 日本語入力だと「ふしせん」で節線が出る。しかしスーパー大辞林では「せっせん」となっている。)

調べてみると、クラドニ図形は、物理のテキスト (例えば小橋 [9] など) でも簡単に解説されている。

実験で得られたクラドニ図形と、コンピューターで描いた固有関数の節線パターンを比べてみるのは、学部卒研として適当な「ほどほどの」テーマである、と判断して、学生 (平野君) に勧めてみた。とんでもない間違いだった。



図 1.1: クラドニ図形との出会い 『ずかん百科 科学』

ネットで検索してみると、Chladni の人となりを紹介した Wikipedia の項目や、YouTube の動画に行き着いた。

Chladni (Ernst Florens Friedrich Chladni, 1756 年 11 月 30 日 – 1827 年 4 月 3 日, ドイツの物理学者) は、隕石の地球外起源説の提唱者。木の板をバイオリンの弓でこすったとき、砂が描くパターンを描くことを発見し、「音の理論に関する発見」 [10] (1787), 「音響」 [11] (1802), 「音響についての新しい寄稿」 [12] (1817) などを著した。これらの著作は安価に入手することも出来るし、ネットで読むことも出来る (ドイツ語なのですらすら読むというわけにはいかない…)

(デービッド・アボット編 ; 渡辺正雄監訳. - 原書房, 1986. - (世界科学者事典 / デービッド・アボット編 ; 4).)

一方、YouTube の動画はとても面白い。発表者の詳しいデータがなくて、きちんと紹介できないのが残念である (“Sound Waves” by artgod などは今でも残っているが)。色々な節線パターンが入手できただけでなく、どのような実験で描かれるのかを見ることが出来た。

学生 (平野君と岡田君の共同研究ということになった) の卒研の方は、Laplacian の固有関数の節線パターンを描いてみることから始めた。特に重複固有値 (「縮退している」と言うのか?) でないと、固有関数

$$\sin m\pi x \sin n\pi y \quad (\text{Dirichlet 境界条件の場合})$$

の節線パターンは格子線 $x = j/m$ ($j = 0, 1, \dots, m$), $y = k/n$ ($k = 0, 1, \dots, n$) になってしまうため、そうでないパターンとなるのは、重複固有値の場合でしかありえない。そうして検索させた結果、YouTube 画像の中の Chladni 図形と似ている節線パターンを、3 つほど見つけることが出来た。

しかし 3 つは少ない。どういうことか考えたら、ふいに降りてきた。ラプラシアンじゃない。重ラプラシアンだ。おっとっと。

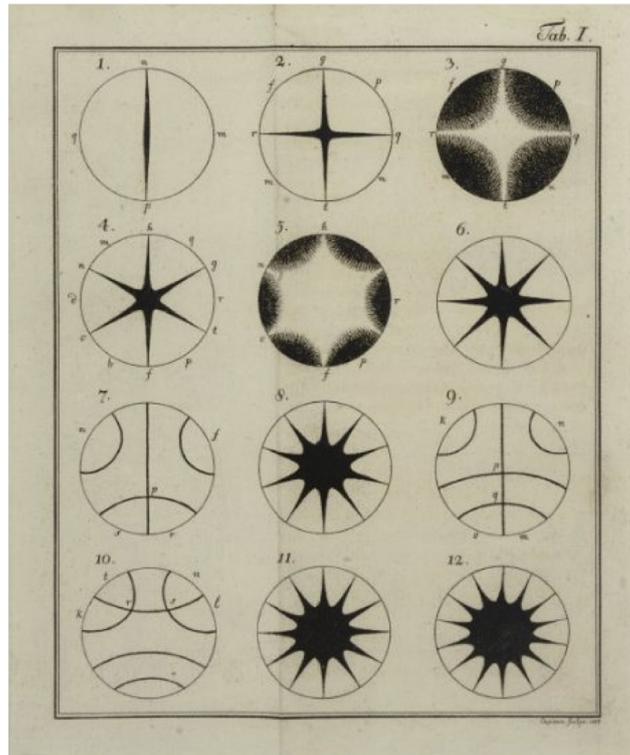


図 1.2: Chladni: Entdeckungen über die Theorie des Klanges (1787) の Tab I

1.3 長い道程の始まり

1.3.1 Waller 先生を見つける

結局、平野君は修士論文のテーマとしてもクラドニ図形を選ぶことになった。そうとなれば徹底的に文献を調べる。

すぐに Mary Désirée Waller (1886¹–1959) を発見する。彼女は Chladni figure に取り憑かれ、Chladni が発見したすべての図を再現した。彼女 “Chladni figures — a Study in Symmetry” [13] (1961) は彼女の没後に出版された。

板を振動させるために、ドライアイスを用いる方法を編み出し、「現代的な」手法 (volve oscillator を用いた周波数の測定、クラドニ図形の写真撮影) を用いてクラドニの実験結果を再現した。

1838 年に円形板について 3 つの論文を出版している。

正方形板については、1939 年に 2 編、19?? 年に?編の論文がある。Chladni と Wheatstone の結果を再現するだけでなく、Ritz の数値計算結果とのつき合わせもしている。さらに対称性に関する考察をしている。

http://cymascope.com/cyma_research/history.html に Mary Waller について書かれている。実験生理学者 Augustus Desiré Waller の娘ということだ。

Augustus Desiré Waller FRS (18 July 1856 – 11 March 1922) was a British physiologist and the son of Augustus Volney Waller. He was born in Paris, France.

父方の祖父 Augustus Volney Waller は神経生理学者として有名らしい。

¹生年のデータがどこに書いてあったか分からない。

1.3.2 40年前の差分法

Bauer-Reiss [14] に clamped edge の場合 (Dirichlet 境界条件) の場合の差分近似による行列とそれに基づく数値計算の結果が載っている。何と言っても 40 年以上前の結果なので、小規模な計算であるが、補外法 (加速法) を用いて高精度の固有値を得たり、正の最小固有値に属する固有関数の符号の問題を取り扱ったり、面白い論文である。そのうち再読してみたい。

1.3.3 灯台下暗しで加藤敏夫先生

有名なテラカン (寺沢 [15]) に収録されている加藤敏夫先生の変分法の解説 [3] は、Rayleigh や Ritz のことを取り上げている。特に第 6 章 §9 はそのものずばり「板の振動」である。

1.4 歴史をひも解く

1.4.1 Chladni

Chladni (Ernst Florens Friedrich Chladni, 1756 年 11 月 30 日 – 1827 年 4 月 3 日, ドイツの物理学者) は、クラドニ図形を発見し、様々なクラドニ図形をスケッチし、その図形が得られるときの音高を記録した。

1787, 1802, 1817 に著書を出版して発表した。([10], [11], [12])。



図 1.3: Ernst Chladni

正方形板に関しては、最後の著作 *Neue Beyträge zur Akustik* (1817) に詳しい。そのクラドニ図形を区別するために $m|n$, $\overline{m|n}$, $\underline{m|n}$ という記号を導入 (後の 2 つは、後で説明する $m|n+$, $m|n-$ に対応する)。

1.4.2 Sophie Germain

Sophie Germain (1776–1831) はいくつかの論文 (1811, 1813, 1815) で板の振動の問題に取り組み、1816 年には賞を獲得した。Lagrange や Poisson にツッコミを入れたらしいけれど、とにかくも微分方程式

$$N^2 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

が得られた。

一応証拠をあげておくと、*Recherches sur la théorie des surfaces élastique* [16] (1821)

Si l'on prend α infini, l'angle ν deviendra nul pour tous les points de la surface; on aura, comme nous l'avons dit n° 12, $r = z$, $x' = x$ et $s = y$. L'équation (A) se réduira alors à

$$(B) \dots N^2 \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2 \frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

図 1.4: Germain [16] の一節、 x'' を x に置き換え忘れていているけど

[16] の改訂版が 1826 年に出ている ([17])。さらに没後 (1830 年) [18] が出版されている。その中で平均曲率が出て来るそうだが、先駆的な仕事ということになるのか？ガウスの有名な論文は 1825, 1827 年だそう。

1.4.3 Wheatstone

“ホイートストン・ブリッジ” で知られている Sir Charles Wheatstone (6 February 1802 – 9 October 1875) は、正方形板の実験を徹底的に行い、Chladni の結果を完全化した。Wheatstone [19] (1833) の中で、Chladni [12] の図を再録し、さらにその続きとなる図を載せた。

1.4.4 Kirchhoff — Kirchhoff の板理論

Gustav Robert Kirchhoff (1824 年 3 月 12 日 – 1887 年 10 月 17 日) は、Kirchhoff [20] (1850) でかなり決定的な寄与をしたらしい。

棒の理論で採用されていた「平面保持の仮定」(Bernoulli-Navier の仮定, 剪断変形による断面の歪みを見無視, 棒の断面は変形後も中立軸と直交性を保つ) を板の理論に取り入れた。薄い板に対しては成り立つと考えてよいとされている。現在、弾性論の世界では、「Kirchhoff 平板」の理論と称されているらしい。

正しい境界条件も導いたとか。また円盤の場合の問題を解いたとも。

Die Gleichungen (19., 20., 21.) im vorigen Paragraphen will ich nun anwenden, um die Gesetze der Schwingungen einer freien, kreisförmigen Scheibe herzuleiten. Aus denselben ergibt sich für die Schwingungen einer beliebig gestalteten Scheibe die partielle Differentialgleichung

$$(1.) \quad 0 = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2}{3} \frac{1+2\theta}{1+\theta} \varepsilon^2 K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right),$$

in welcher ρ die Dichtigkeit der Scheibe bezeichnet, nebst den Grenzbedingungen

$$(2.) \quad \begin{cases} 0 = \frac{1+2\theta}{1+\theta} \left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \sin \varphi \right) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right), \\ 0 = \frac{\theta}{1+\theta} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \varphi \right). \end{cases}$$

図 1.5: Kirchhoff [20] の一節、これなのかなあ？

Kirchhoff-Love の理論とも言われるようだが、Love が何を貢献したのか、まだ良く理解できていない。

1.4.5 Rayleigh

Lord Rayleigh (John William Strutt, third Baron Rayleigh, 1842–1919) は有名な著作 “The Theory of Sound” [1], [21] (1877, 1878) の中の第 IX 章 “vibrations of membranes”, 第 X 章 “vibrations of plates” という 2 つの章で膜と板の振動問題を詳しく取り扱っている。Kirchhoff の議論を整理して提示した、ということらしい。

Ritz [7] (1909) が出来てから、Rayleigh [22] (1911) を書いた。Waller [23] にもほんの少し引用されているが、それだけ読むのと、[22] を通して読むのは少し印象が違った。

Rayleigh については、寺田寅彦の紹介文「レイリー卿」 [24] (青空文庫で読める) がある。寺田寅彦の学位論文は尺八の研究だったそうで、[1], [21] は熟読したと想像出来る。…と想像していたら、小山 [25] という本に出会った (レイリーとその背景であるヨーロッパと寺田寅彦、みたいな本で、漱石のことはあまり書いてないような気がするけれど)。

1.4.6 Lamb

流体力学で有名な Lamb (Sir Horace Lamb, 27 November 1849 — 4 December 1934) は、角点における境界条件の方程式を発表した (Lamb [26], 1889 年)。

1.4.7 Ritz

Walter Ritz (Walther Ritz と綴る, 22 February 1878 – 7 July 1909) は、Ritz [7] (1909) で、自由な縁を持つ正方形板についての Chladni の結果を数値計算で解析した。この論文は Ritz の方法を確立した論文として有名である。

自由な棒の固有関数を u_m として、

$$w_{mn}(x, y) = u_m(x)u_n(y) + u_n(x)u_m(y), \quad w'_{mn}(x, y) = u_m(x)u_n(y) - u_n(x)u_m(y)$$

という関数が板の固有関数の良い近似になることを述べている。自由な縁を持つ正方形板の固有関数の 1 つの完全系を発見した、ということになる？

計算法は概略次のようなものである。

$$\langle u, \mathcal{L}u \rangle = \iint_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1 - \mu) (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) dx dy$$

で定まる \mathcal{L} の固有値 λ_k の近似値を求めるため、 s を十分大きい数として

$$U_s := \left\{ \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^s a_{mn} u_m(x) u_n(y) \mid a_{mn} \in \mathbf{R} \right\}$$

とおいて、

$$\hat{\lambda}_k = \min_{\substack{\dim U=k \\ U \subset U_s}} \max_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\langle u, \mathcal{L}u \rangle}{\langle u, u \rangle}$$

を計算する。

実際に計算してみると、個々の近似固有関数に対し、ある m, n が存在し、 $|a_{mn}|$ と $|a_{nm}|$ が大きいことが分かる。

- 半分くらいは $a_{mn} = \pm a_{nm}$ が成り立ち、固有関数は対称性 (後述) を持つ。
- $a_{mn} = \pm a_{nm}$ が成り立たない場合は対応する固有値が重根。
この場合 $a_{mn} = \pm a_{nm}$ が成り立つように固有関数を作り直せる。



図 1.6: Walter Ritz (敬意を表して)

なお、論文には角点での境界条件の話も載っている (Lamb の本 [26] を引用している)。

Ritz は、Waller にはあまり評価されていないようだが (国が違うせいかと思ったが、ドイツでも Ritz は長い間まともに評価されなかったらしく、かわいそうな気がする)。Gander-Wanner [27] を見ると面白い (Ritz は非常に高く評価されている)。

歴史的なことは、Leissa [28] に詳しく書いてある (Leissa [29], [30] も重要そうだ)。

1.5 平野君が修士論文でやったこと

1. 長方形領域, clamped edge の場合の差分方程式から行列の固有値問題を導き、それが Bauer-Reiss [14] に載っているそれと同じことを確認した。数値計算して得られた近似固有値の精度を評価して、固有関数のグラフや節線を描いた。[14] では、あまり細かく分割していないが、加速をしたせい、高精度の近似値を得ていることが分かった (実際にどのように加速したのか、良く理解できていない)。
2. 正方形領域, free edge の場合の差分方程式から行列の固有値問題を導き、数値計算して得られた近似固有値の精度を評価して、固有関数のグラフや節線を描いた。節線パターンを Waller [23] と比較した。
3. 正方形の形をした鉄板、アルミ板をスピーカーや振動素子の上に乗せて、Mathematica で出力した正弦波の信号をオーディオ用アンプで増幅して送り、振動させるという実験を行った。鉄板は重すぎて十分振動しなかった。アルミ板も鮮明なパターンは作れなかった。

1.6 小釜君が修士論文でやったこと

1. 平野君は重根が得られたときに対応する固有関数を手動でブレンドして (線型結合の係数を上手く選んで)、必要な対称性を持つ固有関数を作り、節線パターンを描いたが、節線が正方形の左下の角を通るなどの条件から、係数が自動的に定められることに気がつき、自動化した。
2. 平野君の計算では、重複度が 2 までの固有値しか求まらなかったが、Poisson 比を変えて得られる固有関数を観察すると、固有関数の順番が入れ替わることに気付き、二分法による計算で重複度が 3 の場合を得た。
3. 弱形式を導き、Fujino-Morley 要素を用いた有限要素法の FreeFem++ プログラムを作成し、長方形板の場合の計算を行った。

4. 実験物理学者 Waller の論文 [23] を解読し、正方形の自由膜の固有関数に関する主張が正しいことを証明した。また自由な縁を持つ正方形の板の固有関数に関する主張の正しさを数値実験により確認した。

1.7 二人の修論が終わった後に

重調和作用素については、数学的には、Gazzola-Grunau-Sweers [2] がまとまっている。しかし、それを読んで Chladni 図形のこと分かるわけではない。

Laplacian について、学部4年生に神保 [31] を読ませた。彼らの卒業研究レポートは桂田 [32] にでも取り込んでおくべきか。

小釜 [33] の第5章にも書いたけれど、Waller [23] (1939) を完全に解読しきっていない (19世紀に書かれた Kirchhoff, Rayleigh がクリアに読めるのに…)。

Waller [13] (1961) も読まない。

Ritz [7] の解読を途中までやっているが、いつかもっと先まで進めよう。

Rayleigh, 加藤も読みかけだな。

$\frac{d}{d\tau}$ と $\frac{d}{ds}$ の違いと言う話もある。

ワイル [34] をもう一冊買って電子化しないと。

Chladni の法則の検証とか。そもそも、あれはどのような法則なのかな。

Waller は (Chladni も?) m, n をパターンから読み取っているけれど、そのやり方が実は良くわからなかった。それを理解して、自動化すると良いと思われる。

1.8 遠藤さんの学部卒研

2013年度、遠藤小欽さんが卒研で Gander-Kwok [6] の論文を取り上げた (遠藤 [35])。正方形領域の場合に、微分方程式と境界条件が導出されること、いわゆる Ritz の方法で近似解法が得られることが読めたはずだけど…

1.9 遠藤さんの修士論文

(準備中)

1.10 遠藤さんの相手をしてきたときの備忘録

やったら良いかと考えること。ときどき検討して、優先順位を入れ替える。

- ときどきこの備忘録を見ることが大事だろう。
- 遠藤さんのすべきこと
 1. (New) 修士論文の節(章)の名前を決める。そこに何を書くかメモっていく。
 - 方程式の導出。弱形式。境界条件 (Springer Lecture Notes のは間違っているのか? 角点の境界条件)。
 - 平野、小釜の結果の紹介。小釜の結果を改善したのものも載せる (重根の場合に対称性のある節線を描く)。

- 円盤の場合の固有値問題の厳密解。
 - Ritz の結果の紹介。計算結果の再現もつける。
 - Waller の結果の紹介。
 - 自由な縁を持つ正方形板の Chladni 図形を、各種方法で求めたものの比較。Chladni のスケッチ、Waller の実験写真、膜の場合の図、棒の固有関数による w_m と w_{mn} と w'_{mn} Ritz の方法による計算、差分法による計算、有限要素法による計算
 - Fujino-Morley 要素とは。
 - D_n 対称メッシュ分割について。
2. $m|m$, $m|n+$, $m|n-$ のパターンの早見表を作る。つまりパターンを見て、 m , n , $+$ か $-$ を判断できるダイアグラムを作る。Waller 先生のダイアグラムの拡張 ($0 \leq m, n \leq 6$ よりも広い範囲)。図自身は平野 MATLAB プログラム+遠藤 Mathematica 作図プログラムによるもの。
 3. 差分法の例の 200 個の固有関数の図、 $m|n$, $m|n+$, $m|n-$ という記号を書き込む。…途中でやめたけれど最後まで！
 4. 実験で正方形板の中心を節にするように工夫する。ループで吊るす？糸か釣糸か。支持をするために何か必要か。中心が節の場合のパターンを得るために、中心を両面テープで抑えるとか。加振についても両面テープで板をつかむとか。
 5. 実験がうまく行くかはさておき、数値実験の信頼性を高めることは大事だ (プログラムのバグは直ったけれど、どの程度の精度なのか、差分法と比較したり (これは正方形板特有)、分割を倍々ゲームにしたり (これはどういう領域でも可能) して、求める。)
 6. 遠藤さんの修論の目玉は正多角形だろう。間違えていても良いから早めに「法則」を提出してもらおう。それを検討する状態にならないと頭が働かないだろう。

● 桂田がやる？

- お買い物。 http://www.rika.com/product/prod_detail1.php?catalog_no=A05-7631#supplie とか。
 - * NaRiKa ハンディ低周波発信器 CR-T, ¥29,800
 - * NaRiKa ハンディ低周波発信器用 AC アダプタ, ¥1,200
 - * NaRiKa バイブレーター (励振器) FB-8N ¥29,000http://www.rika.com/product/prod_detail1.php?catalog_no=C15-4255
- FreeFem++ の連立 1 次方程式のソルバー選択のやり方を理解する。
これは半日仕事か？どこまで大きな計算が出来るの？…一応

```
load "UMFPACK64"
defaultttoUMFPACK64();
```

で大規模計算が走るのだけれど、CPU は 100% にしかならない。これが何とかならないだろうか。

あれ？そもそも正しく計算出来ないというか、終わらないじゃん。

- なぜ、あれで固有値・固有関数が計算できるのか。加藤テキストの講義をする？まずは自分で良く理解することからか？
- 神保さんのテキストの講義もするのか？
- 遠藤さんが takebe を使って数値計算できるように。

- 円盤の場合の厳密解の検討。clamped であれば導出法はさておき、どこかに式があったっけ。free edge の場合は？ 適当なのを探しだして、遠藤さんに渡す。
- Waller の compounded (1939) の解説。これは短いし (8 ページの半分が写真と表のような)、実験をする立場からは重要そう。ゼミで 1 回使って読んでみる。
- Ritz の論文の解説
やり方を検討して、遠藤さんにやってもらう。例の法則は Ritz が言ったのかどうか。Waller 先生の手柄にして良いのか。その切り分けは重要だと思う。
- Ritz の数値計算の検討。目的は例の法則の証明。そもそも日本語でやり方をきちんと書いておく (ずっとサボっている…)。係数はどう並べてあるのか。どこまで規模を大きくして計算できるのか (Mathematica で効率的に計算できるのか, 場合によっては MATLAB)。精度はどれくらいか。近似解の係数の対称性の検討。
- Waller の訳をまとめる (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/wayaku-waller1939.pdf>)
小釜君のに入っていない部分は遠藤さんに出してもらおう。そして遠藤さんのと突き合せて推敲する。
- Waller (1961) の解説。全体として何が書いてあるか。時間をかけて読むべきところはあるか。iPad でも買って暇を見つけて読むのかな。
- そういえば藤田先生の論文でのがあったね。
最後の Kato, Fujita, Nakata and Newman (1957) なんて面白いかも。
- Monoskop (a wiki for collaborative studies of art, media and the humanities) の Ernst Chladni の項² を読んで有益なことが書いてないか探す。これは遠藤さんにも読んでおいてもらう。
- Chladni の 4 作 (1787, 1802, 1817, 1821) を見る。まずは印刷か? 2 冊目のは Google のが軽い (でもそもそも 400 頁超だ)。これは難儀だ。
- 平野プログラム $N = 2560$ は動かないか?
- 固有値の補外 (外挿、加速) は? Bauer-Reiss の論文の後追いをしたい。我々がやれば高精度の固有値が得られそうである。何かで勉強するのかな? 伊理先生の本かな? やはり数値計算の本は本棚に並べない。
- Gander-Kwok で気になることが書いてあったような気がする。確認。
- Chladni の $6|2$ が気になる。これはシンプルなので、 $\overline{6|2}$, $\underline{6|2}$ が出て来るのは当然だけど、そうでない格子状の $6|2$ がありうるのか。

1.11 ある日半分眠りながら

膜・板はどのように振動するのか。

固有振動の重ね合わせである。(厳密には非線形なので重ね合わせできないかもしれないが、第 1 近似としてはよいだろう。)

では固有振動はどんなものか。

²http://monoskop.org/Ernst_Chladni

境界条件があるので、板の場合の $A_{\text{板}} = \Delta^2$ が、膜の場合の $A_{\text{膜}} = -\Delta$ と、 $A_{\text{板}} = \Delta^2$ の間に、 $A_{\text{板}} = A_{\text{膜}}^2$ の関係があるわけではないが、

(膜の固有値)² ~ 板の固有値,
膜の固有関数 ~ 板の固有関数

がおおむね成り立つ。

Kirchhoff (1850) は地平線の彼方まで見渡した。すごい。でも足元は見(え)なかった。我々はコンピュータで足元を照らせる(数時間たわむれているだけで、1万個以上の固有値が得られる)。

free edge では、 $n \geq 2$ のとき $h = m - 1$ として $k_{nm} \sim \frac{(n+2h)\pi}{2}$ が成り立つ。

もしかするとそういう定理が発見できたのかも。証明するまでは予想であるが。何とか証明できないかな。

Ritz (1909) のときも感じたことであるが(正方形板の場合を解決)、物理学者は大局を覗いているが、それで満足して定理には出来ていないところがある。それが出来れば。

1.12 平井君の修士論文

第2章 振動の微分方程式と境界条件

この章はしばらくある程度の頻度で更新するので、組版の日付を書いておく：2022年3月9日

2.1 微分方程式

板の振動を支配する微分方程式は

$$(2.1) \quad D\Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) = 0.$$

ただし

$$(2.2) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

E はヤング率, h は板の厚さ, ρ は密度, μ はポアソン比である。

注意 2.1.1 (上の微分方程式の根拠) この方程式は最初に見たのがどこであるか、はっきりしないが、Rayleigh [1] に同じと考えられる式が載っているし、近藤「振動論」[36] 第8章「平板の曲げ振動」にも、それをより一般化した式

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + p_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} \right) = 0$$

が載っていて、「 $p_z = m_x = m_y = 0$ とおき、まあ、回転慣性を無視することにして $\rho I = 0$ とおくことにより、

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

となる。」と書いてある。 D については、「ここに

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

が得られる。 D が平板の曲げ剛性である。」と書いてある。この式からも想像できるが、「板厚 h , ヤング率 E , ポアソン比 ν , 密度 ρ をもつ…」と仮定してある。

なお、近藤8章の冒頭には「断面はせん断変形しないとする、キルヒホッフの仮説に従う平板の、曲げ振動について説明する。」とあり、第9章には「断面のせん断変形を考慮した、Mindlin 平板 (Mindlin plate) の曲げ振動を考える。」となっている。■

ヤング率は弾性体を引き延ばしたときの弾性率である。

ポアソン μ 比は弾性体を引き延ばしたときの縦のひずみと横のひずみの比である。ポアソン比は無次元数で、金属では 0.3 くらいの値を取る。

余談 2.1.2 (ポアソン比をめぐって) Ritz が有名な [7] で採用した値は $\mu = 0.225$ である。Gander-Kwok [6] には、“which Ritz took to be 0.225 in order to match Chladni’s results” とか、

Ritz did in fact solve an inverse problem himself: to match his calculations with Chladni's experimental data, he needed the value of the material density. However, Chladni had not stated in his work if the plates he used were made of glass or metal, or both. So in order to determine this, Ritz compared his pitch calculations to the pitch values in the tables of Chladni, and found that for agreement, the density must have been that of glass (Bramble [37]).

と書いてある (Ritz を良く読まないといけないけれど、まず音高から密度を推定してガラスと判断して、それで選んだ Poisson 比で計算して結果がうまく合うことを確認したということかな?)。

一口にガラスと言っても、色々の組成があり、Poisson 比の取る値もそれなりに幅広いようだが、ネットで発見した親切な資料 [38] で、板ガラスのポアソン比を 0.23 としているものがあったので、Ritz の値の選定にはうなづけるところがある。

Waller [23] には、“materials such as glass or steel ($\sigma \doteq \frac{1}{4}$) as compared with brass ($\sigma \doteq \frac{1}{3}$)” というくだりがあるが、次の数表を見ると、ちょっと苦しい近似だと思われる。(そもそも、分数で書くのって、おかしくないですか?) 彼女は、Poisson 比の測定方法に関する論文 [39] を書いているので、この辺はその当時の測定技術のレベルがその程度だった、ということだろうか?

これまでの研究で現れた値: ガラスの場合の $\mu = 0.225$ (Chladni の実験?, Ritz の数値計算), 平野君が差分法の数値計算で採用した $\mu = 0.3$, 遠藤さんが実験で採用したアルミニウムの場合の $\mu = 0.345$, Waller がしばしば実験した真鍮の場合の $\mu = 0.35$. ■

材質	ヤング率 ($\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$)	ポアソン比	密度 (g cm^{-3})
鋼鉄	$20.1 \sim 21.6 \times 10^{10}$	0.28 ~ 0.30	7.87
真鍮	10.06×10^{10}	0.35	8.56
アルミニウム	68.3×10^9	0.345	2.70

表 2.1: いくつかの物質の物理定数

$$(2.3) \quad c := \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = h\sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}}$$

とおくと (この c は Waller [23] の c とは異なる)

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 w.$$

SI 単位系では、 c の単位は

$$\text{m} \sqrt{\frac{\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}}} = \text{m}^2 \text{s}^{-1}.$$

$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ は Pa と書ける。G Pa = 10^9 Pa という単位を使っている資料があった。

2.2 境界条件

境界条件は (a) clamped edge, (b) free edge, (c) 単純支持の場合がある。

2.2.1 clamped edge

clamped edge はいわゆる Dirichlet 境界条件になる

$$(2.5) \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)).$$

2.2.2 free edge

free edge は

$$(2.6) \quad \mu \Delta w + (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \quad (\text{on } \partial\Gamma),$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1 - \mu) \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial \sigma} \right) = 0.$$

σ は接線方向の微分を表すが、弧長で微分するのとどう違うのだろうか？

2.2.3 単純支持

(準備中)

2.3 無次元化

方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 w, \quad c = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}$$

の無次元化を試みよう。 α を後で定める定数として

$$\bar{x} := \frac{x}{L}, \quad \bar{y} := \frac{y}{L}, \quad \bar{t} := \alpha t, \quad \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) := w(x, y, t)$$

と変数変換してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$$

となるので、

$$\Delta^2 w = \frac{1}{L^4} \Delta^2 \bar{w}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2}.$$

ゆえに

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{c^2}{L^4} \Delta^2 \bar{w},$$

すなわち

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = \left(\frac{c}{\alpha L^2} \right)^2 \Delta^2 \bar{w} \quad ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty)).$$

もしも

$$\alpha = \frac{c}{L^2} = \frac{h}{2L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}$$

と α を定めれば、

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = \Delta^2 \bar{w} \quad ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty)).$$

α の単位は s^{-1} である。ヤング率 $20.1 \times 10^{10} [\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$, ポアソン比 0.30, 密度 $7.87 \times 10^{-3} \times (0.01\text{m})^{-3} = 7.87 \times 10^3 \text{kg m}^{-3}$ の鉄で、1辺 $L = 1 \text{ m}$, 厚さ $h = 1 \text{ mm} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ の正方形板を作ると、

$$\alpha = \frac{10^{-3}}{1^2} \sqrt{\frac{20.1 \times 10^{10}}{12 \times 7.87 \times 10^3 (1 - 0.3^2)}} \doteq 1.529 \quad (\text{単位は Hz}).$$

2.3.1 固有振動数

(2.8) の解は、(領域 $(0, 1) \times (0, 1)$ における固有値 λ_n , 固有関数 φ_n を用いると)

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \sum_n \left(a_n \cos \sqrt{\lambda_n \bar{t}} + b_n \sin \sqrt{\lambda_n \bar{t}} \right) \varphi_n(\bar{x}, \bar{y})$$

と表せるので、

$$w(x, y, t) = \sum_n \left(a_n \cos \alpha \sqrt{\lambda_n t} + b_n \sin \alpha \sqrt{\lambda_n t} \right) \varphi_n \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L} \right).$$

第 n 固有振動の固有振動数 f_n は $2\pi f_n = \alpha \sqrt{\lambda_n}$ より、

$$(2.9) \quad f_n = \frac{\alpha \sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{h}{4\pi L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \sqrt{\lambda_n} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{4\pi \sqrt{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{h}{L^2}}.$$

同じ材質で作った正方形板の周波数は、板の厚さに比例し、正方形の1辺の長さの二乗 (面積?) に反比例する、ということが出来る。

材質毎に

$$\beta := \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}}$$

の値を求めておくべきかもしれない。厚さ h , 辺の長さ L が与えられたら、

$$\alpha_{h,L} := \frac{h}{L^2} \beta$$

を計算して

$$f_n = \frac{\alpha_{h,L}}{2\pi} \sqrt{\lambda_n}.$$

まとまりがないけれど… λ_n は、無次元化した固有値問題の解で、Poisson 比 μ に依存する。固有値問題には Poisson 比以外の物理定数は含まれていないことに注意しよう。一方、 f_n は振動問題の解で、Poisson 比以外にも、密度や Young 率などの色々な物理定数を含んでいる。

$$f_n = \alpha \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$$

という式の各因子の物理定数への依存を良く理解すること。

注意 2.3.1 Ritz [7] には、

$$\lambda = \frac{12\pi^2 \nu^2 (1-\mu^2) \rho}{E h^2}$$

という式が書いてある。(2.9) を λ_n について解くと、

$$(\#) \quad \lambda_n = \frac{(4\pi L^2 f_n)^2 \cdot 3\rho(1-\mu^2)}{E h^2} = \frac{48\pi^2 f_n^2 L^4 (1-\mu^2)}{E h^2} \rho.$$

Ritz の仮定が判然としないのだが、厚さが $2h$ で、 x と y (上の記号で言うと \bar{x} と \bar{y} となる?) の範囲が $(-1, 1)$ であるようだ¹。

¹明記されていないように思われるが。例えば 0 でない最小固有値は $\lambda_1 = 12.43$ とあり、平野君のプログラムによる計算値 $199.265587 \dots$ (これは $(0, 1) \times (0, 1)$ の場合なので、 $1/16$ 倍して) から得られる $12.4540 \dots$ と良く合っている。

$(-1, 1) \times (-1, 1)$ での固有値 λ は、 $(0, 1) \times (0, 1)$ の固有値 λ_n の $\frac{1}{16}$ になるので、(♯) を認めれば

$$\lambda = \frac{\lambda_n}{16} = \frac{1}{16} \cdot \frac{48\pi^2 \nu^2 L^4 (1 - \mu^2) \rho}{E(2h)^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{12\pi^2 \nu^2 L^4 (1 - \mu^2) \rho}{Eh^2}$$

となるはずである。Ritz は $L = 2$ (単位は例えば m) としていた、ということかな? そうすると、 $L^4 = 16$ で分母の 16 とキャンセルして、上の枠内の式が得られる。まあ、それは考えられなくもない。■

$\mu = 0.3$ のとき、0 でない最小固有値は $\lambda_4 \doteq 181.387$ であるから、1 辺の長さ 1m, 厚さ 1mm の鉄の板の、最小固有振動数は

$$f_4 = \frac{\alpha \sqrt{\lambda_4}}{2\pi} \doteq \frac{1.529 \times \sqrt{181.387}}{2 \times 3.1415} \doteq 3.277 \quad (\text{単位は Hz}).$$

結構低いものだ。 $h = 3 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$ だと、 $\frac{3}{0.5^2} = 12$ 倍になる。

Waller は、次の形の式を掲げて議論している。

$$f = \gamma c \frac{h}{L^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

この c は (2.1) 中の c とは異なることに注意する。Waller は速度と呼んでいるが (c は速度の次元を持つ)、実際に波の速さを意味するか良く分からない。また γ については文字を当ててはいなくて、場合毎に数値を書いている。

Waller [23] で与えられている式

1 辺 (length) ℓ , 板の厚さ (thickness) t , ポアソン比 σ の正方形板の基本周波数 (the fundamental frequency) について。

$\sigma = \frac{1}{4}$ のとき

$$f = 0.6577 c \frac{t}{\ell^2}.$$

$\sigma = \frac{1}{3}$ のとき

$$f = 0.6277 c \frac{t}{\ell^2}.$$

f は σ について単調減少するようだ。

(2.9) から

$$\gamma = \frac{\sqrt{\lambda_4}}{4\pi\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

とおくと、

$$f = \gamma c \frac{h}{L^2}$$

である。

μ	$\lambda_4(\mu)$	γ
0	250.35752	0.726959
0.05	239.36257	0.711707
0.1	228.15271	0.697469
0.15	216.74017	0.684133
0.2	205.13619	0.671607
0.225	199.26559	0.665621
0.25	193.35103	0.659807
0.3	181.39429	0.648665
0.33333	173.33222	0.641571
0.35	169.27483	0.63812
0.4	157.00102	0.628118
0.45	144.58035	0.618613
0.5	132.01995	0.609563

表 2.2: 単位正方形の最小正固有値 $\lambda_4(\mu)$ と γ (平野の差分法プログラムによる)

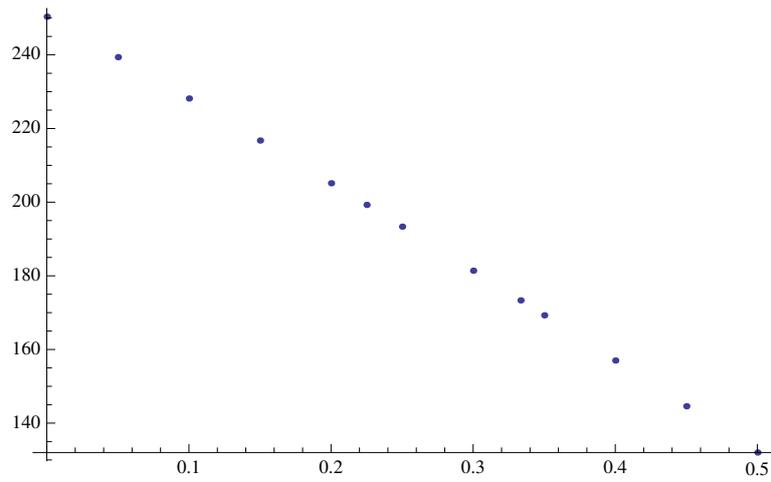


図 2.1: 最小固有値の Poisson 比依存性 (きれいな 1 次の関係)

```
lambdas = {{0, 250.35752}, {0.05, 239.36257}, {0.1, 228.15271},  
           {0.15, 216.74017}, {0.2, 205.13619}, {0.225, 199.26559},  
           {0.25, 193.35103}, {0.3, 181.39429}, {0.33333, 173.33222},  
           {0.35, 169.27483}, {0.4, 157.00102}, {0.45, 144.58035}, {0.5, 132.01995}}  
ListPlot[lambdas]  
  
Table[Sqrt[  
  lamdas[[i]][[2]]/(4 Pi Sqrt[3 (1 - lamdas[[i]][[1]]^2)]), {i, 1,  
  Length[lamdas]}]
```

第3章 微分方程式、境界条件、弱形式の導出

3.1 エネルギー汎関数

曲面 S の主曲率半径を ρ_1, ρ_2 とするとき、 S が持つ弾性エネルギーは (曲率の正值2次形式の積分みたいなことが書いてあった。もう一度確認する。)

$$V = \frac{1}{2} \int_S D \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2\mu}{\rho_1\rho_2} \right) d\sigma = \frac{D}{2} \int_S \left[\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{\rho_1\rho_2} \right] d\sigma.$$

ただし

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

ここで E は Young 率, μ は Poisson 比, h は板の厚さである。

E, h は正の定数、 μ は $-1 \leq \mu < 1$ を満たす定数とする (μ の範囲については確認する)。

曲面 S が $z = u(x, y)$ というグラフである場合は、微分幾何で学ぶように d

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy$$

であるから、

$$V = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \frac{(\Delta u)^2 - 2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx dy.$$

そこで微小な変形しか考えないことにして、次の汎関数で近似する。

$$(3.1) \quad V[u] := D \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1-\mu)(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) \right] dx dy.$$

V の定義は、もともとは次のように書いていたのだけど、(3.1) の方 (そう書く人は少なくない) が分かりやすい気がしてきた。

$$V[u] := \frac{D}{2} \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)] dx dy.$$

補題 3.1.1 V を (3.1) で定義するとき、 $u, v \in H^2(\Omega)$ に対して

$$V[u+v] - V[u] - V[v] = D \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1-\mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy.$$

証明 単純な計算である (省略する)。以下は気分的な説明である。

$$\frac{D}{2} \{ (\Delta u + \Delta v)^2 - 2(1-\mu) [(u_{xx} + v_{xx})(u_{yy} + v_{yy}) - (u_{xy} + v_{xy})^2] \}$$

のクロス・タームは

$$\frac{D}{2} \{2\Delta u \Delta v - 2(1 - \mu) [u_{xx}v_{yy} + v_{xx}u_{yy} - 2u_{xy}v_{xy}]\}.$$

もとの2乗の形の項からは2という因子が出て来る。■

今後何度も登場するので

$$(3.2) \quad V[u, v] := \frac{D}{2} \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu) (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy$$

と定義しておく。この記号を用いると、上の補題の結論は、

$$V[u + v] - V[u] - V[v] = 2V[u, v]$$

と書ける。

系 3.1.2 $f \in L^2(\Omega)$ とする。

$$J(u) := V[u] - \iint_{\Omega} f v dx dy \quad (u \in H^2(\Omega))$$

で J を定義するとき、 $u, v \in H^2(\Omega)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} J(u + \varepsilon v) - J(u) &= 2\varepsilon V[u, v] + \varepsilon^2 V[v] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= \varepsilon \iint_{\Omega} \{D [\Delta u \Delta v + (1 - \mu) (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] - f v\} dx dy \\ &\quad + \varepsilon^2 V[v]. \end{aligned}$$

証明 (簡単だけれど、見て式が正しいと納得できるように書く。)

$$\begin{aligned} J(u + \varepsilon v) - J(u) &= V[u + \varepsilon v] - \iint_{\Omega} f(u + \varepsilon v) dx dy - \left(V[u] - \iint_{\Omega} f u dx dy \right) \\ &= V[u + \varepsilon v] - V[u] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= 2V[u, \varepsilon v] + V[\varepsilon v] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy \\ &= 2\varepsilon V[u, v] + \varepsilon^2 V[v] - \varepsilon \iint_{\Omega} f v dx dy. \blacksquare \end{aligned}$$

例えば、 V や J が u で最小であるための条件は、それぞれ

$$(3.3) \quad V[u, v] = 0 \quad (v \in H^2(\Omega))$$

あるいは

$$(3.4) \quad 2V[u, v] - \iint_{\Omega} f v dx dy = 0 \quad (v \in H^2(\Omega))$$

である ($f = 0$ と考えれば、前者は後者に含まれる)。

u が高い微分可能性を持つと仮定して、“部分積分”により $V[u, v]$ を変形する公式を求めることを目標にする。

3.2 境界条件に現れる導関数と部分積分公式

領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとき、 $\partial\Omega$ 上の各点 $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$ で外向き単位法線 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ が定まり、 $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ は正の向きの単位接線ベクトルである。

多角形領域でも扱えるように、 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級の閉曲線 $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) であるとする。すなわち、 φ は連続であり、ある $\{t_j\}_{j=0}^n$ が存在して、

$$(i) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

$$(ii) \quad \varphi \text{ を各小区間 } [t_{j-1}, t_j] \text{ に制限したとき、} \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級 } (j = 1, \dots, n)$$

が成り立つ。

$\partial\Omega$ 上の角点でない任意の点 \mathbf{a} に対して、 \mathbf{a} を原点とし、 $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}$ 方向の座標軸を持つ “ $n\sigma$ 平面” を導入する。変数変換の式は

$$(3.5) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{a} + n\boldsymbol{\nu} + \sigma\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

逆変換は

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} n \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}.$$

f は $\bar{\Omega}$ の近傍で滑らかな関数とする。

$$(3.7) \quad \tilde{f}(n, \sigma) := f(\mathbf{a} + n\boldsymbol{\nu} + \sigma\boldsymbol{\tau}) = f(\alpha + n\nu_1 - \sigma\nu_2, \beta + n\nu_2 + \sigma\nu_1).$$

とおくと、

$$(3.8) \quad \tilde{f}_n = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} := \nu_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tilde{f}_\sigma = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} := \tau_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

これは逆向きに解ける。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$(3.9) \quad f_x = \nu_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} - \nu_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}, \quad f_y = \nu_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} + \nu_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}.$$

高階導関数も計算しておく。

$$f_n = \nu_1 f_x + \nu_2 f_y, \quad f_\sigma = -\nu_2 f_x + \nu_1 f_y$$

であるから

$$(3.10) \quad u_{nn} = \nu_1(f_{xx}\nu_1 + f_{xy}\nu_2) + \nu_2(f_{yx}\nu_1 + f_{yy}\nu_2) = \nu_1^2 u_{xx} + 2\nu_1\nu_2 u_{xy} + \nu_2^2 u_{yy},$$

$$(3.11) \quad u_{\sigma\sigma} = -\nu_2(-\nu_2 u_{xx} + \nu_1 u_{yx}) + \nu_1(-\nu_2 u_{xy} + \nu_1 u_{yy}) = \nu_2^2 u_{xx} + \nu_1 u_{yy} - 2\nu_1\nu_2 u_{xy},$$

$$(3.12) \quad u_{\sigma n} = \nu_1(-\nu_2 u_x + \nu_1 u_y)_x + \nu_2(-\nu_2 u_x + \nu_1 u_y)_y = -\nu_1\nu_2 u_{xx} + (\nu_1^2 - \nu_2^2) u_{xy} + \nu_2\nu_1 u_{yy}.$$

命題 3.2.1 区分的に滑らかな曲線 C の始点、終点を a, b とするとき、

$$(3.13) \quad \int_C \frac{\partial f}{\partial \sigma} ds = f(b) - f(a),$$

$$(3.14) \quad \int_C \frac{\partial f}{\partial \sigma} g ds = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_C f \frac{\partial g}{\partial \sigma} ds.$$

証明 ベクトル解析で良く知られているように

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial \sigma} ds = \int_C \text{grad } f \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_C \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = f(b) - f(a).$$

積の微分法

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (fg) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} g + f \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

より

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} g + f \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) ds = \int_C \frac{\partial}{\partial \sigma} (fg) ds = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

移項して (3.14) を得る。■

系 3.2.2 閉曲線 $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) が区分的に滑らか、すなわち $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ が存在して、各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ に制限したとき φ が滑らかとするとき、

$$(3.15) \quad \int_C \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_j^-) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_j^+) \right) v(p_j) - \int_C \frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \sigma^2} v ds.$$

ただし $p_j = \varphi(t_j)$ であり、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_j^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (\varphi(t_j - \varepsilon)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_j^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (\varphi(t_j + \varepsilon))$$

とおいた。

証明 $[t_{j-1}, t_j]$ の範囲を C_j と表すとき、 C_j は滑らかなので、

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} v \right]_{p_{j-1}}^{p_j} - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \sigma^2} v ds \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_j^-) v(p_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma} (p_{j-1}^+) v(p_{j-1}) - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \sigma^2} v ds. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds &= \sum_{j=1}^n \int_{C_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds \\
 &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j-})v(p_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j-1+})v(p_{j-1}) - \int_{C_j} \frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \sigma^2} v ds \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j+}) \right) v(p_j) - \int_C \frac{\partial^3 u}{\partial n \partial \sigma^2} v ds.
 \end{aligned}$$

(閉曲線であるから $p_0 = p_n$ に注意する。) ■

3.3 停留条件の部分積分

命題 3.3.1 (停留条件の部分積分公式) 領域 Ω が区分的に滑らかな境界を持つとき、 $\bar{\Omega}$ の近傍で十分滑らかな u, v に対して、

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad & \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - fv] dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u - f)v dx dy - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1 - \mu)u_{\sigma\sigma n} \right) v ds \\
 & \quad + \int_{\partial\Omega} (\mu\Delta u + (1 - \mu)u_{nn}) \frac{\partial v}{\partial n} ds + (1 - \mu) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j-}) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_{j+}) \right) v(p_j).
 \end{aligned}$$

証明 Green の公式

$$\iint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds$$

に $f = \Delta u, g = v$ を代入して

$$\iint_{\Omega} \Delta u \Delta v dx dy = \iint_{\Omega} (\Delta^2 u)v dx dy + \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) v ds.$$

一方、

$$2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)$$

であるから、発散定理

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j ds$$

より

$$\iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy = \int_{\partial\Omega} [(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x)\nu_1 + (u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)\nu_2] ds.$$

右辺に

$$v_x = \nu_1 \frac{\partial v}{\partial n} - \nu_2 \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \quad v_y = \nu_2 \frac{\partial v}{\partial n} + \nu_1 \frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

を代入して、 $\frac{\partial v}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial \sigma}$ について整理すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ (2\nu_1\nu_2u_{xy} - \nu_2^2u_{xx} - \nu_1^2u_{yy}) \frac{\partial v}{\partial n} + [-\nu_1\nu_2(u_{xx} - u_{yy}) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)u_{xy}] \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right\} ds. \end{aligned}$$

(3.11), (3.12) より

$$\iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) dx dy = \int_{\partial\Omega} \left(-u_{\sigma\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} + u_{\sigma n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) - fv] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx dy + \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) v ds + (1 - \mu) \int_{\partial\Omega} \left(-u_{\sigma\sigma} \frac{\partial v}{\partial n} + u_{\sigma n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) ds \\ &\quad - \iint_{\Omega} fv dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\Delta^2 u - f) v dx dy + \int_{\partial\Omega} (\Delta u - (1 - \mu)u_{\sigma\sigma}) \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) v ds + (1 - \mu) \int_{\partial\Omega} u_{\sigma n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds. \end{aligned}$$

右辺の最後の項を

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_{\sigma n} \frac{\partial v}{\partial \sigma} ds &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_j^-) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_j^+) \right) v(p_j) - \int_{\partial\Omega} u_{\sigma n \sigma} v ds \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_j^-) - \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \sigma}(p_j^+) \right) v(p_j) - \int_{\partial\Omega} u_{\sigma \sigma n} v ds \end{aligned}$$

と変形して結論を得る。 ■

3.4 微分方程式と境界条件の導出

板の振動問題においては、仮想仕事の原理から、各時刻において、試験関数 v に対して

$$\delta V - \iint_S Z \rho h v d\sigma - \iint_S \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v d\sigma = 0.$$

変分 δV は、

$$\delta V = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \iint_{\Omega} [\Delta w \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] dx dy.$$

$$(3.17) \quad D := \frac{Eh^2}{12\rho(1 - \mu^2)}$$

とおき (これは §3.1 の D とは異なる)、命題 3.3.1 を使って変形すると、

$$\begin{aligned} (3.18) \quad & \iint_{\Omega} \left(D \Delta^2 w - Z + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) v dx dy - D \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1 - \mu) w_{\sigma\sigma n} \right) v ds \\ &+ D \int_{\partial\Omega} (\mu \Delta w + (1 - \mu) w_{nn}) \frac{\partial v}{\partial n} ds \\ &+ D(1 - \mu) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial \sigma}(p_j^-, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial \sigma}(p_j^+, t) \right) v(p_j). \end{aligned}$$

これが任意の試験関数 v に対して成立することから

$$(3.19) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + Z \quad ((x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(3.20) \quad \mu\Delta w + (1 - \mu)w_{nn} = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)),$$

$$(3.21) \quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta w + (1 - \mu)w_{\sigma\sigma n} = 0 \quad ((x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)),$$

$$(3.22) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n\partial\sigma}(p_{j-}, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial n\partial\sigma}(p_{j+}, t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1; t > 0).$$

同次問題 (外力項 $Z = 0$ とした場合) を Fourier の方法で解こうとしたとき現れる固有値問題は、(固有値を λ , 固有関数を u として)

$$(3.23) \quad \Delta^2 u = \lambda u \quad ((x, y) \in \Omega),$$

$$(3.24) \quad \mu\Delta u + (1 - \mu)u_{nn} = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega),$$

$$(3.25) \quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1 - \mu)u_{\sigma\sigma n} = 0 \quad ((x, y) \in \partial\Omega),$$

$$(3.26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n\partial\sigma}(p_{j-}) = \frac{\partial^2 u}{\partial n\partial\sigma}(p_{j+}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

これに対する弱形式は、(3.18) から (3.19)–(3.22) を導くのと、ちょうど逆方向の変形をして、

$$V[u, v] = \lambda \iint_{\Omega} uv \, dx \, dy \quad (v \in H^2(\Omega)).$$

すなわち

$$(3.27) \quad \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v + (1 - \mu)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})] \, dx \, dy - \lambda \iint_{\Omega} uv \, dx \, dy = 0 \quad (v \in H^2(\Omega)).$$

第4章 弱形式、微分方程式、境界条件の導出

これは古くなったので、適当に処分。Rayleigh の訳は残すけれど、付録に回すとか。

4.1 Rayleigh [1] の §214~217

Green の方法にしたがって、厚さが一定の、薄い一様で等方的な固体の板の平衡や運動の方程式を作るために、曲げのポテンシャルエネルギーが必要である。

いかなる単位面積部分についてもポテンシャルエネルギー V は、主曲率の正の 2 次同次の対称な関数である (正定値 2 二次形式ということだな)。こうして、 ρ_1, ρ_2 を主曲率半径とすると、

$$(4.1) \quad V = \int_S A \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2\mu}{\rho_1\rho_2} \right) dS.$$

A は正の定数、 μ は 1 より小さい定数である ($|\mu| < 1$ かな?)。

さらに、もしもその材質が以下のような性質を持って入るならば、棒を引き伸ばすとき、横方向の収縮が起こらなければ、 $\mu = 0$ である。我々の目的には、これだけの情報がほとんどすべてであるので、我々は満足する。

トムソン & テートの自然哲学 §§639, 642, 720 ([40] のことか) より、次のことが分かる。 b が厚さで、 q が Young's modulus (ヤング率)、 μ が板が引き伸ばされたときの、引き延ばしに対する横方向の収縮の比とすると、

$$(4.2) \quad V = \int_S \frac{qb^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2\mu}{\rho_1\rho_2} \right) dS$$

$$(4.3) \quad = \int_S \frac{qb^3}{24(1-\mu^2)} \left(\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{\rho_1\rho_2} \right) dS.$$

板の平面に垂直な方向に微小振動して、 w がその変位である場合は、その平面の直交座標を x, y として、

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \Delta w, \quad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dxdy} \right)^2$$

と仮定できるので、

$$V = V[w] := \frac{qb^2}{24(1-\mu^2)} \iint_S \left[(\Delta w)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dxdy} \right)^2 \right) \right] dx dy.$$

$z = h(x, y)$ という曲面では、第2基本形式の係数行列は

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad } h|^2}} H(x, y), \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}.$$

(ああ、これが $\text{grad } h = 0$ のとき、Hesse 行列と一致する、というやつか。) 実際、第1基本形式の係数は

$$E = 1 + h_x^2, \quad F = h_x h_y, \quad G = 1 + h_y^2,$$

第2基本形式 A の係数は

$$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \quad f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \quad g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}.$$

平均曲率 κ_M , Gauss 曲率 κ_G は次式で計算できる:

$$\kappa_M = \frac{1}{2} \text{trace } A = \frac{\text{trace } H}{2\sqrt{1 + |\text{grad } h|^2}} = \frac{\Delta h}{2\sqrt{1 + |\text{grad } h|^2}},$$

$$\kappa_G = \det A = \frac{\det H}{\sqrt{1 + |\text{grad } h|^2}}.$$

上の計算で $dS = dx dy$ としてしまっているけれど、真面目にやると

$$dS = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| dx dy = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} dx dy$$

となるのかな。そこまでやってみるものかも。 ■

V の変分の計算にとりかかる。しかしその前に以下のことに注目すべきである:

$\iint \frac{dS}{\rho_1 \rho_2}$ は板の全曲率を表す。したがって、縁での物事の状況のみに依存する。

$$\begin{aligned} \delta V &= V[w + \delta w] - V[w] \\ &= \frac{qb^3}{12(1 - \mu^2)} \iint_S \left[(\Delta w + \Delta \delta w)^2 - (\Delta w)^2 - 2(1 - \mu) \delta \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right] dx dy \\ &= \frac{qb^3}{12(1 - \mu^2)} \iint_S \left(\Delta w \Delta \delta w - (1 - \mu) \delta \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

(ただし2次の項 $(\Delta \delta w)^2$ は落とした。)

普通の Green の公式

$$\iint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

で、 $\Delta w = u$, $\delta w = v$ とおくと、

$$\iint_S \delta w \Delta^2 w dx dy = \iint_S \Delta w \Delta \delta w dx dy + \int_{\partial S} \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \delta w ds - \int_{\partial S} \Delta w \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds$$

となるので、

$$\iint_S \Delta w \Delta \delta w dx dy = \iint_S \Delta^2 w \delta w dx dy - \int_{\partial S} \frac{d \Delta w}{dn} \delta w ds + \int_{\partial S} \Delta w \frac{d \delta w}{dn} ds.$$

一方、

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \iint \delta \frac{1}{\rho_1 \rho_2} dS &= \iint \left[\frac{d^2(w + \delta w)}{dx^2} \frac{d^2(w + \delta w)}{dy^2} - \left(\frac{d^2(w + \delta w)}{dx dy} \right)^2 \right] - \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - \left(\frac{d^2 w}{dx dy} \right)^2 \right] dS \\ &= \iint \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dy^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dy^2} - 2 \frac{d^2 w}{dx dy} \frac{d^2 \delta w}{dx dy} - \left(\frac{d^2 \delta w}{dx dy} \right)^2 \right] dS \\ &= \iint \left[\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dy^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - 2 \frac{d^2 w}{dx dy} \frac{d^2 \delta w}{dx dy} \right] dS \end{aligned}$$

$$F := \frac{d\delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dx dy}, \quad G := \frac{d\delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d\delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx dy}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} + \frac{dG}{dx} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{d\delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dx dy} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d\delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx dy} \right) \\ &= \frac{d^2 \delta w}{dy^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\delta w}{dy} \frac{d^3 w}{dy dx^2} - \frac{d^2 \delta w}{dy dx} \frac{d^2 w}{dx dy} - \frac{d\delta w}{dx} \frac{d^3 w}{dx dy^2} \\ &\quad + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d\delta w}{dx} \frac{d^3 w}{dx dy^2} - \frac{d^2 \delta w}{dx dy} \frac{d^2 w}{dx dy} - \frac{d\delta w}{dy} \frac{d^3 w}{dx^2 dy} \\ &= \frac{d^2 \delta w}{dy^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} - 2 \frac{d^2 \delta w}{dy dx} \frac{d^2 w}{dx dy} \end{aligned}$$

であるから、

$$\iint \delta \frac{1}{\rho_1 \rho_2} dS = \iint \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dG}{dx} \right) dS = \iint (F \sin \theta + G \cos \theta) ds.$$

§218 (p. 300) では、円盤領域 $\{(x, y); x^2 + y^2 < a^2\}$ を扱っている。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{2-\mu}{a^2} \frac{dw}{dr} - \frac{3-\mu}{a^3} w \right) = 0, \\ \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \left(\frac{1}{a} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) = 0. \end{cases}$$

$$w_n = \cos n\theta (\alpha J_n(\kappa r) + \beta J_n(i\kappa r)) + \sin n\theta (\gamma J_n(\kappa r) + \delta J_n(i\kappa r)).$$

4.2 Rayleigh の、特に境界条件を導くあたりに再挑戦

$$\frac{qb^2}{12\rho(1-\mu^2)} \nabla^4 w - Z + \ddot{w} = 0.$$

Collecting and rearranging our results, we find

$$\begin{aligned} \delta V = & \frac{qb^2}{12(1-\mu^2)} \left[\iint \nabla^4 w \delta w \, dS \right. \\ & - \int \delta w ds \left\{ \frac{d\nabla^2 w}{dn} + (1-\mu) \frac{d}{ds} \left(\cos \theta \sin \theta \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{d^2 w}{dxdy} \right) \right\} \\ & \left. + \int \frac{d\delta w}{dn} ds \left\{ \mu \nabla^2 w + (1-\mu) \left(\cos^2 \theta \frac{d^2 w}{dx^2} + \sin^2 \theta \frac{d^2 w}{dy^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{d^2 w}{dxdy} \right) \right\} \right] \dots (6). \end{aligned}$$

There will now be no difficulty in forming the equations of motion. If ρ be the volume density, and $Z\rho b \, dS$ the transverse force acting on the element dS ,

$$\delta V - \iint Z\rho b \, \delta w \, dS + \iint \rho b \ddot{w} \, \delta w \, dS = 0 \dots\dots\dots (7)$$

is the general variational equation, which must be true whatever function (consistent with the constitution of the system) δw may be supposed to be. Hence by the principles of the Calculus of Variations

$$\frac{qb^2}{12\rho(1-\mu^2)} \nabla^4 w - Z + \ddot{w} = 0 \dots\dots\dots (8),$$

at every point of the plate.

If the edges of the plate be free, there is no restriction on the hypothetical boundary values of δw and $\frac{d\delta w}{dn}$, and therefore the coefficients of these quantities in the expression for δV must vanish. The conditions to be satisfied at a free edge are thus

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\nabla^2 w}{dn} + (1-\mu) \frac{d}{ds} \left\{ \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{d^2 w}{dxdy} \right\} = 0 \\ \mu \nabla^2 w + (1-\mu) \left\{ \cos^2 \theta \frac{d^2 w}{dx^2} + \sin^2 \theta \frac{d^2 w}{dy^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{d^2 w}{dxdy} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9).$$

If the whole circumference of the plate be clamped, $\delta w = 0$, $\frac{d\delta w}{dn} = 0$, and the satisfaction of the boundary condition is already secured. If the edge be 'supported', $\delta w = 0$, but $\frac{d\delta w}{dn}$ is arbitrary. The second of the equation (9) must in this case be satisfied by w .

The boundary equations may be simplified by getting rid of the extrinsic element involved in the use of Cartesian coordinates. Taking the axis of x parallel to the normal of the bounding curve, we see that we may write

$$\cos^2 \theta \frac{d^2 w}{dx^2} + \sin^2 \theta \frac{d^2 w}{dy^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{d^2 w}{xdy} = \frac{d^2 w}{dn^2}.$$

Also

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{dn^2} + \frac{d^2 w}{d\sigma^2} \dots\dots\dots (1),$$

where σ is a fixed axis coinciding with the tangent at the point under the consideration. In general $\frac{d^2 w}{d\sigma^2}$ differs from $\frac{d^2 w}{ds^2}$. To obtain the relation between them, we may proceed thus. Expand w by Maclaurin's theorem in ascending powers of the small quantities n and σ , and substitute for n and σ their values in terms of s , the arc of the curve.

簡単になる。具体的には、第2の方程式は第2項が $\frac{d^2}{dn^2}$ で書けて

$$(4.5) \quad \mu \Delta w + (1 - \mu) \frac{d^2 w}{dn^2} = 0.$$

$\frac{d^2 w}{d\sigma^2}$ は $\frac{d^2 w}{ds^2}$ と異なることに注意が必要で、両者の関係を導くには…

Thus in general

$$w = w_0 + \frac{dw}{dn_0} n + \frac{dw}{d\sigma_0} \sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dn_0^2} n^2 + \frac{d^2 w}{dn_0 d\sigma_0} n\sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{d\sigma_0^2} \sigma^2 + \dots,$$

while on the curve $\sigma = s + \text{cubes}$, $n = -\frac{1}{2} \frac{s^2}{\rho} + \dots$, where ρ is the radius of curvature. Accordingly for points on the curve,

$$w = w_0 - \frac{1}{2} \frac{dw}{dn_0} \frac{s^2}{\rho} + \frac{dw}{d\sigma_0} s + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{d\sigma_0^2} s^2 + \text{cubes of } s,$$

and therefore

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d^2 w}{d\sigma^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dw}{dn} \dots\dots\dots (2);$$

whence from (1)

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{dn^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{dn} + \frac{d^2 w}{ds^2} \dots\dots\dots (3).$$

We conclude that the second boundary condition in (9) §215 may be put into the form

$$\frac{d^2 w}{dn^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{dn} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (4).$$

こうして、(4.5) は (Δw を n と s で書くと) 次のように書き換えられる:

$$(4.6) \quad \frac{d^2 w}{dn^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{dn} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right) = 0.$$

pp. 298, section 216 第3パラグラフの途中から

In the same way by putting $\theta = 0$, we see that

$$\cos \theta \sin \theta \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{d^2 w}{dx dy}$$

is equivalent to $\frac{d^2 w}{dn d\sigma}$, where it is to be understood that the axes of n and σ are fixed. The first boundary condition now becomes

$$\frac{d}{dn} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 w}{dn d\sigma} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5).$$

つまり、同様に第1の方程式 (section 215 の (9)) も次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dn} \Delta w + (1 - \mu) \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 w}{dn d\sigma} \right) = 0.$$

こちらを n と s で書き直さないのは、困難なのかな？

ともあれ、以上で加藤先生の本の §9 (p. 442) の (9.2)

$$\sigma \nabla^2 w + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} + (1 - \sigma) \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = 0, \quad (9.2)$$

に相当するものが得られた。

pp. 298

If we apply these equations to the rectangle whose sides are parallel to the coordinate axes, we obtain as the conditions to be satisfied along the edges parallel to y ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} + (2 - \mu) \frac{d^2 w}{dy^2} \right\} &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{d^2 w}{dy^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6).$$

In this case the distinction between σ and s disappears, and ρ , the radius of curvature, is infinitely great. The conditions for the other pair of edges are found by interchanging x and y . These results may be obtained equally well from (9) §215 directly, without the preliminary transformation.

(我々の長方形の場合は、境界はまっすぐなので、この違いは生じない。)

4.3 Gazzola-Grunau-Sweers [2] の §1.1.2

Gazzola-Grunau-Sweers [2] の §1.1.2 (pp. 5–7) は “The Kirchhoff-Love model for a thin plate” その垂直な射影を平面領域 Ω とすると

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma) (u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) - f u \right) dx dy.$$

ここで f は鉛直荷重である。

この現代的な変分法的定式化はすでに [173] (Friedrichs [41]) に現れているが、薄い弾性板の境界値問題の議論は、いささか古めかしい形ではあるが、Kirchhoff [249] ([20]) の中でなされている。

(これは別の文書で完成させてから持って来よう。)

4.4 加藤 [3] に載っている変分法的定式化

(Poisson 比を σ と書いてあるが、 μ と書き直す。)

$$J[u] := \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)] dx dy, \quad K[u] := \iint_{\Omega} u^2 dx dy$$

として、 J/K を停留にする (条件 $K = 1$ のもとで J を停留にする)。

$I[u, \lambda] := J[u] - \lambda K[u]$ の停留問題となる。

4.5 弱形式

$J[u]$ の極形式を $J[u, v]$ とおく:

$$J[u, v] := \frac{1}{2} (J[u + v] - J[u] - J[v]).$$

$$\begin{aligned} J[u, v] &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ [\Delta(u + v)]^2 - 2(1 - \mu) [(u + v)_{xx}(u + v)_{yy} - (u + v)_{xy}^2] \right. \\ &\quad - [(\Delta u)^2 - 2(1 - \mu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)] \\ &\quad \left. - [(\Delta v)^2 - 2(1 - \mu)(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2)] \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [2\Delta u \Delta v - 2(1 - \mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy})] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v - (1 - \mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy})] dx dy. \end{aligned}$$

同様に $K[u]$ の極形式を $K[u, v]$ とおく:

$$K[u, v] := \frac{1}{2} (K[u + v] - K[u] - K[v]).$$

$$K[u, v] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(u + v)^2 - u^2 - v^2] dx dy = \iint_{\Omega} uv dx dy.$$

結果だけまとめると、

$$\begin{aligned} J[u, v] &= \iint_{\Omega} [\Delta u \Delta v - (1 - \mu)(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy})] dx dy, \\ K[u, v] &= \iint_{\Omega} uv dx dy \end{aligned}$$

として、

$$J[u, v] = \lambda K[u, v] \quad (\forall v).$$

FreeFem++ のプログラム (§7.4) では、この弱形式を利用している。

第5章 円盤領域の場合の厳密解

5.1 Laplacian の固有値・固有関数

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

5.1.1 Dirichlet 境界条件

$$-\Delta u = \lambda u \quad (\text{in } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

この式の値は n^2 ($n = 0, 1, \dots$) であるので、

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0.$$

これと

$$R(1) = 0, \quad R(0) \text{ は有限}$$

という条件から定まる。 $W(\sqrt{\lambda}r) = R(r)$ と変数変換して、Bessel の微分方程式の“境界値問題”を得る:

$$W''(\rho) + \frac{1}{\rho}W'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)W(\rho) = 0, \quad W(0) \text{ は有限}, \quad W(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

最初の2つの条件から

$$W(\rho) = CJ_n(\rho), \quad \text{ゆえに} \quad R(r) = CJ_n(\sqrt{\lambda}r).$$

$\sqrt{\lambda}$ は J_n の零点でなければならない。

J_n の正の零点を小さい方から順に並べたものを

$$\mu_{n1} < \mu_{n2} < \dots \rightarrow \infty$$

とするとき、 $\sqrt{\lambda} = \mu_{nm}$.

Mathematica では `BesselJZero[n,m]` (次数 n が先) で計算できる。最初に必要なものを全部計算しておくこと (老婆心)。

まとめると

$$\lambda = \lambda_{nm} := \mu_{nm}^2,$$

$$U(r, \theta) = U_{nm}(r, \theta) := J_n(\mu_{nm}r)(A \cos n\theta + B \sin n\theta) \quad (m \in \mathbb{N}, n = 0, 1, \dots).$$

つまり、固有関数の完全系として、 $\{\varphi_{nm} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ が取れる。ここで

$$\varphi_{nm}(r, \theta) = J_n(\mu_{nm}r) \cos n\theta \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N}), \quad \psi_{nm}(r, \theta) = J_n(\mu_{nm}r) \sin n\theta \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

5.1.2 Neumann 境界条件

$$W''(\rho) + \frac{1}{\rho}W'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)W(\rho) = 0, \quad W(0) \text{ は有限}, \quad W'(\sqrt{\lambda}) = 0$$

となる。

J'_n の正の零点を小さい方から順に並べたものを

$$\nu_{n1} < \nu_{n2} < \cdots \rightarrow \infty$$

とすると、

$$\lambda = \nu_{nm}^2.$$

これはどうやって計算するのかな？ FindRoot[] だろうか？

5.2 変形 Bessel 関数

変形 Bessel の微分方程式とは

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0.$$

Bessel の微分方程式と見比べて、 $u = AJ_\nu(iz) + BY_\nu(iz)$ が一般解であり、 $z = 0$ で正則な解は $u = AJ_\nu(iz)$ であることが分かる。 $z = x \in \mathbf{R}$ のとき実数値であるのは $A = e^{-\nu\pi i/2}$ である場合で、

$$I_n u(z) := e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

Mathematica では BesselI[n, z] で計算できる。

(おかしい。直さないと。)

第6章 円形板のクラドニ図形の計算

6.1 良く知られている結果

自由な縁を持つ円形板のクラドニ図形を求める問題 (円盤領域における重調和作用素に、自由な縁の境界条件を課した固有値問題) は、早くから厳密な解が知られている。ここでは主に Rayleigh [1], フレッチャー&ロッシング [4] に沿ってそれを説明する。

一般の領域で次のことが成り立つ。

- (i) 0 は固有値であり、その固有空間の次元は 3 に等しく、固有空間の基底として $1, x, y$ が取れる。
- (ii) 0 以外の固有値はすべて正。

従って正の固有値とそれに属する固有関数を求めることが問題となる。

J_m, I_m をそれぞれ m 次の第 1 種の Bessel 関数, 変形 Bessel 関数とする。

$$J_m(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$I_m(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 k についての方程式

$$(6.1) \quad \frac{(\mu-1)(kJ'_m(k) - m^2J_m(k)) - k^2J_m(k)}{(\mu-1)(kI'_m(k) - m^2I_m(k)) + k^2I_m(k)} = \frac{m^2(\mu-1)[kJ'_m(k) - J_m(k)] - k^3J'_m(k)}{m^2(\mu-1)[kI'_m(k) - I_m(k)] + k^3I'_m(k)}.$$

の正の解に以下のように番号付けして k_{mn} を定める。

k_{mn} は、集合 $\mathcal{I} := \{(m, n); m \geq 0, n \geq 0\} \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$ に属する添字 (m, n) に対して定義される。

$m = 0, 1$ のときは、小さい方から n 番目のものを k_{mn} とする。

$$k_{01} < k_{02} < k_{03} < \dots,$$

$$k_{11} < k_{12} < k_{13} < \dots.$$

また $m \geq 2$ のときは、小さい方から j 番目のものを $k_{m,j-1}$ とする。

$$k_{m0} < k_{m1} < k_{m2} < \dots \quad (m \geq 2 \text{ のとき}).$$

さらに $\lambda_{mn}, u_{mn}, v_{mn}$ を次式で定める。

$$(6.2) \quad \lambda_{mn} := -\frac{(\mu-1)(kJ'_m(k_{mn}) - m^2J_m(k_{mn})) - k^2J_m(k_{mn})}{(\mu-1)(kI'_m(k_{mn}) - m^2I_m(k_{mn})) + k^2I_m(k_{mn})},$$

$$(6.3) \quad u_{mn}(r, \theta) := (J_m(k_{mn}r) + \lambda_{mn}I_m(k_{mn}r)) \cos m\theta,$$

$$(6.4) \quad v_{mn}(r, \theta) := (J_m(k_{mn}r) + \lambda_{mn}I_m(k_{mn}r)) \sin m\theta.$$

定理 6.1.1 (自由な縁を持つ円形板の固有値問題の解)

$$\{1, x, y\} \cup \{u_{0n}; n \in \mathbf{N}\} \cup \{u_{1n}, v_{1n}; n \in \mathbf{N}\} \cup \{u_{mn}, v_{mn}; m \geq 2, n \geq 0\}$$

は固有関数からなる完全直交系であり、 u_{mn} と v_{mn} に対応する固有値は k_{mn}^4 である。

注意 6.1.2 (添字の選択について) 細かいことであるが、固有対を区別するための添字に用いる文字について述べておく。上の説明では、結果を比較検討するフレッチャー&ロッシング [4] に合わせて、Bessel 関数の添字を m で表した。また、各 m について境界条件から導出される方程式があり、それから (固有値の 4 乗根) k が無限個得られるが、それを番号付ける添字を n で表した。こうして k には k_{mn} という二重添字がつく。番号の付け方に工夫したのは、 m が固有関数の節となる直径の個数、 n が固有関数の節となる円の個数となるようにするためである。文献によっては、 m と n が逆になっているものもある。■

6.2 準備

6.2.1 Bessel 関数, 変形 Bessel 関数

J_m は $u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)u = 0$ の正則な解。

I_m は $u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{m^2}{z^2}\right)u = 0$ の正則な解。

$u(z) := J_m(kz)$ は $u'' + \frac{1}{z}u' + \left(k^2 - \frac{m^2}{z^2}\right)u = 0$ の正則な解。

$u(z) := I_m(kz)$ は $u'' + \frac{1}{z}u' - \left(k^2 + \frac{m^2}{z^2}\right)u = 0$ の正則な解。

6.2.2 $\partial/\partial n, \partial/\partial t$ の極座標表示

円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(a, 0)$ で、 n, t についての微分を r, θ で表す。 $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

これから $\frac{\partial^2}{\partial n^2}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2}{\partial n \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial n^3}, \frac{\partial^3}{\partial n^3}$ が計算できる。

6.3 固有関数

固有値は非負であり、その 4 乗根を k と表すことにする。

$\Delta w = k^2 w, \Delta w = -k^2 w$ の解の線形結合で…

$$w = \cos m\theta (\alpha J_m(kr) + \beta I_m(kr)) + \sin m\theta (\gamma J_m(kr) + \delta I_m(kr)).$$

$\alpha: \beta = \gamma: \delta$ である、と Rayleigh は言うけれど、本当だろうか。

まあ、それを認めれば

$$(6.5) \quad w = \exists P \cos(m\theta - \exists\phi) [J_m(kr) + \exists\lambda I_m(kr)].$$

実際、 $\beta = \alpha\lambda$, $\delta = \gamma\lambda$ となる λ が存在すれば

$$\begin{aligned} w &= \alpha \cos m\theta (J_m(kr) + \lambda I_m(kr)) + \gamma \sin m\theta (J_m(kr) + \lambda I_m(kr)) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \left(\cos m\theta \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + \sin m\theta \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \right) (J_m(kr) + \lambda I_m(kr)) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \cos(m\theta - \phi) (J_m(kr) + \lambda I_m(kr)). \end{aligned}$$

つまり ϕ は

$$\cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \sin \phi = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}$$

を満たす数である。

自由な縁の境界条件を r, θ の導関数で表すと次のようになる。

$$(6.6) \quad w_{rr} + \mu \left(\frac{1}{a} w_r + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta} \right) = 0,$$

$$(6.7) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{2-\mu}{a^2} w_r - \frac{3-\mu}{a^3} w \right) \Big|_{r=a} = 0.$$

証明

$$\begin{aligned} \mu \Delta w + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} &= \mu \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} \right) + (1-\mu) w_{rr} \Big|_{r=a} \\ &= (\mu + (1-\mu)) w_{rr} + \mu \left(\frac{1}{a} w_r + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta} \right) \\ &= w_{rr} + \mu \left(\frac{1}{a} w_r + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1-\mu) \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{w_r} + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} \right) + (1-\mu) \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} w_{r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{\theta} \right) \Big|_{r=a} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) + \frac{-2}{a^3} w_{\theta\theta} + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta r} + (1-\mu) \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} w_{r\theta\theta} - \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) \Big|_{r=a} + \frac{-2}{a^3} w_{\theta\theta} + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta r} + (1-\mu) \frac{1}{a^2} w_{r\theta\theta} - (1-\mu) \frac{1}{a^3} w_{\theta\theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) \Big|_{r=a} - \frac{3-\mu}{a^3} w_{\theta\theta} + \frac{2-\mu}{3} w_{r\theta\theta}. \blacksquare \end{aligned}$$

$$w = \cos(m\theta - \phi) [J_m(kr) + \lambda I_m(kr)].$$

とするとき

$$\begin{aligned}
0 &= w_{rr} + \mu \left(\frac{1}{a} w_r + \frac{1}{a^2} w_{\theta\theta} \right) \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ -\frac{k}{a} J'_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(ka) + \lambda \left[-\frac{k}{a} I'_m(ka) + \left(k^2 + \frac{m^2}{a^2} \right) I_m(ka) \right] \right. \\
&\quad \left. + \mu \left[\frac{1}{a} (kJ_m(ka) + \lambda k I'_m(ka)) + \frac{-m^2}{a^2} (J_m(ka) + \lambda I_m(ka)) \right] \right\} \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ -\frac{k}{a} J'_m(ka) + \frac{k\mu}{a} J'_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(ka) - \frac{\mu m^2}{a^2} J_m(ka) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left[-\frac{k}{a} I'_m(ka) + \frac{k\mu}{a} I'_m(ka) + \left(k^2 + \frac{m^2}{a^2} \right) I_m(ka) - \frac{\mu m^2}{a^2} I_m(ka) \right] \right\} \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ \frac{k(\mu - 1)}{a} J'_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2(1 - \mu)}{a^2} \right) J_m(ka) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left[\frac{k(\mu - 1)}{a} I'_m(ka) + \left(k^2 + \frac{m^2(1 - \mu)}{a^2} \right) I_m(ka) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$-\lambda = \frac{\frac{k(\mu-1)}{a} J'_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2(1-\mu)}{a^2} \right) J_m(ka)}{\frac{k(\mu-1)}{a} I'_m(ka) - \left(k^2 + \frac{m^2(1-\mu)}{a^2} \right) I_m(ka)} = \frac{k(\mu-1) a J'_m(ka) - (k^2 a^2 - m^2(1-\mu)) J_m(ka)}{k(\mu-1) a I'_m(ka) + (k^2 a^2 + m^2(1-\mu)) I_m(ka)}.$$

これは Rayleigh にある式と一致している。

一方、

$$w_{rr} + \frac{1}{r} w_r = \cos(m\theta - \phi) \left[-\left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m(kr) + \lambda \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) I_m(kr) \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) &= \cos(m\theta - \phi) \left[-\frac{2m^2}{r^3} J_m(kr) - \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) k J'_m(kr) + \lambda \frac{-2m^2}{r^3} I_m(kr) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) k I'_m(kr) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{2-\mu}{a^2} w_r - \frac{3-\mu}{a^3} w \right) &= -m^2 \left(\frac{2-\mu}{a^2} w_r - \frac{3-\mu}{a^3} w \right) \\
&= -m^2 \cos(m\theta - \phi) \left[\frac{2-\mu}{a^2} k (J'_m(ka) + \lambda I'_m(ka)) - \frac{3-\mu}{a^3} (J_m(ka) + \lambda I_m(ka)) \right]
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{2-\mu}{a^2} w_r - \frac{3-\mu}{a^3} w \right) \Big|_{r=a} \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ -\frac{2m^2}{a^3} J_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) k J_m(ka) - \frac{2\lambda m^2}{a^3} I_m(ka) + \lambda \left(k^2 + \frac{m^2}{a^2} \right) k I'_m(ka) \right. \\
&\quad \left. - m^2 \left[\frac{2-\mu}{a^2} k (J'_m(ka) + \lambda I'_m(ka)) - \frac{3-\mu}{a^3} (J_m(ka) + \lambda I_m(ka)) \right] \right\} \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ -\frac{2m^2}{a^3} J_m(ka) + \frac{(3-\mu)m^2}{a^3} J_m(ka) - \left(k^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) k J'_m(ka) - m^2 \frac{2-\mu}{a^2} k J'_m(ka) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left[-\frac{2m^2}{a^3} I_m(ka) + \frac{m^2(3-\mu)}{a^3} I_m(ka) + \left(k^2 + \frac{m^2}{a^2} \right) k I'_m(ka) - m^2 \frac{2-\mu}{a^2} k I'_m(ka) \right] \right\} \\
&= \cos(m\theta - \phi) \left\{ \frac{m^2(1-\mu)}{a^3} J_m(ka) + \left(-k^3 + \frac{m^2 k}{a^2} + \frac{m^2(\mu-2)k}{a^2} \right) J'_m(ka) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \left[\frac{m^2(1-\mu)}{a^3} I_m(ka) + \left(k^3 + \frac{m^2 k}{a^2} + \frac{m^2(\mu-2)k}{a^2} \right) I'_m(ka) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
-\lambda &= \frac{\frac{m^2(1-\mu)}{a^3} J_m(ka) + \left(-k^3 + \frac{m^2(\mu-1)k}{a^2} J'_m(ka) \right)}{\frac{m^2(1-\mu)}{a^3} I_m(ka) + \left(k^3 + \frac{m^2(\mu-1)k}{a^2} \right) I'_m(ka)} \\
&= \frac{-m^2(\mu-1)J_m(ka) + (-k^3 a^3 + m^2(\mu-1)ka) J'_m(ka)}{-m^2(\mu-1)I_m(ka) + (k^3 a^3 + m^2(\mu-1)ka) I'_m(ka)} \\
&= \frac{m^2(\mu-1)[kaJ'_m(ka) - J_m(ka)] - k^3 a^3 J'_m(ka)}{m^2(\mu-1)[kaI'_m(ka) - I_m(ka)] + k^3 a^3 I'_m(ka)}.
\end{aligned}$$

(これも Rayleigh の式と一致する。)

これから k を求める方程式

$$\frac{(\mu-1)(kaJ'_m(ka) - m^2 J_m(ka)) - k^2 a^2 J_m(ka)}{(\mu-1)(kaI'_m(ka) - m^2 I_m(ka)) + k^2 a^2 I_m(ka)} = \frac{m^2(\mu-1)[kaJ'_m(ka) - J_m(ka)] - k^3 a^3 J'_m(ka)}{m^2(\mu-1)[kaI'_m(ka) - I_m(ka)] + k^3 a^3 I'_m(ka)}$$

を得る。

ここまで文献に合わせて、円盤の半径は a としてきたが、 $a=1$ とすると、

$$(6.8) \quad \frac{(\mu-1)(kJ'_m(k) - m^2 J_m(k)) - k^2 J_m(k)}{(\mu-1)(kI'_m(k) - m^2 I_m(k)) + k^2 I_m(k)} = \frac{m^2(\mu-1)[kJ'_m(k) - J_m(k)] - k^3 J'_m(k)}{m^2(\mu-1)[kI'_m(k) - I_m(k)] + k^3 I'_m(k)}.$$

こうして k を得てから

$$(6.9) \quad \lambda := -\frac{(\mu-1)(kJ'_m(k) - m^2 J_m(k)) - k^2 J_m(k)}{(\mu-1)(kI'_m(k) - m^2 I_m(k)) + k^2 I_m(k)}$$

とおくと、 λ が得られる。

6.4 固有値の Mathematica による数値計算

(6.8) の左辺の分子、分母、右辺の分子、分母をそれぞれ $a_m(k)$, $b_m(k)$, $c_m(k)$, $d_m(k)$ とおく。

固有値の 4 乗根 k は方程式 $\frac{a_m(k)}{b_m(k)} = \frac{c_m(k)}{d_m(k)}$ の解であり、対応する λ は

$$\lambda = -\frac{a_m(k)}{b_m(k)}$$

で得られる。

$$J'_m(x) = \frac{1}{2}(J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)), \quad I'_m(x) = \frac{1}{2}(I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x))$$

が成り立つので、これを用いて導関数を計算することにする。

```

Clear[bj,dbj,bi,dbi,a,b,c,d]
bj[m_,x_] := BesselJ[m,x];
dbj[m_, x_] := (BesselJ[-1 + m, x] - BesselJ[1 + m, x])/2;
bi[m_, x_] := BesselI[m, x];
dbi[m_, x_] := (BesselI[-1 + m, x] + BesselI[1 + m, x])/2;

mu=N[3/10,100];

a[m_, k_] := (mu - 1) (k dbj[m, k] - m^2 bj[m, k]) - k^2 bj[m, k];
b[m_, k_] := (mu - 1) (k dbi[m, k] - m^2 bi[m, k]) + k^2 bi[m, k];
c[m_, k_] := m^2 (mu - 1) (k dbj[m, k] - bj[m, k]) - k^3 dbj[m, k];
d[m_, k_] := m^2 (mu - 1) (k dbi[m, k] - bi[m, k]) + k^3 dbi[m, k];

```

様子を $m = 3$ で調べてみる

$m = 3$ とする。

$a_m(k), c_m(k)$ は符号を変えて振動しながら緩やかに振幅の幅が増加する。

$b_m(k)$ は定符号で ($k > 0 \Rightarrow b_m(k) > 0$)、急速に (指数関数的に) 増加する。

$d_m(k)$ は一度だけ符号を変えるが ($k = 2.125586428593705 \dots$ が境目)、その後は急速に (指数関数的に) 増加する。

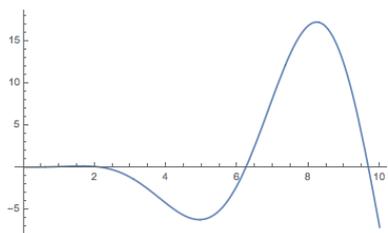


図 6.1: $a_3(k)$ ($0 \leq k \leq 10$)

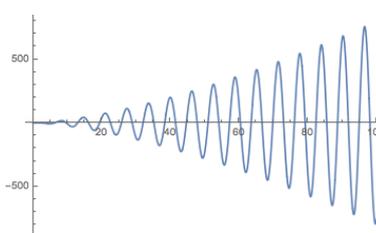


図 6.2: $a_3(k)$ ($0 \leq k \leq 100$)

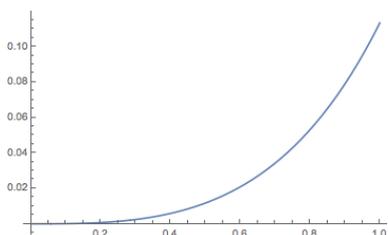


図 6.3: $b_3(k)$ ($0 \leq k \leq 1$)

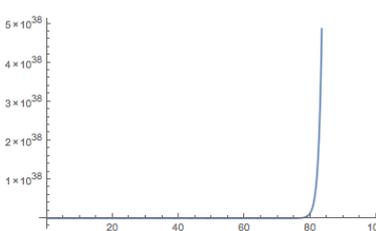


図 6.4: $b_3(k)$ ($0 \leq k \leq 100$)

$a_m(k)d_m(k) - b_m(k)c_m(k)$ は、 k が増加すると、絶対値が急激に増加する。そこで

$$(6.10) \quad f_m(k) := e^{-k} (a_m(k)d_m(k) - b_m(k)c_m(k))$$

とおき、 f_m のグラフを描いてみよう。

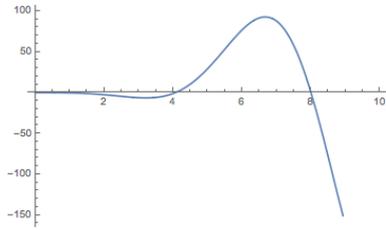


図 6.5: $c_3(k)$ ($0 \leq k \leq 10$)

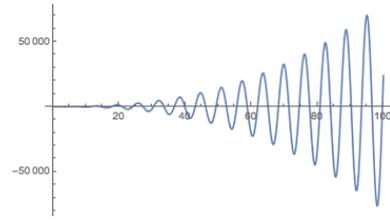


図 6.6: $c_3(k)$ ($0 \leq k \leq 100$)

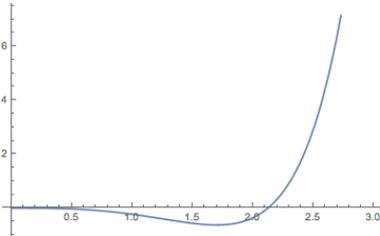


図 6.7: $d_3(k)$ ($0 \leq k \leq 10$)

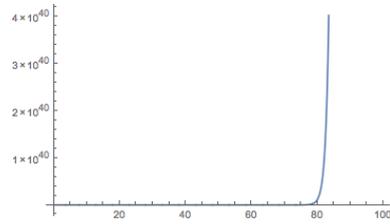


図 6.8: $d_3(k)$ ($0 \leq k \leq 100$)

一般の場合

$$(6.11) \quad \frac{(\mu - 1)(kJ'_m(k) - m^2J_m(k)) - k^2J_m(k)}{(\mu - 1)(kI'_m(k) - m^2I_m(k)) + k^2I_m(k)} = \frac{m^2(\mu - 1)[kJ'_m(k) - J_m(k)] - k^3J'_m(k)}{m^2(\mu - 1)[kI'_m(k) - I_m(k)] + k^3I'_m(k)}.$$

```

Clear[draw]
draw[m_,maxk_] :=
  Plot[Exp[-k] (a[m, k] d[m, k] - b[m, k] c[m, k]), {k, 0, maxk}];

graphf0=draw[0, 3.5]
Export["graphf0.png", graphf0]

graphf1=draw[1, 5]
Export["graphf1.png", graphf1]

graphf2 = draw[2, 3]
Export["graphf2.png", graphf2]

Table[draw[m, m + 1.7], {m, 2, 20}]

```

f_m のグラフは、 $m = 0, 1$ のときと、 $m \geq 2$ のときで大きく異なる。

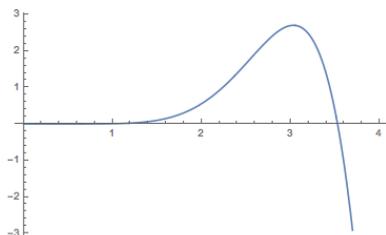


図 6.9: $f_3(k)$ ($0 \leq k \leq 4$)

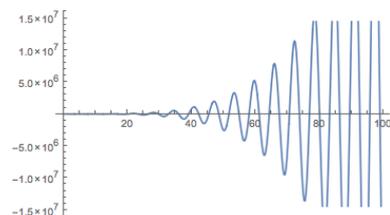


図 6.10: $f_3(k)$ ($0 \leq k \leq 100$)

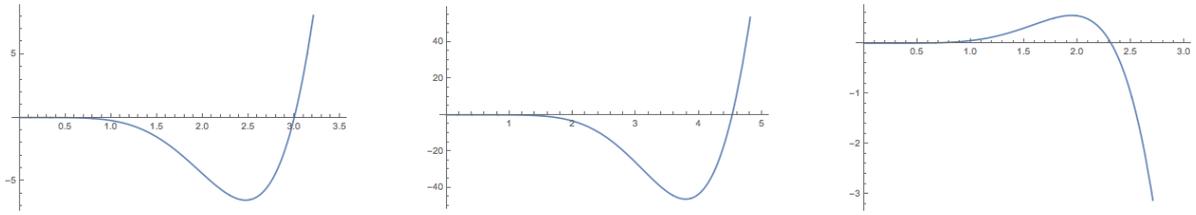


図 6.11: $f_0(k)$ の $0 \leq k \leq 1$ で 図 6.12: $f_1(k)$ の $0 \leq k \leq 5$ で 図 6.13: $f_2(k)$ の $0 \leq k \leq 3$ でのグラフ

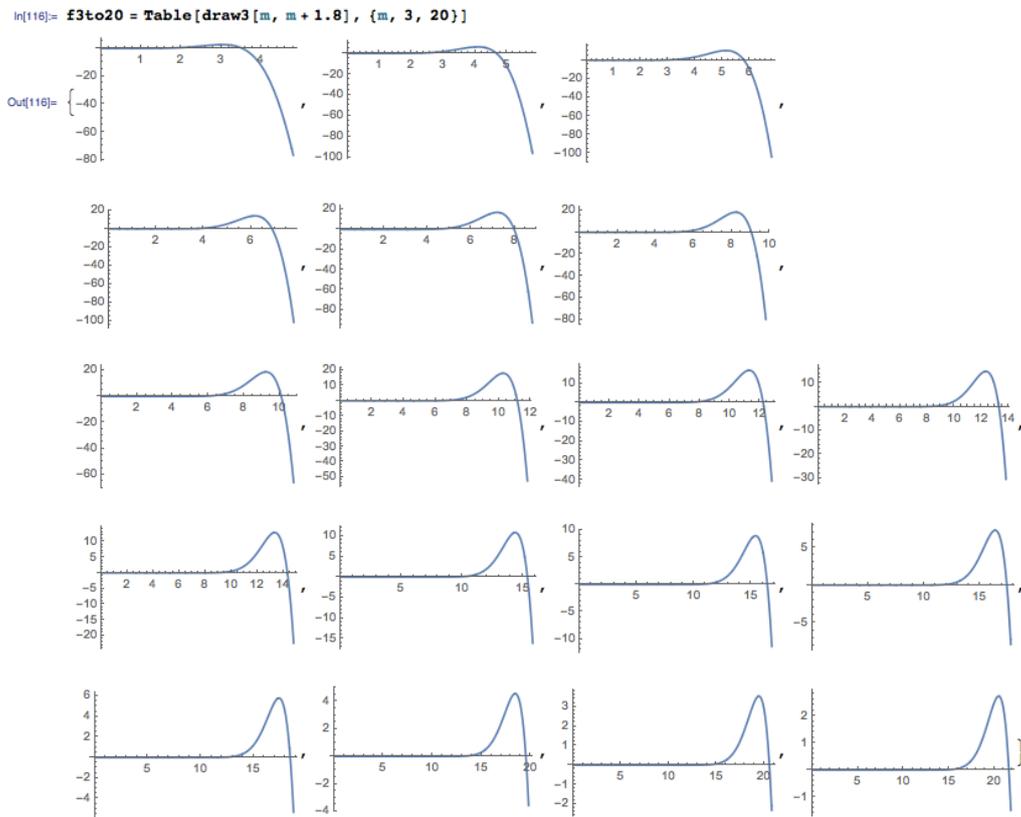


図 6.14: $f_m(k)$ のグラフ ($3 \leq m \leq 20$)

f_m の正の最小零点を \underline{k}_m と表す:

$$(6.12) \quad \underline{k}_m := \min \{k > 0; f_m(k) = 0\}.$$

さらに f_m の正の零点を小さい方から番号付ける。ただし、後で都合が良いように、 m の値により、添え字をどこから始めるかを変える。

$m = 0, 1$ のときは、小さい方から j 番目のものを k_{mj} とする。

$$\underline{k}_0 = k_{01} < k_{02} < k_{03} < \dots,$$

$$\underline{k}_1 = k_{11} < k_{12} < k_{13} < \dots.$$

また $m \geq 2$ のときは、小さい方から j 番目のものを $k_{m,j-1}$ とする。

$$\underline{k}_m = k_{m0} < k_{m1} < k_{m2} < \dots \quad (m \geq 2 \text{ のとき}).$$

$$\begin{aligned} k_{01} &= 3.0005228461545709647, & k_{02} &= 6.2002579175992606103, & k_{03} &= 9.3675093710207376360, \\ k_{11} &= 4.5248812265006630107, & k_{12} &= 7.7337953983997707416, & k_{13} &= 10.906756404560928977, \\ k_{20} &= 2.3148066415793591252, & k_{21} &= 5.9380222562207805947, & k_{22} &= 9.1851055560694628595, \\ k_{30} &= 3.5268949751031908958, & k_{31} &= 7.2806449885421181566, & k_{32} &= 10.580408253266802062, \dots \end{aligned}$$

k_{00}, k_{01} は「欠番」であることに注意する。

おそらく、 $m' > m, n' > n \Rightarrow k_{m'n'} > k_{mn}$ が成り立つ。

Mathematica の関数 FindRoot[] を用いれば解の近似値が求められる。

```
Clear[sol];
sol[m_,near_] := k/. FindRoot[a[m, k]/b[m, k] == c[m, k]/d[m, k], {k, near},
  WorkingPrecision -> 20];
```

f_0, f_1, f_2, f_3 の最小零点は 3, 4.5, 2.5, 3.5 付近にあることがグラフから分かるので、

```
sol[0,3]
sol[1,4.5]
sol[2,2.5]
sol[3,3.5]
```

としたところ

$$\underline{k}_0 = k_{01} = 3.0005228461545709647,$$

$$\underline{k}_1 = k_{11} = 4.5248812265006630107,$$

$$\underline{k}_2 = k_{20} = 2.3148066415793591252,$$

$$\underline{k}_3 = k_{30} = 3.5268949751031909750.$$

$m \geq 2$ 以降は、 m が 1 増えるごとに \underline{k}_m は 1 位ずつ増えていく。 m が小さいときは $\underline{k}_m \doteq m + 0.5$ が成り立つようなので、 $m + 0.5$ を初期値として零点 \underline{k}_m を探してみる。

```
aa=Table[sol[m,m+0.5],{m,2,20}]
```

とすると

```
{2.3148066415793591252, 3.5268949751031909750, 4.6728110066820997317,  
5.7874805906809225927, 6.8831698435095385795, 7.9658749907810018130,  
9.0390454126593388561, 10.104872160413906530, 11.164844164719930278,  
12.220024325467494207, 13.271200579241355338, 14.318974756866853737,  
15.363817862547529799, 16.406106041758524211, 17.446144861757148568,  
18.484186215192117206, 19.520440400338473791, 20.555084951306995739,  
21.588271220741618888}
```

(グラフと見比べて) うまく求まったようである。隣り合う項の差を取ってみると

```
Table[aa[[1+1]]-aa[[1]],{1,Length[aa]-1}]
```

```
{1.2120883335238318498, 1.1459160315789087567, 1.114669583998822861,  
1.095689252828615987, 1.082705147271463233, 1.073170421878337043,  
1.065826747754567674, 1.059972004306023748, 1.055180160747563929,  
1.051176253773861131, 1.047774177625498399, 1.044843105680676062,  
1.042288179210994412, 1.040038819998624357, 1.038041353434968639,  
1.036254185146356584, 1.034644550968521948, 1.033186269434623149,  
1.031858151851052061}
```

この結果から、 $m \rightarrow \infty$ のとき $k_{m+1,1} - k_{m1} \rightarrow 1$ が成り立つことが予想される。

そこで、 \underline{k}_m を計算する関数として、次のような `kmmin[]` を作って試してみた。(m が大きくなると $\underline{k}_m \doteq m + 0.5$ という式は不適切なので、 \underline{k}_m は、 $f_m(k) = 0$ の解で、 $\underline{k}_{m-1} + 1$ に近いものとして計算する。)

```
Clear[kmmin];  
kmmin[0]=sol[0, 3.0];  
kmmin[1]=sol[1, 4.5];  
kmmin[2]=sol[2, 2.5];  
kmmin[m_]:=kmmin[m]=sol[m,kmmin[m-1]+1];  
Table[kmmin[m],{m,0,50}]  
  
Table[kmmin[m+1]-kmmin[m],{m,0,50}]
```

(50 個の \underline{k}_m の計算に MacBook Air で 4 秒弱程度 (2015/12/27)。)

$$\begin{aligned} \underline{k}_{101} - \underline{k}_{100} &= 1.0084094 \dots, & \underline{k}_{201} - \underline{k}_{200} &= 1.0044158 \dots, & \underline{k}_{301} - \underline{k}_{300} &= 1.0028923 \dots, \\ \underline{k}_{401} - \underline{k}_{400} &= 1.0020670 \dots, & \underline{k}_{501} - \underline{k}_{500} &= 1.0015430 \dots, & \underline{k}_{601} - \underline{k}_{600} &= 1.0011783 \dots, \\ \underline{k}_{701} - \underline{k}_{700} &= 1.0009086 \dots, & \underline{k}_{801} - \underline{k}_{800} &= 1.0007005 \dots, \end{aligned}$$

これを見る限りは $\underline{k}_{m+1} - \underline{k}_m = 1 + O\left(\frac{1}{m}\right)$ ($m \rightarrow \infty$) が成り立つことが予想される。

参考まで: $\underline{k}_{800} = 804.498512314177609 \dots$ である (m が小さいときの暫定法則 $\underline{k}_m \doteq m + 0.5$ は破綻している)。

\underline{k}_m ($m = 0, 1, \dots, 801$) を記録した、`kmmins.dat` を残しておく。

```
kmmins = Table[kmmin[m], {m, 0, 801}];
Export["kmmins.dat", kmmins]
```

のぞいてみると (1 行に 1 つの数値が記録されている)

```
$ head ~/kmmins.dat
3.0005228461545709647
4.5248812265006630107
2.3148066415793591252
3.5268949751031908958
4.6728110066821000761
5.7874805906809225927
6.8831698435095385795
7.9658749907810044044
9.0390454126593396449
10.104872160413906527
```

(Mathematica が作るファイルは最後の行に改行 (EOL=0xa) がつかないので、wc で行数を数えると、801 行と表示されるが、実際には 802 行ある。修正しておく。)

このファイルのデータを利用するときは、例えば

kmmins.dat の利用

```
kmmins=Flatten[Import["kmmins.dat"]];
Clear[kmmin];
Table[kmmin[m] = kmmins[[m + 1]], {m, 0, 801}]; (* {m,51,801} かも *)
kmmin[m_]:=kmmin[m]=sol[m,kmmin[m-1]+1];
```

とすると良い (Mathematica は拡張子 .dat のファイルを Import するとき、行列データと見なすので、kmmins は 802 行 1 列の行列 (2 次元リスト) になっている。1 次元にするために Flatten[] を用いている。 $m = 0, 1, \dots, 801$ までは計算した値を用い、 $m \geq 802$ は必要があれば方程式を解いて記憶する)。

注意 以上のやり方では、いわゆるバイナリーでなく、テキスト形式で入出力しているので、最初に計算したものと値が少し異なってしまう。

k_{mn} の値を求める関数 kmn[,] を作る。 n が 1 増えるごとに値が π 位増えるようなので、 k_{mn} は $k_{m,n-1} + \pi$ に近いとして計算する。 k_{00}, k_{01} は「欠番」であるが、ダミーとして 0 を入れておく。

```
Clear[kmn];
kmn[0,0]=0;
kmn[1,0]=0;
kmn[0,1]=kmmin[0];
kmn[1,1]=kmmin[1];
Table[kmn[m,0]=kmmin[m], {m,2,50}];
kmn[m_,n_] := kmn[m,n]=sol[m,kmn[m,n-1]+Pi];

kmns=Table[kmn[m, n], {m, 0, 50}, {n, 0, 20}]
```

(約 1000 個の数値の計算に約 1 分程度。ここでは $m = 0, 1, \dots, 50$ に対して計算するつもりだが、 $m > 50$ に対して計算する場合は `Table[kmn[m, 0] = kmmin[m], m, 2, 50]` をもっと大きいところまでやる必要がある。 $m = 801$ まで計算してあるので、それを使うべきかも。)

k_{mn} ($n = 0, 1, 2, \dots, 10; n = 0, 1, \dots, 20$) は

```
{0, 3.0005228461545709647, 6.2002579175992606103,
 9.3675093710207376360, 12.522711808296102829, 15.672700580778920173,
 18.819984471915969921, 21.965687886152365335, 25.110388467628202730,
 28.254413114049583307, 31.397960631832144671, 34.541158850628322407,
 37.684093692378293585, 40.826825039864830490, 43.969395904173635373,
 47.111837974633780218, 50.254175113559845524, 53.396425631948027065,
 56.538603814907581526, 59.680720970341939006, 62.822786166090947947},
{0, 4.5248812265006630107, 7.7337953983997707416,
 10.906756404560928977, 14.066692688781210787, 17.220338622065260719,
 20.370459881509928696, 23.518406490908383948, 26.664916630497144033,
 29.810428178058324812, 32.955217386573464301, 36.099467181363353035,
 39.243303513410207164, 42.386815943960341246, 45.530069904081867125,
 48.673114309937042223, 51.815986464834962058, 54.958715312811908017,
 58.101323656243126151, 61.243829702976070985, 64.386248168164491040},
{3.5268894751031908958, 5.9380222562207805947, 9.1851055560964628595,
 12.381676857618404881, 15.557510626159218797, 18.722564401133332174,
 21.881260235649885217, 25.035882716868956076, 28.187735802227200454,
 31.337619331072331758, 34.486051649585743207, 37.633383624474525387,
 40.779861315746896950, 43.925662432824833823, 47.070918548319916248,
 50.215729169933788677, 53.360170954315697491, 56.504303914413449293,
 59.648175706505006624, 62.791824656382260115, 65.935281937306436358},
{3.5268894751031908958, 7.2806449885421181566, 10.580408253266802062,
 13.809120995848615761, 17.006992347500979447, 20.188164829946278560,
 23.359180613256568916, 26.523531708921407987, 29.683264324068657427,
 32.839660864178147783, 35.993567378216281043, 39.145565231065864211,
 42.296067394193109367, 45.445375444202899074, 48.593714827169099361,
 51.741257498998835598, 54.888136926434863225, 58.034458300462414220,
 61.180305657127760198, 64.325746947101262439, 67.470837712530806676},
{4.6728110066821000761, 8.5756989787066644594, 11.934443508056310834,
 15.199686438982734760, 18.423158188589733550, 21.623427709607449415,
 24.809284064328090029, 27.985517832604287627, 31.154987433036711873,
 34.319512288138981116, 37.480308812320676427, 40.638222531020194545,
 43.793860102094692074, 46.947668449863038224, 50.09984278047362469,
 53.251066181065422007, 56.401116115150706036, 59.550294138051682712,
 62.698728762901246753, 65.846524380034058733, 68.993766673630264354},
{5.7874805906809225927, 9.8364315167400237244, 13.256521191017848276,
 16.560562240932912367, 19.811746320169281059, 23.033037002194576466,
 26.235463328880129229, 29.425125345379585349, 32.605711879999575630,
 35.779599072521318124, 38.948392339635896095, 42.113218008423317379,
 45.274890880842952589, 48.434015627387612761, 51.591050783603843604,
 54.74630588633859970, 57.900193166928416704, 61.052800005716835767,
 64.204349722367007866, 67.354987989042704442, 70.5048348151102302477},
{6.8831698435095385795, 11.071117902285597468, 14.552967764021056250,
 17.896893337297782511, 21.177030575400885246, 24.420593080409960047,
 27.640787688415556706, 30.844998559492880469, 34.037737493579092287,
 37.221938464533004994, 40.399600857536041353, 43.572138254734526716,
 46.740580372116015615, 49.905696152525466728, 53.068071999434087230,
 56.228163256971198386, 59.386329096861064286, 62.542856766590047780,
 65.697978818693880663, 68.851885592587964180, 72.004734414094411093},
{7.9658749907810044044, 12.285281142495502966, 15.828310483462309436,
 19.212512398863726353, 22.522295715519727651, 25.788934097339927791,
 29.027727800032579222, 32.247303735388635226, 35.452976655348374588,
 38.648229550817698552, 41.835452928771495392, 45.016347940344925366,
 48.192161148703592355, 51.363828466382400670, 54.532067151355391273,
 57.697436667701523185, 60.860380138894187637, 64.021253297637008909,
 67.180345148277931726, 70.337892998911920800, 73.494093584402810783},
{9.0390454126593396449, 13.482801456185670836, 17.085917553459898105,
 20.510365127766345396, 23.850130880230871550, 27.140344265809878297,
 30.398307257615191803, 33.633841832451392129, 36.853039830664137474,
 40.059919269487139920, 43.257254516368437106, 46.447030918990633709,
 49.630710776172693325, 52.809397163862851504, 55.983939123395191804,
 59.155001559352788808, 62.323113051637186438, 65.488699382061792470,
 68.652107555836487366, 71.813623341399821440, 74.973484293977758746},
{10.104872160413906527, 14.666516565751187347, 18.328372324655838444,
 21.792772953508687158, 25.162619683176766180, 28.476694206265855800,
 31.754208123630549334, 35.006129217366917804, 38.239298257136078136,
 41.458251792945792496, 44.666138385045965033, 47.865222031602027983,
 51.057177755880218702, 54.243274359890402929, 57.424492209595237430,
 60.601601795172052382, 63.775217663059341938, 66.945836365992585742,
 70.113863744806501801, 73.279634912498408106, 76.443429137824483215},
{11.164844164719930277, 15.838569376544241302, 19.557705404446965761,
 23.061603319285664978, 26.461468263579618999, 29.799538630376577712,
 33.096846446616939387, 36.365456805766597585, 39.612930834887418742,
 42.844306134782652868, 46.063094585759671176, 49.271832061458162825,
 52.472402139456207225, 55.666236860862168058, 58.854446527967798023,
 62.037906548723330175, 65.217317240254875402, 68.393246037092161302,
 71.566157922425622497, 74.736437781585281387, 77.904407095041060238},
```

このデータは次のようにしてファイルに保存できる。

```
Export["kmns.dat", kmns]
```

利用するには

```

kmns=Import["kmns.dat"];
Clear[kmn];
Table[kmn[m,n]=kmns[[m+1,n]],{m,0,50},{n,0,20}];
kmmns=Import["kmmns.dat"];
Table[kmn[m,0]=kmmns[[m+1]],{m,51,801}]
kmn[m_,n_] := kmn[m,n]=sol[m,kmn[m,n-1]+Pi];

```

小さい方から並べてみる。

```

Sort[Flatten[Table[{m, n}, N[kmn[m, n]]], {m, 0, 50}, {n, 0, 20}], 1],
#1[[2]] < #2[[2]] &]

```

として

$$\begin{aligned}
k_{20} &= 2.31481, & k_{01} &= 3.00052, & k_{30} &= 3.52689, & k_{11} &= 4.52488, & k_{40} &= 4.67281, \\
k_{50} &= 5.78748, & k_{21} &= 5.93802, & k_{02} &= 6.20026, & k_{60} &= 6.88317, & k_{31} &= 7.28064, \\
k_{12} &= 7.73380, & k_{70} &= 7.96587, & k_{41} &= 8.57570, & k_{80} &= 9.03905, & k_{22} &= 9.18511, \\
k_{03} &= 9.36751, & k_{51} &= 9.83643, \dots
\end{aligned}$$

6.5 固有関数の Mathematica による数値計算

$$\lambda = -\frac{a_m(k)}{b_m(k)}$$

という式を得ていたが、 m, n に対して、 $k = k_{mn}$ が定まるので、それに対応して、 λ_{mn} が得られる。

```

Clear[lambda];
lambda[m_,n_] := lambda[m,n]=If[kmn[m,n]>0,-a[m,kmn[m,n]]/b[m,kmn[m,n]],0]

lambdamns=Table[lambda[m,n],{m,0,50},{n,0,20}];
Export["lambdamns.dat",lambdamns];

```

(あれ? $n = 0, 1, 2$ を除いて $|\lambda_{mn}|$ がやけに小さいな。 λ が小さいということは、 $I_m()$ を含む項を落とした $J_m(kr) \cos(m\theta - \phi)$ が良い近似ということで、これは板の固有関数が膜の固有関数に近い、ということの意味する。)

6.6 以上をまとめたコード

```
prepare-circular-plates.nb  
Clear[bj,dbj,bi,dbi,mu,a,b,c,d,sol,kmmin,kmn,lambda]  
bj[m_,x_] := BesselJ[m,x];  
dbj[m_, x_] := (BesselJ[-1 + m, x] - BesselJ[1 + m, x])/2;  
bi[m_, x_] := BesselI[m, x];  
dbi[m_, x_] := (BesselI[-1 + m, x] + BesselI[1 + m, x])/2;  
  
mu=N[3/10,100]; (* 単に mu=3/10 で良いのかも *)  
  
a[m_, k_] := (mu - 1) (k dbj[m, k] - m^2 bj[m, k]) - k^2 bj[m, k];  
b[m_, k_] := (mu - 1) (k dbi[m, k] - m^2 bi[m, k]) + k^2 bi[m, k];  
c[m_, k_] := m^2 (mu - 1) (k dbj[m, k] - bj[m, k]) - k^3 dbj[m, k];  
d[m_, k_] := m^2 (mu - 1) (k dbi[m, k] - bi[m, k]) + k^3 dbi[m, k];  
  
sol[m_,near_] := k/. FindRoot[a[m, k]/b[m, k] == c[m, k]/d[m, k],  
  {k, near}, WorkingPrecision -> 20];  
  
kmmin[0]=sol[0, 3.0];  
kmmin[1]=sol[1, 4.5];  
kmmin[2]=sol[2, 2.5];  
kmmin[m_] := kmmin[m]=sol[m, kmmin[m-1]+1];  
Table[kmmin[m], {m, 0, 50}];  
  
kmn[0,0]=0;  
kmn[1,0]=0;  
kmn[0,1]=kmmin[0];  
kmn[1,1]=kmmin[1];  
Table[kmn[m,0]=kmmin[m], {m, 2, 50}];  
kmn[m_, n_] := kmn[m, n]=sol[m, kmn[m, n-1]+Pi]  
kmns=Table[kmn[m, n], {m, 0, 50}, {n, 0, 20}];  
Export["kmns.dat", kmns];  
  
lambdamn[m_, n_] := lambdamn[m, n]=If[kmn[m, n]>0, -a[m, kmn[m, n]]/b[m, kmn[m, n]], 0]  
lambdamns=Table[lambdamn[m, n], {m, 0, 50}, {n, 0, 20}];  
Export["lambdamns.dat", lambdamns];
```

これを実行すると $0 \leq m \leq 50$, $0 \leq n \leq 20$ に対して、 k_{mn} , λ_{mn} が求まる (k_{00} , k_{10} , λ_{00} , λ_{10} はダミーである。)

固有関数を描くためには、prepare-circular-plates.nb を実行した後に、次を実行する。

draw_chladni_figure_circular_plate.nb

(* 事前に prepare-circular-plates.nb を実行しておく必要がある *)

```
bj[n_, x_] := BesselJ[n, x];
bi[n_, x_] := BesselI[n, x];
angle[x_, y_] := If[y == 0 && x < 0, Pi, Arg[x + I y]];
u[m_, n_, x_, y_] :=
  Block[{lambda, kr, t},
    lambda = lambdamn[m, n];
    kr = kmn[m, n] Sqrt[x^2 + y^2];
    t = angle[x, y];
    (bj[m, kr] + lambda*bi[m, kr]) Cos[m t]
  ];
v[m_, n_, x_, y_] :=
  Block[{lambda, kr, t},
    lambda = lambdamn[m, n];
    kr = kmn[m, n] Sqrt[x^2 + y^2];
    t = angle[x, y];
    (bj[m, kr] + lambda*bi[m, kr]) Sin[m t]
  ];
chladni[m_, n_] :=
  {ContourPlot[{x^2 + y^2 == 1, Boole[x^2 + y^2 < 1] u[m, n, x, y] == 0},
    {x, -1, 1}, {y, -1, 1}],
  If[m > 0,
    ContourPlot[{x^2 + y^2 == 1, Boole[x^2 + y^2 < 1] v[m, n, x, y] == 0},
    {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
  ]}
chladni3d[m_, n_] :=
  {Plot3D[Boole[x^2 + y^2 < 1] u[m, n, x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}],
  If[m > 0,
    Plot3D[Boole[x^2 + y^2 < 1] v[m, n, x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
  ]}
```

prepare-circular-plates.nb の実行には、1分強かかる。それが待てない、ファイル kmns.dat, lambdanns.dat を用意してある、というときには

```

draw_chladni_figure_circular_plate1.nb
bj[n_,x_] := BesselJ[n,x];
bi[n_,x_] := BesselI[n,x];
angle[x_,y_] := If[y==0 && x<0, Pi, Arg[x+I y]];

mydir="work/chladni/20151227";

kmns2=Import[mydir<>"/kmns.dat"];
lambdamns2=Import[mydir<>"/lambdamns.dat"];
kmn2[m_,n_] := kmn2[m,n]=kmns2[[m+1,n]];
lambdamn2[m_,n_] := lambdamn2[m,n]=lambdamns2[[m+1,n]];

u[m_,n_,x_,y_] := Block[{lambda,kr,t},
  lambda=lambdamn2[m,n];
  kr=kmn2[m,n] Sqrt[x^2+y^2];
  t=angle[x,y];
  (bj[m,kr]+lambda*bi[m,kr])Cos[m t]
];

v[m_,n_,x_,y_] := Block[{lambda,kr,t},
  lambda=lambdamn2[m,n];
  kr=kmn2[m,n] Sqrt[x^2+y^2];
  t=angle[x,y];
  (bj[m,kr]+lambda*bi[m,kr])Sin[m t]
];

chladni[m_,n_] := {
  ContourPlot[{x^2+y^2==1,Boole[x^2+y^2<1]u[m,n,x,y]==0},{x,-1,1},{y,-1,1]},
  If[m>0,ContourPlot[{x^2+y^2==1,Boole[x^2+y^2<1]v[m,n,x,y]==0},{x,-1,1},{y,-1,1}]]
}

chladni3d[m_,n_] := {
  Plot3D[Boole[x^2+y^2<1]u[m,n,x,y]==0,{x,-1,1},{y,-1,1]},
  If[m>0,Plot3D[Boole[x^2+y^2<1]v[m,n,x,y]==0,{x,-1,1},{y,-1,1}]]
}

```

```

Table[chladni[m, 0], {m, 2, 5}]
Table[chladni[m, 1], {m, 0, 3}]
Table[chladni[m, 2], {m, 0, 3}]

Table[chladni3d[m, 0], {m, 2, 5}]
Table[chladni3d[m, 1], {m, 0, 3}]
Table[chladni3d[m, 2], {m, 0, 3}]

```

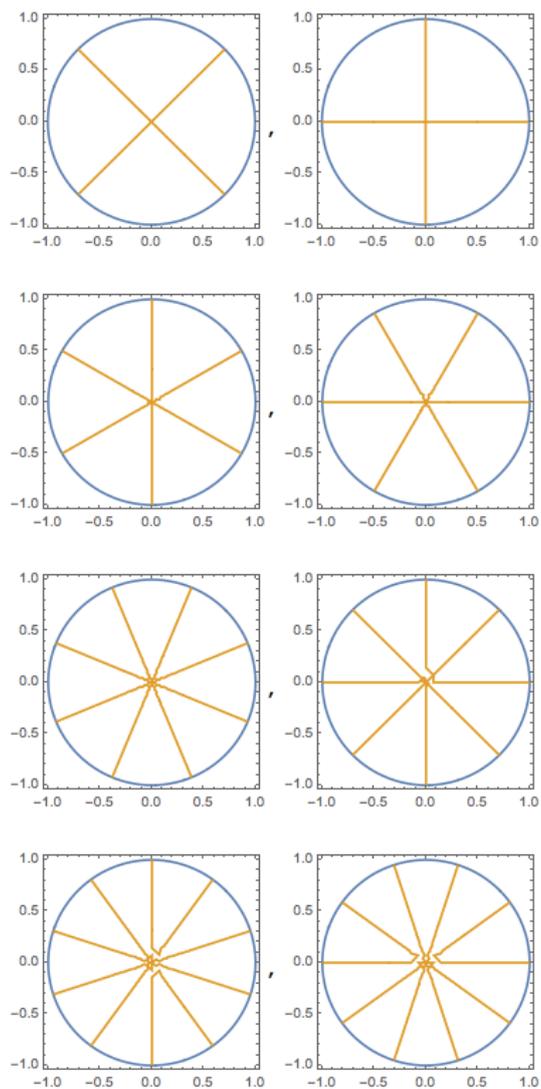


图 6.15: $(m, 0)$ ($2 \leq m \leq 5$)

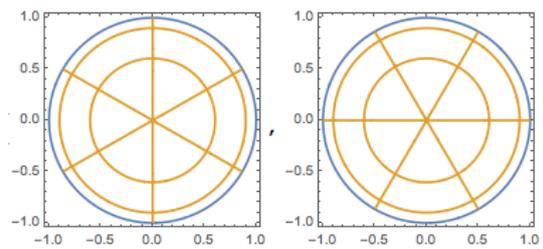
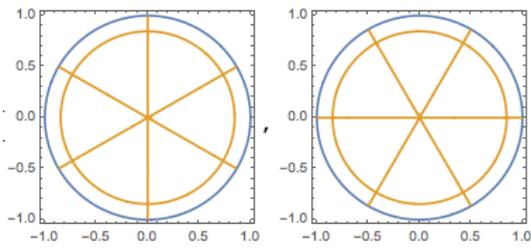
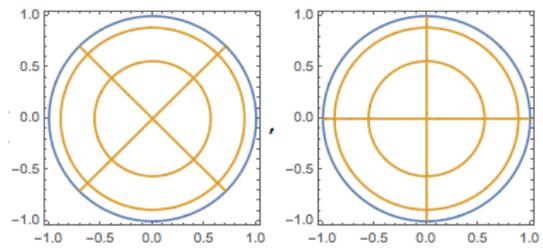
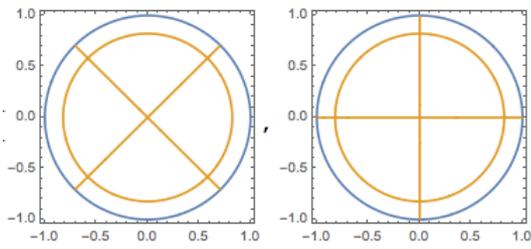
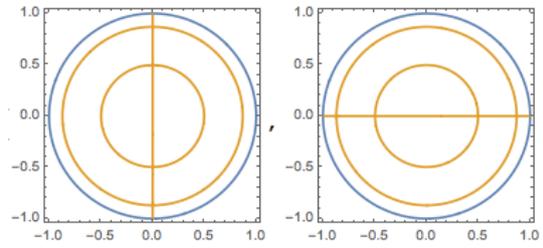
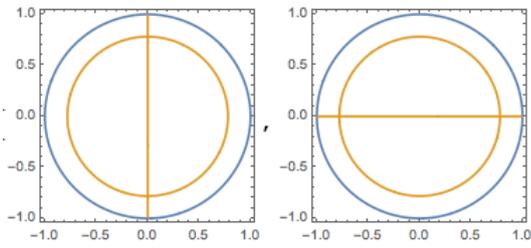
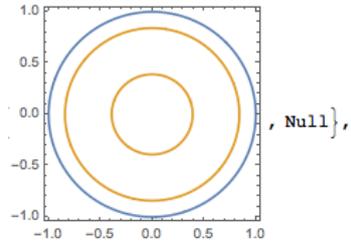
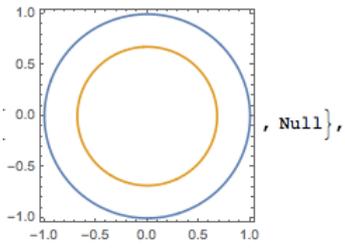


图 6.16: $(m, 1)$ ($0 \leq m \leq 3$)

图 6.17: $(m, 2)$ ($0 \leq m \leq 3$)

6.7 やってみよう

1. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/prepare-circular-plates.nb> を保存して実行する。
1分強かかる。
2. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/draw_chladni_figure_circular_plates.nb を保存して実行する。
3. やってみよう。

```
Table[chladni[m, 0], {m, 2, 5}]
Table[chladni[m, 1], {m, 0, 3}]
Table[chladni[m, 2], {m, 0, 3}]

Table[chladni3d[m, 0], {m, 2, 5}]
Table[chladni3d[m, 1], {m, 0, 3}]
Table[chladni3d[m, 2], {m, 0, 3}]
```

4. 後はお好みで。データを貯めたり、Poisson 比を変えてみたり ($\mu=N[3/10,200]$ を別の値にして計算する。)

Dropbox に入れた `from-katsurada/circular-plates-20151227.nb` は 1~3 までを実行してくれる。所要時間 2 分程度のはず。

6.8 フレッチャー&ロッシング [4] から引用

円板に対しては ∇^2 は極座標で表され、 $Z(r, \phi)$ は $(\nabla^2 + k^2)Z = 0$ か $(\nabla^2 - k^2)Z = 0$ の解になり得る。最初の式の解は普通のベッセル関数 $J_m(kr)$ を、第 2 式の解は双曲ベッセル関数 $I_m(kr) = j^{-m}j_m(jkr)$ を含んでいる (j_m は J_m の誤植でしょう)。したがって、可能な解はこれらベッセル関数の線形結合したものと角度の関数をかけ合わせたもので与えられる。

$$(3.15) \quad Z(r, \phi) = \cos(m\phi + \alpha) [AJ_m(kr) + BI_m(kr)].$$

もしも円板がその円周 $r = a$ で固定されているならば、 $Z = 0$ および $\partial Z / \partial r = 0$ が成り立つ。最初の条件から $AJ_m(ka) + BI_m(ka) = 0$ が、第 2 の条件から $AJ'_m(ka) + BI'_m(ka) = 0$ が得られる。

許される k の値は k_{mn} で表される。ここで m は対応する基準モードの節直径の数で、 n は節円の数である。

$$\begin{aligned} k_{01} &= 3.189/a, & k_{11} &= 4.612/a, & k_{21} &= 5.904/a, \\ k_{02} &= 6.306/a, & k_{12} &= 7.801/a, & k_{22} &= 9.400/a, \\ k_{03} &= 9.425/a, & k_{13} &= 10.965/a, & k_{23} &= 12.566/a, \\ & [k_{mn} \rightarrow (2n + m)\pi/2a \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき}] \end{aligned}$$

これに対応するモード周波数を表 3.1 で与えた。

周辺が自由な円板を数学的に扱うのはもっと困難である。キルヒホッフが用いた境界条件から導かれる k_{mn} [これは大きな ka に対しては $(2n + m)\pi/2r$ になるのだが (これは納得行かないぞ)] の式はもっと複雑である (Rayleigh, 1894 を参照)。この場合は $(2, 0)$ モードが基本周波数となる。モード周

表 3.1 周辺を固定した円板のモード周波数.

$f_{01} = 0.4694c_L h/a^2$	$f_{11} = 2.08f_{01}$	$f_{21} = 3.41f_{01}$	$f_{31} = 5.00f_{20}$	$f_{41} = 6.82f_{01}$
$f_{02} = 3.89f_{01}$	$f_{12} = 5.95f_{01}$	$f_{22} = 8.28f_{01}$	$f_{32} = 10.87f_{01}$	$f_{42} = 13.71f_{01}$
$f_{03} = 8.72f_{01}$	$f_{13} = 11.75f_{01}$	$f_{23} = 15.06f_{01}$	$f_{33} = 18.63f_{01}$	$f_{43} = 27.47f_{01}$

波数を表 3.2 に与えた. 単純支持 (ヒンジ) された周辺を持つ円板に対するモード周波数を表 3.3 に与えた.

表 3.1-3.3 の周波数は主として Leissa (1969) による計算から導かれた. 2 枚の大きな真鍮板について Waller (1938) が行った実測は, 表 3.2 のデータと良い一致を示した. 円板のいくつかのモードを図 3.8 に示す. クラドニ (Chladni, 1802) は, 節円が 1 つ増えたときの円板のモード周波数の増加の程度は, 節直径が 2 つ増えた時に増加する円板のモード周波数とほぼ等しいことを観測した. これは Rayleigh (1894) がクラドニの法則と呼んだ関係式である. 大きな値の ka に対しては, $ka \simeq (m+2n)\pi/2$ である. したがって f は $(m+2n)^2$ に比例する. いろんな円板のモード周波数は曲線群: $f_{mn} = c(m+2n)^p$ に合う. 平板では $p = 2$ であるが, 平らでない板 (シンバル, ベルなど) では, p は一般に 2 以下である (Rossing, 1982c).

表 3.2 周辺を自由にした円板のモード周波数.

—	—	$f_{20} = 0.2413c_L h/a^2$	$f_{30} = 2.328f_{20}$	$f_{40} = 4.11f_{20}$	$f_{50} = 6.30f_{20}$
$f_{01} = 1.73f_{20}$	$f_{11} = 3.91f_{20}$	$f_{21} = 6.71f_{20}$	$f_{31} = 10.07f_{20}$	$f_{41} = 13.92f_{20}$	$f_{51} = 18.24f_{20}$
$f_{02} = 7.34f_{20}$	$f_{12} = 11.40f_{20}$	$f_{22} = 15.97f_{20}$	$f_{32} = 21.19f_{20}$	$f_{42} = 27.18f_{20}$	$f_{52} = 33.31f_{20}$

表 3.3 単純支持の円板のモード周波数.

$f_{01} = 0.2287c_L h/a^2$	$f_{11} = 2.80f_{01}$	$f_{21} = 5.15f_{01}$
$f_{02} = 5.98f_{01}$	$f_{12} = 9.75f_{01}$	$f_{22} = 14.09f_{01}$
$f_{03} = 14.91f_{01}$	$f_{13} = 20.66f_{01}$	$f_{23} = 26.99f_{01}$

照らしあわせ

周波数は k_{mn}^2 に比例する. 最小なのは $(m, n) = (2, 0)$ のときである. 最小周波数との比は次のようにして求められる.

```
kmnr[m_, n_] := kmn[m, n]/kmn[2, 0]
Table[N[kmnr[m, n]^2], {n, 0, 2}, {m, 0, 5}]
```

```
{{0., 0., 1., 2.32143, 4.07499, 6.251},
 {1.68021, 3.82107, 6.58043, 9.8926, 13.7249, 18.057},
 {7.17447, 11.1624, 15.7449, 20.8918, 26.5812, 32.7967}}
```

これを表 3.2 と比較することになる. そういえば Poisson 比は?

備忘録

6.9 Leissa 由来のデータの Poisson 比は

(こういうデータを書かないのは、寝ぼけているよなあ。)

Leissa 1969 とは、Leissa [29] のことかな？あ、結構分かりやすく書いてあるような雰囲気。Poisson 比は 0.33 と 0.25 で計算してある。Poisson 比が 0.33 のとき、 $\lambda_{20}^2 = 5.253$, $\lambda_{01}^2 = 9.084$ で比が $1.7293 \doteq 1.73$ 。Poisson 比が 0.25 のとき、 $\lambda_{20}^2 = 5.513$, $\lambda_{01}^2 = 8.892$ で比が $1.61291 \doteq 1.61$ 。レッチャー&ロッシング [4] の表 3.2 は $f_{01} = 1.73f_{20}$ とあるので、まず間違いなく Poisson 比が 0.33 のデータなんだろう。

Poisson 比 0.33 で Mathematica の計算をやってみたら、 $(k_{01}/k_{20})^2 = 1.7234578035487972018$ になった。うーん、あまり合わない。あ、何か間違えているかな？

私の Mathematica 君の計算

```

1.7234578035487972018    3.898316766007361110    6.697505332706402131    10.057135302694574352    13.944850006303086454    18.340331204880652480
7.317882571851227820    11.375645648406388201    16.034862286617336835    21.266235443654077387    27.04822147828704524    33.36444413437466104
1          2.3268354727145382606    4.091042571112120680    6.283088400425964516

```

再掲表 3.2 周辺を自由にした円板のモード周波数.

—	—	$f_{20} = 0.2413c_L h/a^2$	$f_{30} = 2.328f_{20}$	$f_{40} = 4.11f_{20}$	$f_{50} = 6.30f_{20}$
$f_{01} = 1.73f_{20}$	$f_{11} = 3.91f_{20}$	$f_{21} = 6.71f_{20}$	$f_{31} = 10.07f_{20}$	$f_{41} = 13.92f_{20}$	$f_{51} = 18.24f_{20}$
$f_{02} = 7.34f_{20}$	$f_{12} = 11.40f_{20}$	$f_{22} = 15.97f_{20}$	$f_{32} = 21.19f_{20}$	$f_{42} = 27.18f_{20}$	$f_{52} = 33.31f_{20}$

6.10 なんであの形 (6.5) に書けるのか考える

固有値 λ は非負であることに注意して、 $k := \sqrt[4]{\lambda}$ とおく。固有関数 u は、 r を止めるごとに θ について周期 2π の関数であるから、 $u(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta)$ と展開できる。項別微分してから、Fourier 級数の係数比較をして

$$\begin{aligned} \Delta^2 (a_n(r) \cos n\theta) &= k^4 (a_n(r) \cos n\theta), \\ \Delta^2 (b_n(r) \sin n\theta) &= k^4 (b_n(r) \sin n\theta). \end{aligned}$$

a_n, b_n はともに微分方程式の

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{-n^2}{r^2} + k^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{-n^2}{r^2} - k^2 \right) \varphi = 0$$

正則な解である。そのことから $J_n(kr)$, $I_n(kr)$ の線形結合で書ける。

第7章 FreeFem++ による計算

7.1 Laplacian の固有値問題

FreeFem++ のマニュアルの §9.4 “Eigenvalue Problems” のサンプル・プログラムを微修正して用いる。

```
LaplacianEigenvalues.edp
// LaplacianEigenvalues.edp
//
verbosity=10 ;
mesh Th=square(80,80,[pi*x,pi*y]);
fespace Vh(Th,P2);
Vh u,v;
real shift = 10; // value of the shift
// OP = A - shift B; // the shifted matrix
varf op(u,v)= int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) - shift* u*v )
+ on(1,2,3,4,u=0) ; // Boundary condition
varf b([u],[v]) = int2d(Th)( u*v ); // no Boundary condition
matrix OP= op(Vh,Vh,solver=Crout,factorize=1);
// crout solver because the matrix in not positive
matrix B= b(Vh,Vh,solver=CG,eps=1e-20);
// important remark:
// the boundary condition is make with exact penalisation:
// we put 1e30=tdv on the diagonal term to lock the degree of freedom.
// So take dirichlet boundary condition just on a variationnal form
// and not on b variationnal form.
// because we solve w=OP^-1*B*v

int nev=20; // number of computed eigen valeu close to shift
real[int] ev(nev); // to store the nev eigenvalue
Vh[int] eV(nev); // to store the nev eigenvector

int k=EigenValue(OP,B,sym=true,sigma=shift,value=ev,vector=eV,
tol=1e-10,maxit=0,ncv=0) ;
// return the number of computed eigenvalue
for (int i=0;i<k;i++) {
u=eV[i];
// real gg = int2d(Th)(dx(u)*dx(u) + dy(u)*dy(u));
// real mm= int2d(Th)(u*u);
cout<<"----"<< i<<" , "<<ev[i]<<" , err="
<<int2d(Th)(dx(u)*dx(u) + dy(u)*dy(u) - (ev[i])*u*u)
<< " --- "<<endl;
plot(eV[i],cmm="Eigenvector "+i+", value =" + ev[i] ,wait=1,value=1);
}
```

EigenValue() はシフト法をしているらしい。sigma= でシフト値を指定している。元ネタではシフト値が 20 だったが、そうすると小さい固有値が求まらない。

7.2 Morley 要素

遠藤 [42] から引用

重調和作用素を主な部分に含む偏微分方程式に対する有限要素法では、Morley [43] によって提案された、Fujino-Morley 要素が定評があるので、本研究の計算でも採用した。これは各要素三角形上で、 x と y の 2 次多項式 (すなわち $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$ という形をしている) で、各要素三角形の頂点で連続、かつ辺の midpoint で法線方向の導関数が連続となるような関数からなる有限要素空間である (Kirby-Logg-Rognes-Terrel [44])。いわゆる非適合要素であり、 C^1 級どころか連続にもなっていないが、数学的正当化についても色々研究がなされていて、固有値問題への応用についても、Gallistl [45] で詳しい解析がなされている。

(藤野は、藤野勉先生だろうか？ 藤野 [46] の内容は 4 階微分方程式の「任意節点配置差分法」で、出版は 1984 年だけれど、有限要素法についても少し触れてあって、以前から色々やっついそうだ。[47] 入手してみる？)

Noboru Kikuchi, Finite Element Methods in Mechanics, Cambridge University Press (1986) の §6.4 Finite elements for the Kirchhoff plate に Fujino-Morley elements の説明がある。この本は入手しているので、少し真面目に読んでみるのかな。)

7.3 参考: 重調和作用素の現れる方程式

FreeFem++ のマニュアルで言及されているプログラム `bilapMorley.edp`

$$\Delta^2 u = f \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

```

load "Morley"

int n=100,nn=n+10;
real[int] xx(nn),yy(nn);

mesh Th=square(40,40); // mesh definition of $\Omega$
fespace Vh(Th,P2Morley); // finite element space
// correct june 21 2007 (Thank to Hui Zhang hzhang@mailst.xjtu.edu.cn who find the error)
macro bilaplacien(u,v) ( dxx(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)+2.*dxy(u)*dxy(v)) // fin macro
real f=1;
Vh [u,ux,uy],[v,vx,vy];

solve bilap([u,ux,uy],[v,vx,vy]) =
  int2d(Th)( bilaplacien(u,v) )
  - int2d(Th)(f*v)
  + on(1,2,3,4,u=0,ux=0,uy=0)
;

plot(u,cmm="u", wait=1,fill=1);
plot(ux,wait=1,cmm="u_x");
plot(uy,wait=1,cmm="u_y");

for (int i=0;i<=n;i++)
{
  xx[i]=real(i)/n;
  yy[i]=u(0.5,real(i)/n); // value of uh at point (0.5, i/10.)
}
plot([xx(0:n),yy(0:n)],wait=1);

```

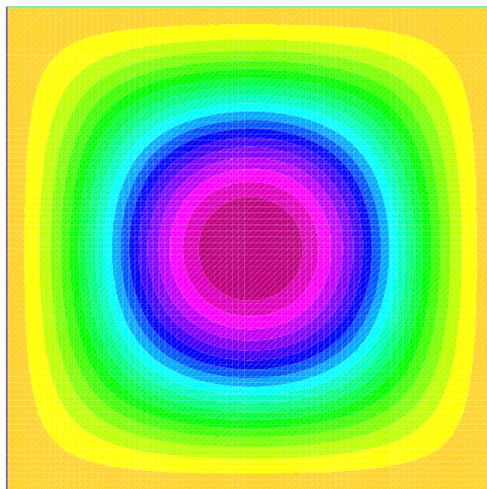


图 7.1: $\Delta^2 u = 1$ in Ω , $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on $\partial\Omega$

7.4 重調和作用素の固有値問題

```
// BiharmonicEigenvalues4.edp
// 参考: http://ljl11.math.upmc.fr/pipermail/freemfempp/2012-March/001737.html

load "Morley"
verbosity=1;
int i;

real sigma=0.3;
mesh Th=square(20,20,[x-0.5,y-0.5]);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

// macro lap2(u,v) (dxx(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)+2.0*dxy(u)*dxy(v)) // EOM
macro lap2(u,v) (dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v)) // EOM
varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(lap2(u,v)
  -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

int nev=40;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);
for (i=0;i<nev;i++) {
  cout << ev[i] << endl;
  // plot(eVu[i],[eVux[i],eVuy[i]],nbiso=64,fill=true,wait=true);
  plot(eVu[i],nbiso=64,fill=true,wait=true);
}
```

7.5 計算プロジェクトのための工夫を考える

- なるべく大きい規模で。
square で 320,320 として、10 万節点、20 万要素。
640 でも行くか？ 40 万節点、82 万要素。良く分からないがメモリ楽勝？あ、駄目だ。4GB の Mac でこけた。UMFPACK を別のに変える？ GMRES としたら動いた？
- <http://comfos.org/jp/ffempp/book/examples/load/index.html> で UMFPACK64 が使える?? 動いたみたいだ。
- 凡例を図に添える。固有値。固有値の番号。
- 数値データをファイルに出力。
- メッシュの分割を。

7.6 対称性を持つメッシュ分割

2014 年度秋学期の応用数値解析特論の課題として、遠藤さんに FreeFem++ に入力可能な正六角形の分割プログラムを作ってもらった。三角形分割が D_6 の対称性を持つため、微分作用素の重複固

有値が重根として計算できると期待している。

7.6.1 hexagon.c

(説明はそのうち書いてもらう)。

```
/*
 * hexagon.c --- 正六角形の分割
 * 2015 January      応用数値解析特論の課題として遠藤小欽さん作成
 * 2015 February 15 分割数を可変にする修正 (by mk)
 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define MAXN (1000) // 一辺の長さを N 等分
//f 六角形の中心を 0 周, 節点からなる六角形の周数
//vx 六角形の頂点の x 座標
//vy 六角形の頂点の y 座標
//x 節点の x 座標
//y 節点の y 座標
//k 六角形を 6 つの正三角形に分け, その三角形の番号
//l k ブロックの何番目の節点番号または要素番号

int c[MAXN+2][6];

int main(int argc, char **argv)
{
    int f,r,l,i,k,e;
    double x, y;
    int N,b;
    double vx[7],vy[7];
    double theta,pi,t;

    if (argc >= 2)
        N = atoi(argv[1]);
    else {
        N = 100;
    }
    if (N > MAXN) {
        fprintf(stderr, "N(=%d) should be <= %d.\n", N, MAXN);
        exit(1);
    }
    printf("%d %d %d\n", 1+3*N*(N+1), 6*N*N, 6*N);
    // 節点につけるラベルは、内点が 0, 境界は 1
    pi = 4.0 * atan(1.0);
    theta = pi/2;
    for (i=0; i<=6; i++) {
        vx[i]=cos(theta); vy[i]=sin(theta); theta -= pi/3;
    }

    x = 0;
    y = 0;
    i = 2;
    printf("%f %f 0\n", x, y);

    for (f = 1;f <= N;f++) {
        for (k=0;k<=5;k++) {
            for (l=0;l < f; l++) {
                e = 1 + k*(2*f-1) + l + 6*(f-1)*(f-1);
```

```

        t = (double)1/f;
        x = (1 - t)*(double)f/N*vx[k] + t*(double)f/N*vx[k+1];
        y = (1 - t)*(double)f/N*vy[k] + t*(double)f/N*vy[k+1];

        if (f != N)
            printf("%f %f 0\n", x, y);
        else
            printf("%f %f 1\n", x, y);
        i++;
    }
}
}
for (f=1;f<=N+1;f++) {
    b=2+3*f*(f-1); // f 周目の最初の節点の節点番号
    for (k = 0; k<= 5; k++)
        c[f][k]=b+k*f; // f 周目の第 k ブロックの最初の節点番号
}

printf("1 3 2 0\n");
printf("1 4 3 0\n");
printf("1 5 4 0\n");
printf("1 6 5 0\n");
printf("1 7 6 0\n");
printf("1 2 7 0\n");

for (f=2;f<=N;f++) {
    for (k=0; k<=5; k++) {
        for (l=1; l<=2*f-1;l++) {
            r=k*(2*f-1)+l;
            e=6*(f-1)*(f-1)+r;

            if (e == 6*f*f)
                printf("%d %d %d 0\n", c[f-1][0],c[f][0],c[f+1][0]-1);
            else if (e == 6 * f*f-1)
                printf("%d %d %d 0\n", c[f][0]-1,c[f-1][0],c[f+1][0]-1);
            else if (l % 2 == 1)
                printf("%d %d %d 0\n", c[f-1][k]+(l-1)/2,
                    c[f][k]+(l+1)/2, c[f][k]+(l-1)/2);
            else // l が偶数
                printf("%d %d %d 0\n", c[f-1][k]+(l-2)/2,
                    c[f-1][k]+l/2, c[f][k]+l/2);
        }
    }
}
b=2+3*N*(N-1); // f 周目の最初の節点の節点番号
for (i=1; i<6*N; i++)
    printf("%d %d 1\n", b+i-1, b+i);

printf("%d %d 1\n", b+6*N-1, b);

return 0;
}

```

7.6.2 BiharmonicEigenvaluesHexagon20150215.edp

```

// BiharmonicEigenvaluesHexagon20150215.edp
// 2015 January 応用数値解析特論課題プログラム
// 参考: http://ljl1.math.upmc.fr/pipermail/freempf/2012-March/001737.html

load "Morley"
load "UMFPACK64"
defaultttoUMFPACK64();

```

```

verbosity=1;
int i;

real sigma=0.3;
mesh Th=readmesh("my.msh");
cout << Th.nt << " triangles, " << Th.nv << " vertices." << endl;

plot(Th,wait=1);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

real[int] levels=[0.0];
// macro lap2(u,v) (dxx(u)*dxx(v)+dyy(u)*dyy(v)+2.0*dxy(u)*dxy(v)) // EOM
macro lap2(u,v) (dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v)) // EOM
varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(lap2(u,v)
  -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

// matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
// matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix A=J(Vh,Vh);
matrix B=K(Vh,Vh);

int nev=200;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);

{
  ofstream f("BiharmonicEigenvaluesHexagon-" + Th.nt+ ".txt");
  f.precision(15);
  for (i = 0; i < nev; i++) {
    f << ev[i] << endl;
  }
}

for (i=0;i<nev;i++) {
  cout << ev[i] << endl;
  plot(eVu[i],viso=levels,cmm=i+"th eigenfunction, eigenvalue="+ev[i],
    wait=true,ps="hexagon_FEM/hexagon"+i+".eps");
}

```

7.6.3 数値実験

使い方

```

gcc hexagon.c
./a.out > my.msh
FreeFem++ BiharmonicEigenvaluesHexagon20150215.edp

```

$N = 100, 200$ で 6 万, 24 万の三角形要素となる。 $N = 400$ でエラーとなった。

```

load "UMFPACK64"
defaultttoUMFPACK64();

```

として UMFPACK64 を使用するように指定したら止まらないようになった。 $N = 800$ で 384 万要

素。これでどうだろう。

```
head *.txt
==> BiharmonicEigenvaluesHexgon-240000.txt <==
-8.96323661971239e-06
-1.49503034832556e-06
5.09637186782058e-06
35.745786081535
74.1603498823887
74.1604018941647
306.696469435733
391.64391634298
479.480268836017
479.480808826172

==> BiharmonicEigenvaluesHexgon-60000.txt <==
-1.20719449884737e-07
-3.86711132108652e-09
1.51126467907326e-07
35.745066259057
74.1554131491647
74.1554384803803
306.667686217701
391.545657849388
479.391029682041
479.391687739177
```

```
% tail *.txt
==> BiharmonicEigenvaluesHexgon-240000.txt <==
678268.343158885
691216.998587695
691217.296020622
698507.185327764
698507.294390946
706881.931161157
708491.251334908
710833.983132567
719225.991808929
738797.865764416

==> BiharmonicEigenvaluesHexgon-60000.txt <==
674231.247134512
685842.254705618
685842.56692331
692816.867685537
692816.958770307
701177.254844934
701938.881211972
707270.542175417
715378.424178159
732734.992080922
```

7.7 マイナーチェンジ

7.7.1 メッシュ分割 polygon20150515.c

```
// 2015/04/20 作成
```

```
#include<stdio.h>
```

```

#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define Maxn (100) //正 n 角形
#define MaxN (250) // 一辺の長さを N 等分
//f 正 n 角形の中心を 0 周, 節点からなる正 n 角形の周数
//vx 正 n 角形の頂点の x 座標
//vy 正 n 角形の頂点の y 座標
//x 節点の x 座標
//y 節点の y 座標
//k 正 n 角形を 8 つの二等辺三角形に分け, その三角形の番号
//l k ブロックの何番目の節点番号または要素番号

// 実行 ./polygon n の値 N の値 >ファイル名.msh

double x[Maxn*MaxN*(MaxN+1)/2+2],y[Maxn*MaxN*(MaxN+1)/2+2];
int b[MaxN+2],c[MaxN+2][Maxn];
double vx[Maxn+1],vy[Maxn+1];

int
main(int argc, char **argv)
{
    int n,N,f,r,l,i,k,e;
    double theta,pi,t;

    n=atoi(argv[1]);//atoi は文字列を int にする
    N=atoi(argv[2]);

    //printf("%s %s\n",argv[1],argv[2]);
    printf("%d %d %d\n", 1+n*N*(N+1)/2, n*N*N, n*N);
    // 節点につけるラベルは、内点が 0, 境界は 1
    pi = 4.0 * atan(1.0);
    theta = pi/2;
    for (i=0; i<=n; i++) {
        vx[i]=cos(theta);
        vy[i]=sin(theta);
        theta -= 2*pi/n;
    }

    x[1] = 0;
    y[1] = 0;
    i = 2;
    printf("%f %f 0",x[1],y[1]);
    printf("\n");

    b[0] = 1;
    for(f = 1;f <= N;f++)
    {
        b[f] = 2 + (n*f*(f-1))/2;

        for(k=0;k<=n-1;k++)
        {

            for(l=0;l < f;l++)
            {
                e = 1 + k*(2*f-1) + l + n*(f-1)*(f-1);

                t = (double)l/f;
                x[i] = (1 - t)*(double)f/N*vx[k] + t*(double)f/N*vx[k+1];
                y[i] = (1 - t)*(double)f/N*vy[k] + t*(double)f/N*vy[k+1];
            }
        }
    }
}

```

```

        if (f != N)
            printf("%f %f 0\n",x[i],y[i]);
        else
            printf("%f %f 1\n",x[i],y[i]);
        i++;
    }

}

}
for (f=1;f<=N+1;f++)
{
    b[f]=2 + (n*f*(f-1))/2;// f 周目の最初の節点の節点番号

    for (k = 0; k<= n-1; k++)
    {
        c[f][k]=b[f]+k*f; // f 周目の第 k ブロックの最初の節点番号
    }
}

for(k = 0;k < n-1;k++)
{
    printf("1 %d %d 0\n",3+k,2+k);
}
printf("1 2 %d 0\n",n+1);
/*
printf("1 3 2 0\n");
printf("1 4 3 0\n");
printf("1 5 4 0\n");
printf("1 6 5 0\n");
printf("1 7 6 0\n");
printf("1 8 7 0\n");
printf("1 2 9 0\n");
*/

for (f=2;f<=N;f++)
{
    for (k=0; k<=n-1; k++)
    {
        for (l=1; l<=2*f-1;l++)
        {
            r=k*(2*f-1)+l;
            e=n*(f-1)*(f-1)+r;

            if (e == n*f*f) {
                printf("%d %d %d 0\n",
                    c[f-1][0],c[f][0],c[f+1][0]-1);
            }
            else if (e == n * f*f-1) {
                printf("%d %d %d 0\n",
c[f][0]-1,c[f-1][0],c[f+1][0]-1);
                // c[f-1][0],c[f+1][0]-1,c[f][0]-1);
            }
            else if (l % 2 == 1) {
                printf("%d %d %d 0\n",
                    c[f-1][k]+(l-1)/2,
                    c[f][k]+(l+1)/2, c[f][k]+(l-1)/2);
            }
            else { // l が偶数
                printf("%d %d %d 0\n",
                    c[f-1][k]+(l-2)/2,

```

```

        c[f-1][k]+1/2, c[f][k]+1/2);
    }
}
}
for (i=1; i<n*N; i++)
{
    printf("%d %d 1\n", b[N]+i-1, b[N]+i);
}

printf("%d %d 1\n", b[N]+n*N-1, b[N]);

return 0;
}

```

```

gcc -o polygon polygon20150515.c
./polygon 6 80 > hexagon80.msh

```

7.7.2 free edge 境界条件下の重調和作用素の固有値問題 bh_evp20150515.edp

```

// bh_evp_v1.edp
// 参考: http://ljl1.math.upmc.fr/pipermail/freefempp/2012-March/001737.html

load "Morley"
verbosity=1;
int i;
string mshfile;
string dirname;

real sigma=0.345;

mshfile = ARGV[2];
cout << "file name: " << mshfile << " " <<endl;
mesh Th=readmesh(mshfile);
plot(Th,wait=1);
// mesh Th=square(20,20,[x-0.5,y-0.5]);
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

real[int] levels=[0.0];
varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
    -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));

varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

int nev=200;
real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);

dirname = ""+n+"-"+
for (i=0;i<nev;i++) {
    cout << ev[i] << endl;

    // plot(eVu[i],[eVux[i],eVuy[i]],nbiso=64,fill=true,wait=true);
    //plot(eVu[i],nbiso=64,fill=true,wait=true);

```

```

    //plot(eVu[i],cmm=i+"th eigenfunction, eigenvalue="+ev[i],fill=false,wait=true);
    plot(eVu[i],viso=levels,cmm=i+"th eigenfunction, eigenvalue="+ev[i],wait=true,ps="squareFEM/square"+i+".
//ps="octagonFEM/octagon"+i+".eps" ; //図を保存する
//ps="eigen"+i+".eps" 図を保存せず, 表示する
}

```

FreeFem++ bh_evp20150515.edp hexagon80.msh

7.8 2015/5/19

7.8.1 polygon.edp

```

// polygon.c --- n 角形の 1 辺を N 等分した場合の三角形分割のメッシュデータ生成
// by 遠藤小欽
// 2015/04/20 作成
// 2015/05/15 改良版
// コンパイル
// gcc -o polygon polygon.c
// 実行
// ./polygon n N ファイル名

```

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

```

```

#define Maxn (100) //正 n 角形
#define MaxN (250) // 一辺の長さを N 等分
//f 正 n 角形の中心を 0 周, 節点からなる正 n 角形の周数
//vx 正 n 角形の頂点の x 座標
//vy 正 n 角形の頂点の y 座標
//x 節点の x 座標
//y 節点の y 座標
//k 正 n 角形を 8 つの二等辺三角形に分け, その三角形の番号
//l k ブロックの何番目の節点番号または要素番号

```

```

// 実行 ./polygon n の値 N の値 メッシュファイルの名前

```

```

double x[Maxn*MaxN*(MaxN+1)/2+2],y[Maxn*MaxN*(MaxN+1)/2+2];
int b[MaxN+2],c[MaxN+2][Maxn];
double vx[Maxn+1],vy[Maxn+1];

```

```

int main(int argc, char **argv)
{
    int n,N,f,r,l,i,k,e;
    double theta,pi,t;
    FILE *fp;

    if (argc >= 3) {
        n=atoi(argv[1]);//atoi は文字列を int にする
        N=atoi(argv[2]);
    }
    else {
        printf("n: "); scanf("%d", &n);
        printf("N: "); scanf("%d", &N);
    }
    if (argc == 4) {
        fp = fopen(argv[3], "w");
        if (fp == NULL) {

```

```

    fprintf(stderr, "cannot open %s\n", argv[3]);
}
}
else
    fp = stdout;

fprintf(fp, "%d %d %d\n", 1+n*N*(N+1)/2, n*N*N, n*N);
// 節点につけるラベルは、内点が0, 境界は1
pi = 4.0 * atan(1.0);
theta = pi/2;
for (i=0; i<=n; i++) {
    vx[i]=cos(theta);
    vy[i]=sin(theta);
    theta -= 2*pi/n;
}
x[1] = 0;
y[1] = 0;
i = 2;
fprintf(fp, "%f %f 0",x[1],y[1]);
fprintf(fp, "\n");

b[0] = 1;
for(f = 1;f <= N;f++) {
    b[f] = 2 + (n*f*(f-1))/2;
    for(k=0;k<=n-1;k++) {
        for(l=0;l < f;l++) {
            e = 1 + k*(2*f-1) + l + n*(f-1)*(f-1);
            t = (double)l/f;
            x[i] = (1 - t)*(double)f/N*vx[k] + t*(double)f/N*vx[k+1];
            y[i] = (1 - t)*(double)f/N*vy[k] + t*(double)f/N*vy[k+1];
            if (f != N)
                fprintf(fp, "%f %f 0\n",x[i],y[i]);
            else
                fprintf(fp, "%f %f 1\n",x[i],y[i]);
            i++;
        }
    }
}
for (f=1;f<=N+1;f++) {
    b[f]=2 + (n*f*(f-1))/2;// f 周目の最初の節点の節点番号
    for (k = 0; k<= n-1; k++) {
        c[f][k]=b[f]+k*f; // f 周目の第 k ブロックの最初の節点番号
    }
}

for (k = 0;k < n-1;k++) {
    fprintf(fp, "1 %d %d 0\n",3+k,2+k);
}
fprintf(fp, "1 2 %d 0\n",n+1);
/*
fprintf(fp, "1 3 2 0\n"); fprintf(fp, "1 4 3 0\n"); fprintf(fp, "1 5 4 0\n");
fprintf(fp, "1 6 5 0\n"); fprintf(fp, "1 7 6 0\n"); fprintf(fp, "1 8 7 0\n");
fprintf(fp, "1 2 9 0\n");
*/
for (f=2;f<=N;f++) {
    for (k=0; k<=n-1; k++) {
        for (l=1; l<=2*f-1;l++) {
            r=k*(2*f-1)+l;
            e=n*(f-1)*(f-1)+r;
            if (e == n*f*f) {
                fprintf(fp, "%d %d %d 0\n", c[f-1][0],c[f][0],c[f+1][0]-1);
            }
            else if (e == n * f*f-1) {

```

```

        fprintf(fp, "%d %d %d 0\n", c[f][0]-1,c[f-1][0],c[f+1][0]-1);
        // c[f-1][0],c[f+1][0]-1,c[f][0]-1);
    }
    else if (l % 2 == 1) {
        fprintf(fp, "%d %d %d 0\n",
            c[f-1][k]+(1-1)/2,
            c[f][k]+(1+1)/2, c[f][k]+(1-1)/2);
    }
    else { // l が偶数
        fprintf(fp, "%d %d %d 0\n",
            c[f-1][k]+(1-2)/2,
            c[f-1][k]+1/2, c[f][k]+1/2);
    }
}
}
}
for (i=1; i<n*N; i++) {
    fprintf(fp, "%d %d 1\n", b[N]+i-1, b[N]+i);
}
fprintf(fp, "%d %d 1\n", b[N]+n*N-1, b[N]);
fclose(fp);
return 0;
}

```

7.8.2 bh_evp_v6.edp

```

// bh_evp_v5.edp --- solve eigenvalue problems of the biharmonic operator
// 2015/5/16 version 4
//
// 参考: http://ljl1.math.upmc.fr/pipermail/freemfempp/2012-March/001737.html
// 用法: FreeFem++ bh_evp_v5.edp project_name [number of ev]
// FreeFem++ bh_evp_v5.edp 6gon80 とすると、
// 6gon80.msh を読み、
// 200 個の固有値、固有関数を計算して
// 6gon80/ev.dat, 6gon80/ef{0,1,...,199}.eps, 6gon80/ef{0,1,...,199}.dat
// を出力する
// FreeFem++ bh_evp_v5.edp 6gon80 100 とすると、固有値は 100 個のみ計算
// FreeFem++ bh_evp_v5.edp 6gon80 200 -nw とすると、図は描かない (バッチむき)
// 当面、正多角形の固有値・固有関数の計算に用いるが、機能は一般的

load "Morley"

verbosity=1;
int n, NN, i;
int nev=200;
string projectname, dirname;

// ポアソン比はアルミニウムの値
real sigma=0.345;

if (ARGV.n >= 3) {
    projectname = ARGV[2];
    if (ARGV.n >= 4)
        nev = atoi(ARGV[3]);
    cout << "projectname: " + projectname + ", nev=" + nev << endl;
}
else {
    cout << "usage: " + ARGV[0] + " " + ARGV[1] + " meshfile_name [nev [-nw]]" << endl;
    exit(0);
}
// ディレクトリ作成
dirname=projectname;

```

```

exec("mkdir " + dirname);

// 三角形分割
mesh Th=readmesh(projectname+".msh");
plot(Th,wait=false,ps=dirname+"/mesh.eps");

fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u,ux,uy], [v,vx,vy];

varf J([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)((dxx(u)+dyy(u))*(dxx(v)+dyy(v))
  -(1-sigma)*(dxx(u)*dyy(v)+dyy(u)*dxx(v)-2.0*dxy(u)*dxy(v)));
varf K([u,ux,uy], [v,vx,vy]) = int2d(Th)(u*v);

matrix A=J(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
matrix B=K(Vh,Vh,solver=UMFPACK);

real[int] ev(nev); // Stockage des valeurs propres
Vh[int] [eVu,eVux,eVuy](nev); // Stockage des vecteurs propres

int k=EigenValue(A,B,sym=true,value=ev,vector=eVu,tol=1e-10,maxit=0,ncv=0);

ofstream f(dirname+"/ev.dat");
// 15桁表示する
f.precision(15);
for (i=0; i<nev; i++)
  f << ev[i] << endl;

real[int] levels=[0.0];

for (i=0;i<nev;i++) {
  cout << ev[i] << endl;
  ofstream f(dirname+"/ef"+i+".dat");
  f << eVu[i] [];

  // ,viso=levels の代わりに ,nbiso=64 のようにするとレベルはお任せ
  // ,fill={false,true} で塗るか塗らないか
  plot(eVu[i],viso=levels,cmm=i+"th eigenfunction, eigenvalue="+ev[i],
    wait=false,ps=dirname+"/ef"+i+".eps", bw=true);
}

```

7.8.3 compute-all2.edp

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
  int debug = 0;
  int n, N;
  char projectname[128], command[128], edpfile[] = "bh_evp_v5.edp";
  for (N = 10; N <= 320; N *= 2) {
    for (n = 3; n <= 12; n++) {
      sprintf(projectname, "%dgon%d", n, N);
      sprintf(command, "./polygon %d %d %s.msh", n, N, projectname);
      if (debug) puts(command); else system(command);
      sprintf(command, "FreeFem++ %s %s 200 -nw", edpfile, projectname);
      if (debug) puts(command); else system(command);
    }
  }
  return 0;
}

```

7.8.4 readtest.edp

```
// blend.edp --- blend two eigenfunctions
// 4gon160.msh で k=8 の場合
// (a,b)=(1,0.205),(-0.205,1)
// (a,b)=(1,1.5),(-1.5,1)

load "Morley";

int k=8;
if (ARGV.n == 3)
    k = atoi(ARGV[2]);

mesh Th=readmesh("4gon160.msh");
fespace Vh(Th, P2Morley);
Vh [u1,ux1,uy1], [u2,ux2,uy2], [u,ux,uy];

ifstream f1("4gon160/ef"+k+".dat");
f1 >> u1[];
plot(u1);

ifstream f2("4gon160/ef"+(k+1)+".dat");
f2 >> u2[];
plot(u2);

real[int] levels=[0.0];

cout << "draw a u+b v=0" << endl;
real a,b;
while (1) {
    cout << "a:"; cin >> a ; if (a>=10) break;
    cout << "b:"; cin >> b ;
    cout << "a=" + a << ", b=" << b << endl;
    u[]=a*u1[]+b*u2[];
    plot(u,wait=0,viso=levels,bw=true,ps="nanka.eps");
}
cout << "Hit return key:";
plot(u,wait=1,viso=levels,bw=true,ps="readtest.eps",cmm="Hit return key:");
cout << "Hit esc key:";
plot(u,ps="readtest2.eps",cmm="Hit esc key:");
```

第8章 平野修論第5章 free edge を持つ正方形板の固有値問題

この章では、 $\Omega = (0, L) \times (0, L)$ とする。

8.1 free edge 境界条件での固有値問題

固定境界条件の場合と同じく、振動の様子を描写するために固有値問題を差分方程式で表し、行列化して固有値、固有関数を求める。まず、固有値問題の微分方程式は

$$(8.1) \quad \Delta^2 u = \lambda u \quad \text{in } \Omega.$$

境界条件は

$$(8.2) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$(8.3) \quad \mu \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

$$(8.4) \quad \text{角点では } \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \text{ が両側で等しい } \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

8.2 差分方程式

(8.1) の差分近似は clamped edge の場合と同様に

$$(8.5) \quad \frac{1}{h_x^4} (U_{i+2,j} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}) \\ + \frac{2}{h_x^2 h_y^2} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} - 2U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} - 2U_{i-1,j} + U_{i-1,j-1}) \\ + \frac{1}{h_y^4} (U_{i,j+2} - 4U_{i,j+1} + 6U_{i,j} - 4U_{i,j-1} + U_{i,j-2}) = \lambda U_{i,j} \\ (0 \leq i \leq N_x; 0 \leq j \leq N_y).$$

ただし、 i と j の範囲が違うことに注意する。clamped edge の場合は境界上では (4.5), (4.6) を適用したが、free edge では (8.5) を境界上で適用するためである。

注の割り込み: (4.5), (4.6) とは

$$(4.5) \quad U_{i,0} = U_{i,N_y} = 0 \quad (0 \leq i \leq N_x),$$

$$(4.6) \quad U_{0,j} = U_{N_x,j} = 0 \quad (0 \leq j \leq N_y),$$

ここでは境界条件の差分近似を行う。(8.2)において、 y 軸に平行な辺 $x = 0, L$ では、

$$(8.6) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

であり、 x 軸に平行な辺 $y = 0, H$ では、

$$(8.7) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0$$

である。

同様に (8.3) において、 y 軸に平行な辺 $x = 0, L$ では、

$$(8.8) \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

x 軸に平行な辺 $y = 0, H$ では、

$$(8.9) \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

である。

(8.6) の差分近似 (8.6) は、

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x = 0, L)$$

であり、ここで $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y)$ を x について3階中心差分近似すると、

$$(8.10) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) = \frac{u(x + 2h_x, y) - 2u(x + h_x, y) + 2u(x - h_x, y) - u(x - 2h_x, y)}{2h_x^3} + O(h_x^2).$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{2h_x h_y^2} \left(u(x + h_x, y + h_y) - 2u(x + h_x, y) + u(x + h_x, y - h_y) \right. \\ &\quad \left. - u(x - h_x, y + h_y) + 2u(x - h_x, y) - u(x - h_x, y - h_y) \right) + O(h_x^2 + h_y^2). \end{aligned}$$

以上より、(8.6) の差分近似として

$$(8.11) \quad \frac{1}{2h_x^3} (U_{i+2,j} - 2U_{i+1,j} + 2U_{i-1,j} - U_{i-2,j}) + \frac{2 - \mu}{2h_x h_y^2} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + 2U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}) = 0 \quad (i = 0, N_x; 0 \leq j \leq N_y).$$

が得られる。

(8.8) の差分近似 (8.8) は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (y = 0, H)$$

であるから、

$$(8.12) \quad \frac{1}{h_x^2} \left(u(x + h_x, y) - 2u(x, y) + u(x - h_x, y) \right) + \frac{\mu}{h_y^2} \left(u(x, y + h_y) - 2u(x, y) + u(x, y - h_y) \right) = 0.$$

以上より、(8.8) の差分方程式として

$$(8.13) \quad \frac{1}{h_x^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{\mu}{h_y^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = 0 \quad (i = 0, N_x; 0 \leq j \leq N_y).$$

が得られる。

(8.7) の差分近似 (8.6) の差分近似と同様に、(8.7) の差分近似として

$$(8.14) \quad \frac{2-\mu}{2h_x^2 h_y} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + 2U_{i,j-1} - U_{i-1,j-1}) \\ + \frac{1}{2h_x^3} (U_{i,j+2} - 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - U_{i,j-2}) = 0 \quad (j = 0, N_y; 0 \leq i \leq N_x).$$

が得られる。

(8.9) の差分近似 (8.8) の差分近似と同様に、(8.9) の差分近似として

$$(8.15) \quad \frac{\mu}{h_x^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + \frac{1}{h_y^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = 0 \quad (j = 0, N_y; 0 \leq i \leq N_x).$$

が得られる。

(8.4) の差分近似 (8.4) は、正方形の四隅の角の点 $(0, 0)$, $(L, 0)$, $(0, H)$, (L, H) では、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 0) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 0), \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(L, 0) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(L, 0), \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, H) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, H), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(L, H) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(L, H) \end{aligned}$$

であるので、いずれも

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{4h_x h_y} \left(u(x + h_x, y + h_y) - u(x + h_x, y - h_y) \right. \\ \left. - u(x - h_x, y + h_y) + u(x - h_x, y - h_y) \right) + O(h_x^2 + h_y^2).$$

以上より、(8.4) の差分近似として、

$$(8.16) \quad \frac{1}{4h_x h_y} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}) = 0 \quad ((i, j) = (0, 0), (N_x, 0), (0, N_y), (N_x, N_y)).$$

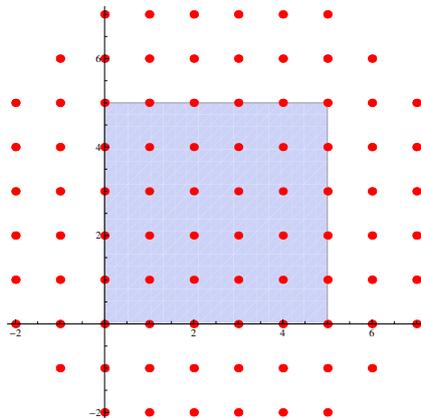
が得られる。

桂田注

格子点の個数と差分方程式の個数を勘定してみる。

格子点の個数 境界上で2,3,4階の微分方程式を課すので、仮想格子点を導入する。 (x_i, y_j) の i と j の範囲は、

$$(i, j) \in \{-2, -1, N+1, N+2\} \times \{0, 1, \dots, N\} \cup \{0, 1, \dots, N\} \times \{-2, -1, N+1, N+2\} \\ \cup \{(-1, -1), (N+1, -1), (N+1, N+1), (-1, N+1)\}.$$



通常の格子点と合わせて、総個数は

$$(N+1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (N+1) + 4 = N^2 + 2N + 1 + 8(N+1) + 4 = N^2 + 10N + 13.$$

差分方程式の個数

(i) $\Delta^2 u = \lambda u$ に対応する差分方程式 (8.5) を $\bar{\Omega}$ に属する格子点で課す。個数は $(N+1)^2$.

(ii) (再掲 5.2) $\frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta u + (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0$

(a) y 軸に平行な辺 $x = 0, 1$ では、

$$(再掲 5.6) \quad \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} + u_{yy} + (1-\mu) u_{yy}) = 0$$

なので、対応する差分方程式をそこに属する格子点で課す。個数は $2(N+1)$.

(b) x 軸に平行な辺 $y = 0, 1$ では、

$$(再掲 5.7) \quad \frac{\partial}{\partial y} (u_{xx} + u_{yy} + (1-\mu) u_{xx}) = 0$$

なので、対応する差分方程式をそこに属する格子点で課す。個数は $2(N+1)$.

(iii) (再掲 5.3) $\mu \Delta u + (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0$

(a) y 軸に平行な辺 $x = 0, 1$ では、

$$(再掲 5.8) \quad \mu \Delta u + (1-\mu) u_{xx} = 0$$

なので、対応する差分方程式をそこに属する格子点で課す。個数は $2(N+1)$.

(b) x 軸に平行な辺 $y = 0, 1$ では、

$$(再掲 5.9) \quad \mu \Delta u + (1-\mu) u_{yy} = 0$$

なので、対応する差分方程式をそこに属する格子点で課す。個数は $2(N+1)$.

(iv) 角点では $u_{xy} = 0$ に対応する差分方程式を課す。個数は 4.

以上 (i), (ii), (iii), (iv) から、差分方程式の個数は

$$(N + 1)^2 + 4 \cdot 2(N + 1) + 4 = N^2 + 10N + 13.$$

```
n=5
l1 = Flatten[Table[{i, j}, {i, 0, n}, {j, 0, n}], 1]
l2 = Flatten[Table[{{i, -2}, {i, -1}, {i, n + 1}, {i, n + 2}}, {i, 0, n}], 1]
l3 = Flatten[Table[{{-1, j}, {-2, j}, {n + 1, j}, {n + 2, j}}, {j, 0, n}], 1]
l4 = {{-1, -1}, {-1, n + 1}, {n + 1, -1}, {n + 1, n + 1}}
l = Union[l1, l2, l3, l4]
g1 = ListPlot[l, AspectRatio->1, PlotStyle -> Directive[PointSize[Large], Red]]
g2 = RegionPlot[x + y < 100, {x, 0, n}, {y, 0, n}]
g = Show[g1, g2, g1]
Export["kasou.eps", g]
```

8.3 境界条件の差分方程式の整理

前節で求めた差分方程式は、仮想格子点上の値 U_{ij} ($i < 0$ または $i > N_x$ または $j < 0$ または $j > N_y$) を含んでいる。このうち境界条件から導かれた差分方程式を用いて、境界から2離れたところ、境界から1離れたところ、角の近くの仮想格子点の値をそうでない格子点で表す。簡単のため、仮定を追加し、 $h_x = h_y = h$ とする。

8.3.1 境界から2離れたところ

ここでは、境界から2つ離れたところの仮想格子点をそうでない格子点で表す。つまり、(8.11) を $U_{-2,j}, U_{N_x+2,j}$ について解き、(8.14) を $U_{i,-2}, U_{i,N_y+2}$ について解く。

(8.11) で $i = 0$ の場合、

$$\frac{1}{2h^3}(U_{2,j} - 2U_{1,j} + 2U_{-1,j} - U_{-2,j}) + \frac{2-\mu}{2h^3}(U_{1,j+1} - 2U_{1,j} + U_{1,j-1} - U_{-1,j+1} + 2U_{-1,j} - U_{-1,j-1}) = 0 \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

これを $U_{-2,j}$ について解くと、

(8.17)

$$U_{-2,j} = U_{2,j} - 2U_{1,j} + 2U_{-1,j} + (2-\mu)(U_{1,j+1} - 2U_{1,j} + U_{1,j-1} - U_{-1,j+1} + 2U_{-1,j} - U_{-1,j-1}) \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

(8.11) で $i = N_x$ の場合、

$$\frac{1}{2h^3}(U_{N_x+2,j} - 2U_{N_x+1,j} + 2U_{N_x-1,j} - U_{N_x-2,j}) + \frac{2-\mu}{2h^3}(U_{N_x+1,j+1} - 2U_{N_x+1,j} + U_{N_x+1,j-1} - U_{N_x-1,j+1} + 2U_{N_x-1,j} - U_{N_x-1,j-1}) = 0 \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

これを $U_{N_x+2,j}$ について解くと、

$$(8.18) \quad U_{N_x+2,j} = U_{N_x-2,j} - 2U_{N_x-1,j} + 2U_{N_x+1,j} - (2-\mu)(U_{N_x+1,j+1} - 2U_{N_x+1,j} + U_{N_x+1,j-1} - U_{N_x-1,j+1} + 2U_{N_x-1,j} - U_{N_x-1,j-1}) \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

(8.14) で $j = 0$ の場合、

$$\begin{aligned} \frac{2-\mu}{2h^3} (U_{i+1,1} - 2U_{i,1} + U_{i-1,1} - U_{i+1,-1} + 2U_{i,-1} - U_{i-1,-1}) \\ + \frac{1}{2h^3} (U_{i,2} - 2U_{i,1} + 2U_{i,-1} - U_{i,-2}) = 0 \quad (0 \leq i \leq N_x). \end{aligned}$$

これを $U_{i,-2}$ について解くと、

(8.19)

$$U_{i,-2} = U_{i,2} - 2U_{i,1} + 2U_{i,-1} + (2-\mu)(U_{i+1,1} - 2U_{i,1} + U_{i-1,1} - U_{i+1,-1} + 2U_{i,-1} - U_{i-1,-1}) \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

(8.14) で $j = Ny$ の場合、

$$\begin{aligned} \frac{2-\mu}{2h^3} (U_{i+1,Ny+1} - 2U_{i,Ny+1} + U_{i-1,Ny+1} - U_{i+1,Ny-1} + 2U_{i,Ny-1} - U_{i-1,Ny-1}) \\ + \frac{1}{2h^3} (U_{i,Ny+2} - 2U_{i,Ny+1} + 2U_{i,Ny-1} - U_{i,Ny-2}) = 0 \quad (0 \leq i \leq N_x). \end{aligned}$$

これを $U_{i,Ny+2}$ について解くと、

$$(8.20) \quad U_{i,Ny+2} = U_{i,Ny-2} - 2U_{i,Ny-1} + 2U_{i,Ny+1}$$

$$- (2-\mu)(U_{i+1,Ny+1} - 2U_{i,Ny+1} + U_{i-1,Ny+1} - U_{i+1,Ny-1} + 2U_{i,Ny-1} - U_{i-1,Ny-1}) \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

8.3.2 境界から1離れたところ

ここでは、境界から1つ離れたところの仮想格子点をそうでない格子点で表す。つまり、(8.13) を $U_{-1,j}, U_{Nx,j}$ について解き、(8.15) を $U_{i,-1}, U_{i,Ny+1}$ について解く。

(8.13) で $i = 0$ の場合、

$$\frac{1}{h^2} (U_{1,j} - 2U_{0,j} + U_{-1,j}) + \frac{\mu}{h^2} (U_{0,j+1} - 2U_{0,j} + U_{0,j-1}) = 0 \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

これを $U_{-1,j}$ について解くと、

$$(8.21) \quad U_{-1,j} = -\mu(U_{0,j+1} - 2U_{0,j} + U_{0,j-1}) - U_{1,j} + 2U_{0,j} \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

(8.13) で $i = Nx$ の場合、

$$\frac{1}{h^2} (U_{Nx+1,j} - 2U_{Nx,j} + U_{Nx-1,j}) + \frac{\mu}{h^2} (U_{Nx,j+1} - 2U_{Nx,j} + U_{Nx,j-1}) = 0 \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

これを $U_{Nx+1,j}$ について解くと、

$$(8.22) \quad U_{Nx+1,j} = -\mu(U_{Nx,j+1} - 2U_{Nx,j} + U_{Nx,j-1}) - U_{Nx-1,j} + 2U_{Nx,j} \quad (0 \leq j \leq N_y).$$

(8.15) で $j = 0$ の場合

$$\frac{\mu}{h^2} (U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}) + \frac{1}{h^2} (U_{i,1} - 2U_{i,0} + U_{i,-1}) = 0 \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

これを $U_{i,-1}$ について解くと、

$$(8.23) \quad U_{i,-1} = -\mu(U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}) - U_{i,1} + 2U_{i,0} \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

(8.15) で $j = Ny$ の場合

$$\frac{\mu}{h^2} (U_{i+1,Ny} - 2U_{i,Ny} + U_{i-1,Ny}) + \frac{1}{h^2} (U_{i,Ny+1} - 2U_{i,Ny} + U_{i,Ny-1}) = 0 \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

これを $U_{i,Ny+1}$ について解くと、

$$(8.24) \quad U_{i,Ny+1} = -\mu(U_{i+1,Ny} - 2U_{i,Ny} + U_{i-1,Ny}) - U_{i,Ny+1} + 2U_{i,Ny} \quad (0 \leq i \leq N_x).$$

8.3.3 角の近く

ここでは、角の近くの5つの仮想格子点での値を、そうでない格子点での値で表す方程式を導く。まず、(0,0)の近くの5点 $U_{0,-1}$, $U_{-1,0}$, $U_{-1,-1}$, $U_{-2,0}$, $U_{0,-2}$ について解く。その他の角の近くの格子点は(0,0)の近くの5点と同様に求めて求める。また、 $U_{-2,0}$ など境界から2離れた仮想格子点を求めるときは、非常に複雑な計算になるので、Mathematica であらゆる格子点の値を確かめられるようにプログラムを作り検算をした。(プログラムは付録参照)

(1) (0,0)の近く まず、 $U_{0,-1}$, $U_{-1,0}$ を求める。

(8.21) で $j = 0$ 、(8.23) で $i = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned} U_{-1,0} &= -\mu(U_{0,1} - 2U_{0,0} + U_{0,-1}) - U_{1,0} + 2U_{0,0}, \\ U_{0,-1} &= -\mu(U_{1,0} - 2U_{0,0} + U_{-1,0}) - U_{0,1} + 2U_{0,0}. \end{aligned}$$

これを $U_{-1,0}$ と $U_{0,-1}$ についての連立方程式として解いて、

$$(8.25) \quad U_{0,-1} = 2U_{0,0} - U_{0,1},$$

$$(8.26) \quad U_{-1,0} = 2U_{0,0} - U_{1,0}.$$

次に、 $U_{-1,-1}$ を求める。(8.16) は $(i, j) = (0, 0)$ のとき

$$(8.27) \quad \frac{1}{4h^2} (U_{1,1} - U_{1,-1} - U_{-1,1} + U_{-1,-1}) = 0.$$

ここで、(8.21) で $j = 1$ 、(8.23) で $i = 1$ とおくと、

$$(8.28) \quad U_{-1,1} = -\mu(U_{0,2} - 2U_{0,1} + U_{0,0}) - U_{1,1} + 2U_{0,1},$$

$$(8.29) \quad U_{1,-1} = -\mu(U_{2,0} - 2U_{1,0} + U_{0,0}) - U_{1,1} + 2U_{1,0},$$

これを(8.27)に代入して

$$(8.30) \quad U_{-1,-1} = -3U_{1,1} - \mu(U_{2,0} + U_{0,2}) + 2(1 + \mu)(U_{1,0} + U_{0,1}) - 2\mu U_{0,0}.$$

最後に $U_{-2,0}$, $U_{0,-2}$ を求める。(8.17) で $j = 0$ の場合

$$U_{-2,0} = U_{2,0} - 2U_{1,0} + 2U_{-1,0} + (2 - \mu) (U_{1,1} - 2U_{1,0} + U_{1,-1} - U_{-1,1} + 2U_{-1,0} - U_{-1,-1}).$$

これに(8.28), (8.29), (8.30)を代入して、

$$(8.31) \quad U_{-2,0} = U_{2,0} - 4U_{1,0} + 4U_{0,0} + 2(2 - \mu) (2U_{1,1} - 2U_{1,0} + 2U_{0,0} - 2U_{0,1} + \mu(U_{0,2} - 2U_{0,1} + U_{0,0})).$$

同様に、(8.19) で $i = 0$ の場合

$$U_{0,-2} = U_{0,2} - 2U_{0,1} + 2U_{0,-1} + (2 - \mu) (U_{1,1} - 2U_{0,1} + U_{-1,1} - U_{1,-1} + 2U_{0,-1} - U_{-1,-1}).$$

に(8.28), (8.29), (8.30)を代入して、

$$(8.32) \quad U_{0,-2} = U_{0,2} - 4U_{0,1} + 4U_{0,0} + 2(2 - \mu) (2U_{1,1} - 2U_{0,1} + 2U_{0,0} - 2U_{1,0} + \mu(U_{2,0} - 2U_{1,0} + U_{0,0})).$$

(2) $(N_x, 0)$ の近く $(0,0)$ の近くの点と同様に計算すると、

$$(8.33) \quad U_{N_x, -1} = 2U_{N_x, 0} - U_{N_x, 1},$$

$$(8.34) \quad U_{N_x+1, 0} = 2U_{N_x, 0} - U_{N_x-1, 0}.$$

$$(8.35) \quad U_{N_x+1, -1} = -3U_{N_x-1, 1} - \mu(U_{N_x, 2} + U_{N_x-2, 0}) + 2(1 + \mu)(U_{N_x-1, 0} + U_{N_x, 1}) - 2\mu U_{N_x, 0}.$$

$$(8.36) \quad U_{N_x+2, 0} = U_{N_x-2, 0} - 4U_{N_x-1, 0} + 4U_{N_x, 0} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, 1} - 2U_{N_x-1, 0} + 2U_{N_x, 0} - 2U_{N_x, 1} + \mu(U_{N_x, 2} - 2U_{N_x, 1} + U_{N_x, 0}))$$

$$(8.37) \quad U_{N_x, -2} = U_{N_x, 2} - 4U_{N_x, 1} + 4U_{N_x, 0} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, 1} - 2U_{N_x, 1} + 2U_{N_x, 0} - 2U_{N_x-1, 0} + \mu(U_{N_x-2, 0} - 2U_{N_x-1, 0} + U_{N_x, 0})).$$

(3) $(0, N_y)$ の近く $(0,0)$ の近くの点と同様に計算すると、

$$(8.38) \quad U_{0, N_y+1} = 2U_{0, N_y} - U_{0, N_y-1},$$

$$(8.39) \quad U_{-1, N_y} = 2U_{0, N_y} - U_{1, N_y}.$$

$$(8.40) \quad U_{-1, N_y+1} = -3U_{1, N_y-1} - \mu(U_{2, N_y} + U_{0, N_y-2}) + 2(1 + \mu)(U_{1, N_y} + U_{0, N_y-1}) - 2\mu U_{0, N_y}.$$

$$(8.41) \quad U_{0, N_y+2} = U_{0, N_y-2} - 4U_{0, N_y-1} + 4U_{0, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{1, N_y-1} - 2U_{0, N_y-1} + 2U_{0, N_y} - 2U_{1, N_y} + \mu(U_{2, N_y} - 2U_{1, N_y} + U_{0, N_y})).$$

$$(8.42) \quad U_{-2, N_y} = U_{2, N_y} - 4U_{1, N_y} + 4U_{0, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{1, N_y-1} - 2U_{1, N_y} + 2U_{0, N_y} - 2U_{0, N_y-1} + \mu(U_{0, N_y-2} - 2U_{0, N_y-1} + U_{0, N_y})).$$

(4) (N_x, N_y) の近く $(0,0)$ の近くの点と同様に計算すると、

$$(8.43) \quad U_{N_x, N_y+1} = 2U_{N_x, N_y} - U_{N_x, N_y-1},$$

$$(8.44) \quad U_{N_x+1, N_y} = 2U_{N_x, N_y} - U_{N_x-1, N_y}.$$

$$(8.45) \quad U_{N_x+1, N_y+1} = -3U_{N_x-1, N_y-1} - \mu(U_{N_x-2, N_y} + U_{N_x, N_y-2}) + 2(1 + \mu)(U_{N_x-1, N_y} + U_{N_x, N_y-1}) - 2\mu U_{N_x, N_y}.$$

$$(8.46) \quad U_{N_x, N_y+2} = U_{N_x, N_y-2} - 4U_{N_x, N_y-1} + 4U_{N_x, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, N_y-1} - 2U_{N_x, N_y-1} + 2U_{N_x, N_y} - 2U_{N_x-1, N_y} + \mu(U_{N_x-2, N_y} - 2U_{N_x-1, N_y} + U_{N_x, N_y})).$$

$$(8.47) \quad U_{N_x+2, N_y} = U_{N_x-2, N_y} - 4U_{N_x-1, N_y} + 4U_{N_x, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, N_y-1} - 2U_{N_x-1, N_y} + 2U_{N_x, N_y} - 2U_{N_x, N_y-1} + \mu(U_{N_x, N_y-2} - 2U_{N_x, N_y-1} + U_{N_x, N_y})).$$

8.3.4 この節のまとめ

この節で得た差分方程式は、後に仮想格子点を通常格子点で表すために必要なので、以下にまとめておく。

$$(8.48) \quad U_{-1,j} = -\mu(U_{0,j+1} - 2U_{0,j} + U_{0,j-1}) - U_{1,j} + 2U_{0,j} \quad (1 \leq j \leq N_y - 1).$$

$$(8.49) \quad U_{Nx+1,j} = -\mu(U_{Nx,j+1} - 2U_{Nx,j} + U_{Nx,j-1}) - U_{Nx-1,j} + 2U_{Nx,j} \quad (1 \leq j \leq N_y - 1).$$

$$(8.50) \quad U_{i,-1} = -\mu(U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}) - U_{i,1} + 2U_{i,0} \quad (1 \leq i \leq N_x - 1).$$

$$(8.51) \quad U_{i,Ny+1} = -\mu(U_{i+1,Ny} - 2U_{i,Ny} + U_{i-1,Ny}) - U_{i,Ny+1} + 2U_{i,Ny} \quad (1 \leq i \leq N_x - 1).$$

$$(8.52)$$

$$U_{-2,j} = U_{2,j} - 2U_{1,j} + 2U_{-1,j} + (2-\mu)(U_{1,j+1} - 2U_{1,j} + U_{1,j-1} - U_{-1,j+1} + 2U_{-1,j} - U_{-1,j-1}) \quad (1 \leq j \leq N_y - 1).$$

$$(8.53) \quad U_{Nx+2,j} = U_{Nx-2,j} - 2U_{Nx-1,j} + 2U_{Nx+1,j} \\ - (2-\mu)(U_{Nx+1,j+1} - 2U_{Nx+1,j} + U_{Nx+1,j-1} - U_{Nx-1,j+1} + 2U_{Nx-1,j} - U_{Nx-1,j-1}) \quad (1 \leq j \leq N_y - 1).$$

$$(8.54)$$

$$U_{i,-2} = U_{i,2} - 2U_{i,1} + 2U_{i,-1} + (2-\mu)(U_{i+1,1} - 2U_{i,1} + U_{i-1,1} - U_{i+1,-1} + 2U_{i,-1} - U_{i-1,-1}) \quad (1 \leq i \leq N_x - 1).$$

$$(8.55) \quad U_{i,Ny+2} = U_{i,Ny-2} - 2U_{i,Ny-1} + 2U_{i,Ny+1} \\ - (2-\mu)(U_{i+1,Ny+1} - 2U_{i,Ny+1} + U_{i-1,Ny+1} - U_{i+1,Ny-1} + 2U_{i,Ny-1} - U_{i-1,Ny-1}) \quad (1 \leq i \leq N_x - 1).$$

$$(8.56) \quad U_{0,-1} = 2U_{0,0} - U_{0,1},$$

$$(8.57) \quad U_{-1,0} = 2U_{0,0} - U_{1,0}.$$

$$(8.58) \quad U_{Nx,Ny+1} = 2U_{Nx,Ny} - U_{Nx,Ny-1},$$

$$(8.59) \quad U_{Nx+1,Ny} = 2U_{Nx,Ny} - U_{Nx-1,Ny}.$$

$$(8.60) \quad U_{Nx,-1} = 2U_{Nx,0} - U_{Nx,1},$$

$$(8.61) \quad U_{Nx+1,0} = 2U_{Nx,0} - U_{Nx-1,0}.$$

$$(8.62) \quad U_{0,Ny+1} = 2U_{0,Ny} - U_{0,Ny-1},$$

$$(8.63) \quad U_{-1,Ny} = 2U_{0,Ny} - U_{1,Ny}.$$

$$(8.64) \quad U_{-1,-1} = -3U_{1,1} - \mu(U_{2,0} + U_{0,2}) + 2(1+\mu)(U_{1,0} + U_{0,1}) - 2\mu U_{0,0}.$$

$$(8.65) \quad U_{Nx+1,-1} = -3U_{Nx-1,1} - \mu(U_{Nx,2} + U_{Nx-2,0}) + 2(1+\mu)(U_{Nx-1,0} + U_{Nx,1}) - 2\mu U_{Nx,0}.$$

$$(8.66) \quad U_{-1,Ny+1} = -3U_{1,Ny-1} - \mu(U_{2,Ny} + U_{0,Ny-2}) + 2(1+\mu)(U_{1,Ny} + U_{0,Ny-1}) - 2\mu U_{0,Ny}.$$

(8.67)

$$U_{N_x+1, N_y+1} = -3U_{N_x-1, N_y-1} - \mu(U_{N_x-2, N_y} + U_{N_x, N_y-2}) + 2(1 + \mu)(U_{N_x-1, N_y} + U_{N_x, N_y-1}) - 2\mu U_{N_x, N_y}.$$

$$(8.68) \quad U_{-2,0} = U_{2,0} - 4U_{1,0} + 4U_{0,0} + 2(2 - \mu)(2U_{1,1} - 2U_{1,0} + 2U_{0,0} - 2U_{0,1} + \mu(U_{0,2} - 2U_{0,1} + U_{0,0})).$$

$$(8.69) \quad U_{0,-2} = U_{0,2} - 4U_{0,1} + 4U_{0,0} + 2(2 - \mu)(2U_{1,1} - 2U_{0,1} + 2U_{0,0} - 2U_{1,0} + \mu(U_{2,0} - 2U_{1,0} + U_{0,0})).$$

$$(8.70) \quad U_{N_x+2,0} = U_{N_x-2,0} - 4U_{N_x-1,0} + 4U_{N_x,0} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1,1} - 2U_{N_x-1,0} + 2U_{N_x,0} - 2U_{N_x,1} + \mu(U_{N_x,2} - 2U_{N_x,1} + U_{N_x,0})).$$

$$(8.71) \quad U_{N_x,-2} = U_{N_x,2} - 4U_{N_x,1} + 4U_{N_x,0} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1,1} - 2U_{N_x,1} + 2U_{N_x,0} - 2U_{N_x-1,0} + \mu(U_{N_x-2,0} - 2U_{N_x-1,0} + U_{N_x,0})).$$

$$(8.72) \quad U_{0, N_y+2} = U_{0, N_y-2} - 4U_{0, N_y-1} + 4U_{0, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{1, N_y-1} - 2U_{0, N_y-1} + 2U_{0, N_y} - 2U_{1, N_y} + \mu(U_{2, N_y} - 2U_{1, N_y} + U_{0, N_y})).$$

$$(8.73) \quad U_{-2, N_y} = U_{2, N_y} - 4U_{1, N_y} + 4U_{0, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{1, N_y-1} - 2U_{1, N_y} + 2U_{0, N_y} - 2U_{0, N_y-1} + \mu(U_{0, N_y-2} - 2U_{0, N_y-1} + U_{0, N_y})).$$

$$(8.74) \quad U_{N_x, N_y+2} = U_{N_x, N_y-2} - 4U_{N_x, N_y-1} + 4U_{N_x, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, N_y-1} - 2U_{N_x, N_y-1} + 2U_{N_x, N_y} - 2U_{N_x-1, N_y} + \mu(U_{N_x-2, N_y} - 2U_{N_x-1, N_y} + U_{N_x, N_y})).$$

$$(8.75) \quad U_{N_x+2, N_y} = U_{N_x-2, N_y} - 4U_{N_x-1, N_y} + 4U_{N_x, N_y} \\ + 2(2 - \mu)(2U_{N_x-1, N_y-1} - 2U_{N_x-1, N_y} + 2U_{N_x, N_y} - 2U_{N_x, N_y-1} + \mu(U_{N_x, N_y-2} - 2U_{N_x, N_y-1} + U_{N_x, N_y})).$$

8.4 通常格子点での値のみを用いた差分方程式

ここでは(8.5)に含まれる仮想格子点での値を8.3.4の結果を用いて消去し、通常格子点での値のみの方程式を導出する。この計算は非常に複雑なので、Mathematicaを用いて検算した。

8.4.1 境界から2以上離れた内部のところ

$2 \leq i \leq N_x - 2, 2 \leq j \leq N_y - 2$ に対しては、

$$(8.76) \quad \frac{1}{h_x^4} (U_{i+2,j} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}) \\ + \frac{2}{h_x^2 h_y^2} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} - 2U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} - 2U_{i-1,j} + U_{i-1,j-1}) \\ + \frac{1}{h_y^4} (U_{i,j+2} - 4U_{i,j+1} + 6U_{i,j} - 4U_{i,j-1} + U_{i,j-2}) = \lambda U_{i,j} \\ (2 \leq i \leq N_x - 2, 2 \leq j \leq N_y - 2).$$

8.4.2 境界から1離れたところ

$i = 1, 2 \leq j \leq N_y - 2$ (左) に対しては、(8.5) に、(8.21) を代入して、

$$(8.77) \quad \frac{1}{h^4} \left(19U_{1,j} - 8(U_{2,j} + U_{1,j+1} + U_{1,j-1}) + 2(-3 + \mu)U_{0,j} + (2 - \mu)(U_{0,j+1} + U_{0,j-1}) \right. \\ \left. + 2(U_{2,j+1} + U_{2,j-1}) + U_{3,j} + U_{1,j+2} + U_{1,j-2} \right) = \lambda U_{1,j} \quad (2 \leq j \leq N_y - 2).$$

$j = 1, 2 \leq i \leq N_x - 2$ (下) のときも同様にして、

$$(8.78) \quad \frac{1}{h^4} \left(19U_{i,1} - 8(U_{i,2} + U_{i+1,1} + U_{i-1,1}) + 2(-3 + \mu)U_{i,0} + (2 - \mu)(U_{i+1,0} + U_{i-1,0}) \right. \\ \left. + 2(U_{i+1,2} + U_{i-1,2}) + U_{i,3} + U_{i+2,1} + U_{i-2,1} \right) = \lambda U_{i,1} \quad (2 \leq i \leq N_x - 2).$$

$i = N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 2$ (右) のときも同様にして、

$$(8.79) \quad \frac{1}{h^4} \left(19U_{N_x-1,j} - 8(U_{N_x-2,j} + U_{N_x-1,j+1} + U_{N_x-1,j-1}) \right. \\ \left. + 2(-3 + \mu)U_{N_x,j} + (2 - \mu)(U_{N_x,j+1} + U_{N_x,j-1}) + 2(U_{N_x-2,j+1} + U_{N_x-2,j-1}) \right. \\ \left. + U_{N_x-3,j} + U_{N_x-1,j+2} + U_{N_x-1,j-2} \right) = \lambda U_{N_x-1,j} \quad (2 \leq j \leq N_y - 2).$$

$j = N_y - 1, 2 \leq i \leq N_x - 2$ (上) のときも同様にして、

$$(8.80) \quad \frac{1}{h^4} \left(19U_{i,N_y-1} - 8(U_{i,N_y-2} + U_{i+1,N_y-1} + U_{i-1,N_y-1}) + 2(-3 + \mu)U_{i,N_y} \right. \\ \left. + (2 - \mu)(U_{i+1,N_y} + U_{i-1,N_y}) + 2(U_{i+1,N_y-2} + U_{i-1,N_y-2}) \right. \\ \left. + U_{i,N_y-3} + U_{i+2,N_y-1} + U_{i-2,N_y-1} \right) = \lambda U_{i,N_y-1} \quad (2 \leq i \leq N_x - 2).$$

8.4.3 境界上 (角の近くを除く)

$i = 0, 2 \leq j \leq N_y - 2$ (左) に対しては、(8.5) に、(8.21), (8.17) を代入して、

$$(8.81) \quad \frac{1}{h^4} \left(2U_{2,j} + 4(-3 + \mu)U_{1,j} + 2(8 - 4\mu - 3\mu^2)U_{0,j} \right. \\ \left. + 4(-2 + \mu + \mu^2)(U_{0,j+1} + U_{0,j-1}) + 2(2 - \mu)(U_{1,j+1} + U_{1,j-1}) \right. \\ \left. + (1 - \mu^2)(U_{0,j+2} + U_{0,j-2}) \right) = \lambda U_{0,j} \quad (2 \leq j \leq N_y - 2).$$

$j = 0, 2 \leq i \leq N_x - 2$ (下) に対しても同様に、

$$(8.82) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &2U_{i,2} + 4(-3 + \mu)U_{i,1} + 2(8 - 4\mu - 3\mu^2)U_{i,0} \\ &+ 4(-2 + \mu + \mu^2)(U_{i+1,0} + U_{i-1,0}) + 2(2 - \mu)(U_{i+1,1} + U_{i-1,1}) \\ &+ (1 - \mu^2)(U_{i+2,0} + U_{i-2,0}) \end{aligned} \right) = \lambda U_{i,0} \quad (2 \leq i \leq N_x - 2).$$

$i = N_x, 2 \leq j \leq N_y - 2$ (右) に対しても同様に、

$$(8.83) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &2U_{N_x-2,j} + 4(-3 + \mu)U_{N_x-1,j} + 2(8 - 4\mu - 3\mu^2)U_{N_x,j} \\ &+ 4(-2 + \mu + \mu^2)(U_{N_x,j+1} + U_{N_x,j-1}) + 2(2 - \mu)(U_{N_x-1,j+1} + U_{N_x-1,j-1}) \\ &+ (1 - \mu^2)(U_{N_x,j+2} + U_{N_x,j-2}) \end{aligned} \right) = \lambda U_{N_x,j} \quad (2 \leq j \leq N_y - 2).$$

$j = N_y, 2 \leq i \leq N_x - 2$ (上) に対しても同様に、

$$(8.84) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &2U_{i,N_y-2} + 4(-3 + \mu)U_{i,N_y-1} + 2(8 - 4\mu - 3\mu^2)U_{i,N_y} \\ &+ 4(-2 + \mu + \mu^2)(U_{i+1,N_y} + U_{i-1,N_y}) + 2(2 - \mu)(U_{i+1,N_y-1} + U_{i-1,N_y-1}) \\ &+ (1 - \mu^2)(U_{i+2,N_y} + U_{i-2,N_y}) \end{aligned} \right) = \lambda U_{i,N_y} \quad (2 \leq i \leq N_x - 2).$$

8.4.4 角に近いところ

角点から斜めに移動した点

$(i, j) = (1, 1)$ のときは、(8.5) に、(8.28) と (8.29) を代入して、

$$(8.85) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &18U_{1,1} - 8(U_{1,2} + U_{2,1}) + 2(-3 + \mu)(U_{0,1} + U_{1,0}) \\ &+ (2 - \mu)(U_{0,2} + U_{2,0}) - 2(-1 + \mu)U_{0,0} + 2U_{2,2} + U_{1,3} + U_{3,1} \end{aligned} \right) = \lambda U_{1,1}.$$

$(i, j) = (N_x - 1, 1)$ のときは同様に、

$$(8.86) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &18U_{N_x-1,1} - 8(U_{N_x-1,2} + U_{N_x-2,1}) + 2(-3 + \mu)(U_{N_x,1} + U_{N_x-1,0}) \\ &+ (2 - \mu)(U_{N_x,2} + U_{N_x-2,0}) - 2(-1 + \mu)U_{N_x,0} + 2U_{N_x-2,2} + U_{N_x-1,3} + U_{N_x-3,1} \end{aligned} \right) = \lambda U_{N_x-1,1}.$$

$(i, j) = (1, N_y - 1)$ のときは同様に、

$$(8.87) \quad \frac{1}{h^4} \left(\begin{aligned} &18U_{1,N_y-1} - 8(U_{1,N_y-2} + U_{2,N_y-1}) + 2(-3 + \mu)(U_{0,N_y-1} + U_{1,N_y}) \\ &+ (2 - \mu)(U_{0,N_y-2} + U_{2,N_y}) - 2(-1 + \mu)U_{0,N_y} + 2U_{2,N_y-2} + U_{1,N_y-3} + U_{3,N_y-1} \end{aligned} \right) = \lambda U_{1,N_y-1}.$$

$(i, j) = (N_x - 1, N_y - 1)$ のときは同様に、

$$(8.88) \quad \frac{1}{h^4} \left(18U_{N_x-1, N_y-1} - 8(U_{N_x-1, N_y-2} + U_{N_x-2, N_y-1}) + 2(-3 + \mu)(U_{N_x, N_y-1} + U_{N_x-1, N_y}) \right. \\ \left. + (2 - \mu)(U_{N_x, N_y-2} + U_{N_x-2, N_y}) - 2(-1 + \mu)U_{N_x, N_y} + 2U_{N_x-2, N_y-2} + U_{N_x-1, N_y-3} + U_{N_x-3, N_y-1} \right) = \lambda U_{N_x-1, N_y-1}.$$

角点から上下左右に一つ移動した点

$(i, j) = (1, 0)$ のときは、(8.5) に、(8.23), (8.19), (8.25), (8.26) を代入して、

$$(8.89) \quad \frac{1}{h^4} \left((15 - 8\mu - 5\mu^2)U_{1,0} + 4(-2 + \mu + \mu^2)U_{2,0} + 2(-3 + 2\mu + \mu^2)U_{0,0} + 4(-3 + \mu)U_{1,1} \right. \\ \left. + 2(2 - \mu)(U_{0,1} + U_{2,1}) + (1 - \mu^2)U_{3,0} + 2U_{1,2} \right) = \lambda U_{1,0}.$$

$(i, j) = (0, 1)$ のときは、(8.5) に、(8.21), (8.17), (8.25), (8.26) を代入して、

$$(8.90) \quad \frac{1}{h^4} \left((15 - 8\mu - 5\mu^2)U_{0,1} + 4(-2 + \mu + \mu^2)U_{0,2} + 2(-3 + 2\mu + \mu^2)U_{0,0} + 4(-3 + \mu)U_{1,1} \right. \\ \left. + 2(2 - \mu)(U_{1,0} + U_{1,2}) + (1 - \mu^2)U_{0,3} + 2U_{2,1} \right) = \lambda U_{0,1}.$$

角点

$(i, j) = (0, 0)$ のときは、(8.5) に、(8.21), (8.23), (8.25), (8.26), (8.30), (8.31), (8.32) を代入して、

$$(8.91) \quad \frac{1}{h^4} \left(-4(-3 + 2\mu + \mu^2)(U_{0,0} - U_{0,1} - U_{1,0}) + 2(1 - \mu^2)(U_{0,2} + U_{2,0}) - 8(-1 + \mu)U_{1,1} \right) = \lambda U_{0,0}.$$

8.5 差分方程式の行列表現

(これは平野君の修論のコピー)

8.5.1 差分方程式の整理

8.4 節で求めた差分方程式を、

$$a = -2(-3 + 2\mu + \mu^2), \quad b = 1 - \mu^2, \quad c = -2(-1 + \mu) \\ d = 15 - 8\mu - 5\mu^2, \quad e = -4(-2 + \mu + \mu^2), \quad f = 2 - \mu, \quad g = -2(-3 + \mu), \\ k = 2(8 - 4\mu - 3\mu^2)$$

とにおいて以下にまとめる。

$2 \leq i \leq N_x - 2, 2 \leq j \leq N_y - 2$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(20U_{i,j} - 8(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \right. \\ \left. + 2(U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}) + U_{i+2,j} + U_{i-2,j} + U_{i,j+2} + U_{i,j-2} \right) = \lambda U_{i,j}.$$

$i = 1, 2 \leq j \leq N_y - 2$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(19U_{1,j} - 8(U_{2,j} + U_{1,j+1} + U_{1,j-1}) - gU_{0,j} \right. \\ \left. + f(U_{0,j+1} + U_{0,j-1}) + 2(U_{2,j+1} + U_{2,j-1}) + U_{3,j} + U_{1,j+2} + U_{1,j-2} \right) = \lambda U_{1,j}.$$

$2 \leq i \leq N_x - 2, j = 1$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(19U_{i,1} - 8(U_{i,2} + U_{i+1,1} + U_{i-1,1}) - gU_{i,0} \right. \\ \left. + f(U_{i+1,0} + U_{i-1,0}) + 2(U_{i+1,2} + U_{i-1,2}) + U_{i,3} + U_{i+2,1} + U_{i-2,1} \right) = \lambda U_{i,1}.$$

$i = 0, 2 \leq j \leq N_y - 2$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(2U_{2,j} - 2gU_{1,j} + kU_{0,j} - e(U_{0,j+1} + U_{0,j-1}) \right. \\ \left. + 2f(U_{1,j+1} + U_{1,j-1}) + b(U_{0,j+2} + U_{0,j-2}) \right) = \lambda U_{0,j}.$$

$2 \leq i \leq N_x - 2, j = 0$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(2U_{i,2} - 2gU_{i,1} + kU_{i,0} - e(U_{i+1,0} + U_{i-1,0}) \right. \\ \left. + 2f(U_{i+1,1} + U_{i-1,1}) + b(U_{i+2,0} + U_{i-2,0}) \right) = \lambda U_{i,0}.$$

$i = N_x - 1, 2 \leq j \leq N_y - 2$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(19U_{N_x-1,j} + f(U_{N_x,j+1} + U_{N_x,j-1}) - gU_{N_x,j} \right. \\ \left. - 8(U_{N_x-2,j} + U_{N_x-1,j+1} + U_{N_x-1,j-1}) + 2(U_{N_x-2,j+1} + U_{N_x-2,j-1}) \right. \\ \left. + U_{N_x-3,j} + U_{N_x-1,j+2} + U_{N_x-1,j-2} \right) = \lambda U_{N_x-1,j}.$$

$2 \leq i \leq N_x - 2, j = N_y - 1$ のとき、

$$\frac{1}{h^4} \left(19U_{i,N_y-1} + f(U_{i+1,N_y} + U_{i-1,N_y}) - gU_{i,N_y} \right. \\ \left. - 8(U_{i,N_y-2} + U_{i+1,N_y-1} + U_{i-1,N_y-1}) + 2(U_{i+1,N_y-2} + U_{i-1,N_y-2}) \right. \\ \left. + U_{i,N_y-3} + U_{i+2,N_y-1} + U_{i-2,N_y-1} \right) = \lambda U_{i,N_y-1}.$$

であり、

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{0,0}/2 \\ U_{1,0}/\sqrt{2} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,0}/\sqrt{2} \\ U_{N_x,0}/2 \\ \hline U_{0,1}/\sqrt{2} \\ U_{1,1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,1} \\ U_{N_x,1}/\sqrt{2} \\ \hline \vdots \\ U_{0,N_y-1}/\sqrt{2} \\ U_{1,N_y-1} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,N_y-1} \\ U_{N_x,N_y-1}/\sqrt{2} \\ \hline U_{0,N_y}/2 \\ U_{1,N_y}/\sqrt{2} \\ \vdots \\ U_{N_x-1,N_y}/\sqrt{2} \\ U_{N_x,N_y}/2 \end{pmatrix}$$

である。

具体的なプログラムは、付録の [K.1.5](#) を見よ。

第9章 行列の対称化

「微分作用素の固有値問題」¹ に書いたこと。

9.1 1次元の Neumann 境界条件付き Laplacian の固有値問題

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

に対して、 $[0, 1]$ を N 等分し、仮想格子点を導入して差分方程式を立てると、

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}.$$

この左辺に現れる行列を A と書くことにする。両辺の第 0, N 成分に $\frac{1}{2}$ をかけると、

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2}U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ \frac{1}{2}U_N \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$(9.1) \quad A'U = \lambda BU,$$

という一般化固有値問題に帰着される。ただし

$$A' := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right], \quad U := (U_0, U_1, \dots, U_N)^T.$$

¹<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/2012/library2012/chladni-figures/eigenvalues-of-differential-op>

第10章 2015年度応用数理学会で発表した 内容

(準備中)

正 n 角形の固有値が縮重する場合の固有関数を、左下の頂点が節になるようにブレンドしたものの節線が持つ対称性全体は、 n のいずれかの約数であるような m (ただし $m < n$, n が偶数の場合は m も偶数) に対する D_m である。

第11章 Chladniの法則

2021年度現象数理専攻の修士論文(平井 [48])で、いわゆる Chladni の法則をテーマとしてとりあげた。

11.1 Chladniの法則とは

微小な粉を撒いた板に振動を与えるとき、(現代的に言う)特定の振動数で“共振”が起こって Chladni 図形が浮かび上がるわけであるが、パターンから読み取れる指数 m, n と対応する振動数 $f_{m,n}$ について、Chladni は次のことに気づいた。

Chladni の法則 version 1

自由な円形板の Chladni 図形で、節である直径の個数 m と、節である円の個数 n , 共振の起こる振動数 f_{mn} について

$$(11.1) \quad f_{m+2,n} \doteq f_{m,n+1}$$

が成り立つ(実験による近似法則)。

今日有名な物理学者である Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) は、1850年に出版された [20] の中で、現在 Kirchhoff-Love の理論と呼ばれる弾性板の(1つの)振動理論を確立した。その論文の中で、弾性板の振動の偏微分方程式と、縁が自由な場合の境界条件の方程式を導出し、円形板の場合の固有値問題を解いて、実験結果との照らし合わせを行った。

正方形板の固有値・固有関数を数値計算を用いずに解くのは困難であるが、円形板の場合は、固有値はある非線形方程式の解として特徴付けられ、対応する固有関数は、その固有値を用いれば既知の関数を用いた具体的な式で表現できる、というのが要点である。

これら固有値は非負であり、0を除いたもの(正であるもの)は、上で説明した m と n を用いて λ_{mn} と表現できる ($(m, n) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$)。無次元化した場合に $k_{mn} := \sqrt[4]{\lambda_{mn}}$ とおくと、漸近解析¹で次のことが成り立つことを導いた。

Chladni の法則 version 2' ([20] の p.)

任意の $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, 十分大きな任意の n に対して、ある自然数 h が存在して

$$(11.2) \quad k_{mn} \doteq \left(\frac{m}{2} + h\right) \pi.$$

h は (m, n) に依存するように読めるが、Rayleigh (John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842–1919) は、有名な著作 [1] の中で、「数値計算によると $h = n$ である」と述べた。すなわち

¹Poisson が導いた(変形) Bessel 関数の漸近展開式を利用した。

Chladni の法則 version 2 (Rayleigh [1] の p.)

任意の $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, 十分大きな任意の n に対して

$$(11.3) \quad k_{mn} \doteq \left(\frac{m}{2} + n\right) \pi.$$

(特に $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(k_{mn} - \left(\frac{m}{2} + n\right) \pi\right) = 0$.)

Rayleigh は、この法則を **Chladni の法則** と呼んだ。

この章では、便宜上 version 1, 2', 2 と呼んで区別する。

version 1 は経験法則である。Chladni は振動数を測定したわけではなく、音階を耳で聴き取ることで確認した。また m, n はそれほど大きな数ではない。

version 2' は数学モデルについて、数学的な (厳密に言うと証明にはなっていないが、ギャップを埋めて証明に出来る可能性がある) 議論を行うことにより “導かれた” 法則である。

version 2 は version 2' の改良版で、数学モデルについて、数学的議論と数値計算結果の観察により導かれた法則である。

式だけを見ると、version 2 の

$$k_{mn} \doteq \left(\frac{m}{2} + n\right) \pi$$

から version 1 の

$$k_{m+2,n} \doteq k_{m,n+1}$$

が導かれそうであるが、どちらも近似式であり、version 1 が小さな m, n に対するデータから導かれた経験則であるのに対して、version 2 が漸近的な解析から導かれたため (どちらかという n が大きいときに成り立つと期待される)、はっきりとしたことは言えないように思われる。

11.2 平井の修士論文の主な結果

平井君の研究 [48] は、Kirchhoff の議論をフォローして、方程式の解を精密に数値計算したものを用いて、解析を行った結果が主な内容である。

次が成り立つと推測される。

Chladni の法則 version 2X

任意の $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して、ある C_m が存在して

$$(11.4) \quad k_{mn} - \left(\frac{m}{2} + n\right) \pi \sim \frac{C_m}{n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

これはある意味で version 2 の改良版 (精密版) であり、これ自体は version 1 との直接的関係はない。version 1 と比較できるものとして、次の結果がある。

Chladni の法則 version 1X

数値計算をした限り $k_{m+2,n} < k_{m,n+1}$ であり、多くの場合に振動数は音階で言うと半音異ならない。

例えば $0 \leq m \leq 12, 0 \leq n \leq 12$ の範囲で、 $k_{m+2,n}$ と $k_{m,n+1}$ の違いを図示したのが図 11.1 である。 $n \geq 6$ ならば半音の 1/2 以下の違いしかない。

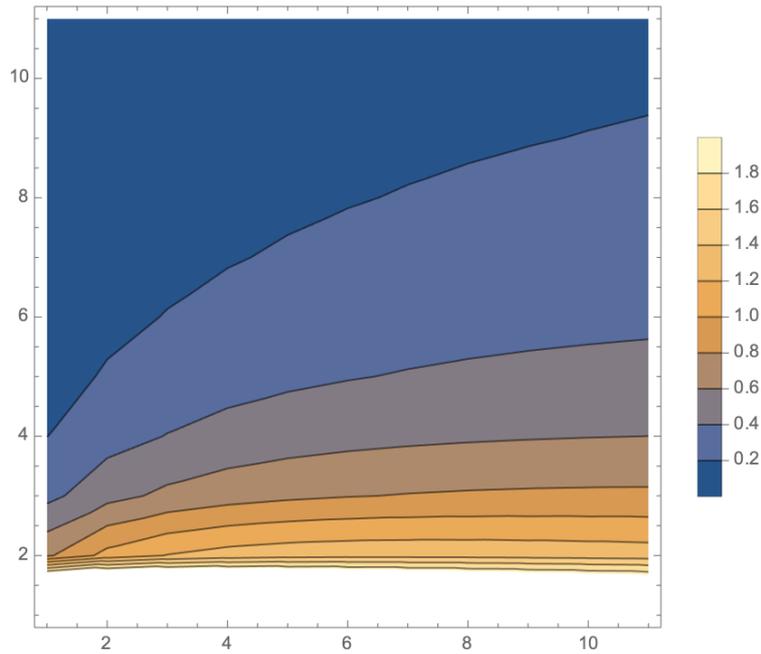


図 11.1: 半音を基準として、 $k_{m,n+1}$ より $k_{m+2,n}$ がどれだけ高いか

以上は、free edge の円形板の場合であるが、clamped edge の円形板の場合にも、ほぼ並行した議論が成立し、 k_{mn} ($(m, n) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{N}$) について

$$(11.5) \quad (\forall m \in \mathbf{Z}_{\geq 0})(\exists C_m) \quad k_{mn} - \left(\frac{m}{2} + n\right) \pi \sim \frac{C_m}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことが分かった。

さらに、縁を固定した円形膜の振動 (通常の波動方程式の初期値 Dirichlet 境界値問題) の固有値 λ_{mn} については、 $k_{mn} := \sqrt{\lambda_{mn}}$ とおいたとき

$$(\forall m \in \mathbf{Z}_{\geq 0})(\exists C_m) \quad k_{mn} - \left(\frac{m}{2} + n - \frac{1}{4}\right) \pi \sim \frac{C_m}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことも分かった。

付録 A 1次元の棒の振動

棒の固有値問題の具体的な計算は、渡部 [5] にある。また桂田 [32] で整理してある。

A.1 渡部 [5] から $(0, 1)$ での結果

$$(A.1) \quad u''''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad u''(0) = u'''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

境界条件を満たす関数全体を X とおくと、

$$(u'''' , v) = (u, v'''') \quad (u, v \in X)$$

が成り立つ。また

$$(u'''' , u) = (u'' , u'') \geq 0 \quad (u \in X)$$

である。従って固有値は (存在すれば、すべて) 非負の実数である。

0 は固有値であるが、その固有空間は 1 次関数全体 (ゆえに 2 次元) である。

固有値に小さい方から (重複度の分だけ重複して) 番号付けたものを $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ とおく。

$\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ であるが、対応する固有関数として

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

が取れる。

$$(u_0, u_1) = 0, \quad \|u_0\| = \|u_1\| = 1$$

が成り立つ。

$\mu_n := \sqrt[4]{\lambda_n}$ とおくと、

$$\mu_0 = \mu_1 = 0.$$

また $\{\mu_n\}_{n \geq 2}$ は

$$\cos \mu\pi = \frac{1}{\cosh \mu\pi}$$

の正の解全体である。これから

$$n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mu_n = (n - 1/2)\pi, \quad \text{sign}(\mu_n - (n - 1/2)\pi) = (-1)^n$$

が成り立つ。

$$\lambda_n = \mu_n^4 \quad (n \geq 0)$$

であるから、 λ_n ($n \geq 2$) は simple (固有空間の次元は 1) であるので、それに属する固有関数は定数倍を除いて一意的に定まる。具体的に求めると、

$$u_n(x) = (\sin \mu_n - \sinh \mu_n)(\cos \mu_n x + \cosh \mu_n x) - (\cos \mu_n - \cosh \mu_n)(\sin \mu_n x + \sinh \mu_n x).$$

正規化したいものだ。Mathematica に労働してもらって

$$(A.2) \quad \int_0^1 |u_n(x)|^2 dx = (\sin \mu_n - \sinh \mu_n)^2.$$

すなわち

$$\|u_n\| = \sinh \mu_n - \sin \mu_n.$$

だから正規化するには、 $n \geq 2$ に対して次のように定義しなおせば良い。

$$u_n(x) = \frac{(\sin \mu_n - \sinh \mu_n) (\cos \mu_n x + \cosh \mu_n x) - (\cos \mu_n - \cosh \mu_n) (\sin \mu_n x + \sinh \mu_n x)}{\sinh \mu_n - \sin \mu_n}.$$

(A.2) の確認

```
u[x_] := (Sin[mu] - Sinh[mu]) (Cos[mu x] + Cosh[mu x]) - (Cos[mu] -
  Cosh[mu]) (Sin[mu x] + Sinh[mu x])
i = Integrate[u[x]^2, {x, 0, 1}]
i2 = FullSimplify[i, Assumptions -> Element[mu, Reals]]
i3 = i2 /. Cosh[mu] -> 1/Cos[mu]
i4=Simplify[i3]
```

試してみよう

```
mu[n_] :=
  mu[n] = If[n == 0 || n == 1, 0,
    x /. FindRoot[Cos[x]==1/Cosh[x], {x, (n-1/2) Pi}, WorkingPrecision -> 50]]

Table[mu[n], {n, 0, 100}]

Table[mu[n]^4, {n, 0, 100}]

uf[n_, x_] :=
  Switch[n, 0, 1, 1, 2 Sqrt[3] (x - 1/2),
    - ,
    ((Sin[mu[n]] - Sinh[mu[n]]) (Cos[mu[n] x] + Cosh[mu[n] x])
  - (Cos[mu[n]] - Cosh[mu[n]]) (Sin[mu[n] x] + Sinh[mu[n] x]))
  / (Sinh[mu[n]] - Sin[mu[n]])]

Table[Integrate[uf[n, x]^2, {x, 0, 1}], {n, 0, 10}]

g1 = Table[Plot[uf[n, x], {x, 0, 1}], {n, 0, 10}]
```

$\mu_2 = 4.7300407448627040260240481008338848198983418007068,$
 $\mu_3 = 7.8532046240958375564770666872540497903223041739907,$
 $\mu_4 = 10.995607838001670906669032519105892417542803030576,$
 $\mu_5 = 14.137165491257464177105917855093330752875295100128, \dots$

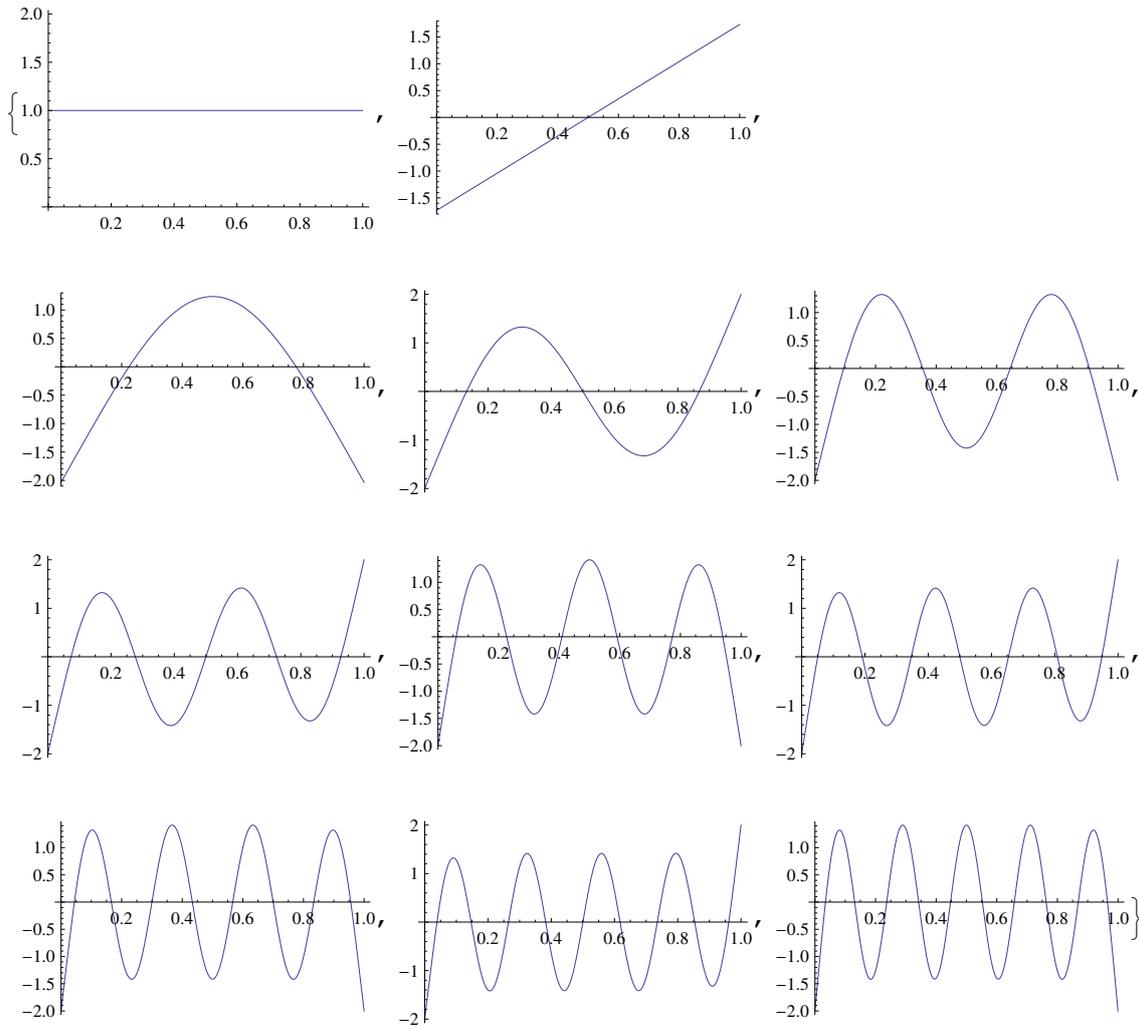


図 A.1: 正規化した u_n のグラフ ($(0, 1)$ の場合)

A.1.1 対称性の議論のために

次式が成り立つ。

$$u_m(1-x) = (-1)^m u_m(x).$$

<http://localhost/~mk/labo/library/chladni-figures/endo/memo20141203.pdf> を見よ。その内容を電子化すること。

A.2 Gander-Kwok [6] から $(-1, 1)$ での結果

棒の長さを 2 として、領域を $(-1, 1)$ とすると、かなり式の見栄えが変わるので、そちらの式も書いておくことにする。Ritz の正方形板の論文で、Ritz は板の占める領域を $(-1, 1) \times (-1, 1)$ として、Ritz の方法の基底関数を棒の固有関数のテンソル積で作ったので、この節の結果は重要である。

$$(A.3) \quad u''''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (-1, 1)), \quad u''(-1) = u'''(-1) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

$$k_0 := 0, \quad k_1 := 0, \quad u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_1(x) := \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

$n \geq 2$ のとき、 $k_n \doteq (n - 1/2)\pi$.

(i) m が偶数であれば $\tan k_m + \tanh k_m = 0$,

$$u_m(x) = \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}}.$$

(ii) m が奇数であれば $\tan k_m - \tanh k_m = 0$,

$$u_m(x) = \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}}.$$

…以上のように書いてある。つまり、 $n \geq 2$ のとき k_n は、方程式

$$\tan k = (-1)^{n-1} \tanh k$$

の $(n - 1/2)\frac{\pi}{2}$ 付近の解であるが、数値計算で求める場合は \tan の特異性を考慮して、逆数を取った

$$\cot k = (-1)^{n-1} \coth k$$

の解として求めると良いであろう。

```

Clear[k]
k[n_] := k[n] =
  If[n == 0 || n == 1, 0,
    x /. FindRoot[Cot[x]==(-1)^(n-1)Coth[x],{x,(n-1/2)Pi/2},WorkingPrecision->50]
  ]

Table[k[n], {n, 0, 100}]

uf[n_, x_] := Switch[n, 0, 1/Sqrt[2], 1, Sqrt[3/2] x, _,
  If[EvenQ[n], (Cosh[k[n]] Cos[k[n] x] + Cos[k[n]] Cosh[k[n] x])/
    Sqrt[Cosh[k[n]]^2 + Cos[k[n]]^2], (Sinh[k[n]] Sin[k[n] x] +
    Sin[k[n]] Sinh[k[n] x])/Sqrt[Sinh[k[n]]^2 - Sin[k[n]]^2]]]

Table[Integrate[uf[n, x]^2, {x, -1, 1}], {n, 0, 10}]

g = Table[Plot[uf[n, x], {x, -1, 1}], {n, 0, 10}]

```

$$\begin{aligned}
k_0 &= k_1 = 0, \\
k_2 &= 2.3650203724313520130120240504169424099491709003534, \\
k_3 &= 3.9266023120479187782385333436270248951611520869953, \\
k_4 &= 5.4978039190008354533345162595529462087714015152882, \\
k_5 &= 7.0685827456287320885529589275466653764376475500642, \dots
\end{aligned}$$

前節の μ_n との間に $k_n = \frac{\mu_n}{2}$ の関係がある。

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lambda_1 = 0, \\
\lambda_2 &= 31.28524385877703724813994134091845211595050505796, \\
\lambda_3 &= 237.72106753111664659000227147117572431307744718689, \\
\lambda_4 &= 913.6018831951464230255554013285636801287254430491, \\
\lambda_5 &= 2496.4874378568316694407338614891519833838615412173, \dots
\end{aligned}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_{n+1} - k_n) = \pi/2$.
- $n \geq 2$ のとき u_n の節は n 個
- $n \geq 2$ のとき u_n の山と谷は合わせて $n - 1$ 個
- n が偶数のとき、 u_n は偶関数
- n が奇数のとき、 u_n は奇関数

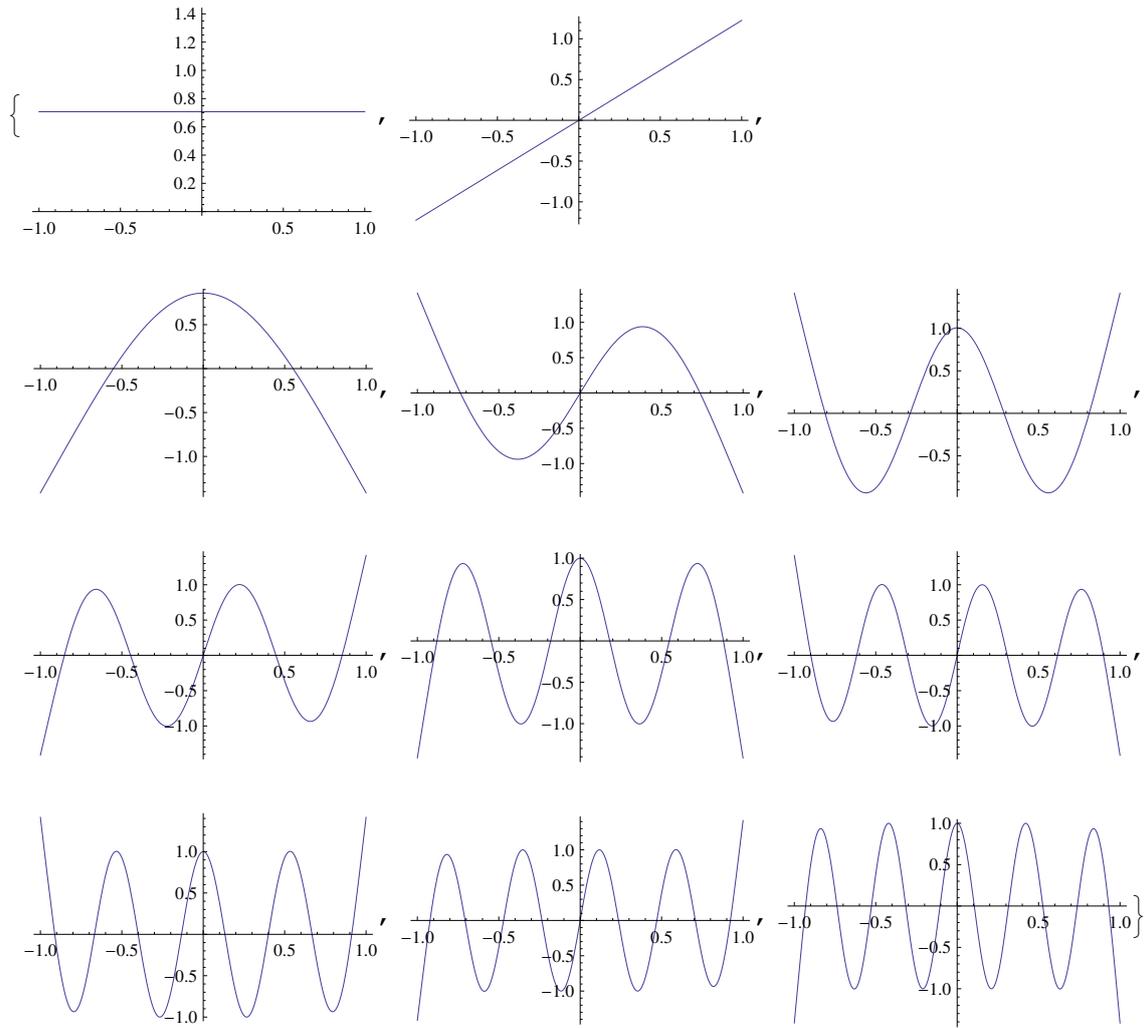


図 A.2: 正規化した u_n のグラフ ($(-1, 1)$ の場合)

付録C Ritz [7] を読む

C.1 Einleitung. – Zusammenfassung der Resultate

“Introduction. – Summary of results”

第1段落

Die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die transversalen Schwingungen ebener, elastischer Platten mit freien Rändern sind bekanntlich zuerst in teilweise unrichtiger Form von Sophie Germain und Poisson, in definitiver Gestalt aber von Kirchhoff im Jahre 1850 gegeben worden. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch die schönen von Chladni 1787 entdeckten Figuren, die sich bilden, wenn auf eine schwingende Glas- oder Metallplatte etwas Sand gestreut wird; später wurde die Bezeichnung Chladnischer Klangfiguren auch bei den Schwingungen von Membranen angewandt.

The differential equations and boundary conditions for the plane transverse vibrations of elastic plates with free edges are known to have been first in partially incorrect form of Sophie Germain and Poisson, given in definitive form, but by Kirchhoff in 1850. These studies were inspired by the beautiful figures of Chladni discovered in 1787 that are formed when sprinkled on a vibrating glass or metal plate a little sand, and later became the name Chladnischer sound-figures applied to the vibration of membranes.

第2段落

Die von Kirchhoff erhaltene partielle Differentialgleichung ist vierter Ordnung, und es müssen an der Rande zwei Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung verschwinden, die von einer Elastizitätskonstante abhängen. Die groß hieraus sich ergebende Komplikation des Problems erklärt es hinreichend, daß die Lösung bis jetzt nur im Falle des Kreises (Kirchhoff) gefunden wurde, wobei sich ein sehr befriedigender Anschluß an die Erfahrung ergab. Die Klangfiguren bestehen hier nur aus konzentrischen Kreisen und aus Radien, mehrfache Töne sind ausgeschlossen. Die Mannigfaltigkeit der Figuren ist somit viel kleiner als in den Fällen des Dreiecks, Vierecks usw.

The resulting partial differential equation of Kirchhoff's fourth-order, and it must vanish at the edge of two differential expressions of third and second order, which depend on a constant elasticity. The large resulting from this complication of the problem is satisfactorily explained, that the solution has been found so far only in the case of the circle (Kirchhoff), and found to be very satisfying after the experience. The acoustic figures consist only of concentric circles and radii from, multiple tones are excluded. The diversity of the characters is so much smaller than in the cases of the triangle, square, etc.

第 3 段落

Im folgenden entwickle ich am Beispiel der quadratischen Platten mit freien Rändern eine neue Integrationsmethode, die ohne wesentliche Änderungen auch auf rechteckige Platten angewandt werden kann, sei es mit freien, sei es auch mit teilweise oder ganz eingespannten oder gestützten Rändern. Theoretisch ist die Lösung in ähnlicher Weise sogar für eine beliebige Gestalt der Platte möglich; eine genaue Berechnung einer größeren Anzahl von Klangfiguren, wie sie im folgenden für den klassischen Fall der quadratischen Scheibe durchgeführt ist, wird aber nur bei geeigneter Wahl der Grundfunktionen, nach welchen entwickelt wird, praktisch ausführbar. Für den Grundton, sofern große Genauigkeit nicht gefordert wird, führt das Verfahren für die meisten Platten durch den Ansatz von Polynomen zum Ziel.

In the following, I develop an example of square plates with free edges, a new integration method that can be applied without major changes on rectangular plates, either with free, albeit with partially or completely clamped or supported edges. Theoretically, the solution in a similar manner possible even for an arbitrary shape of the plate; a precise calculation of a larger number of sound figures, as it is carried out in the following for the classic case of the square plate, but only with a suitable choice of the basic functions, according to which developed, is practically feasible. For the tonic, where high accuracy is not required, the procedure leads to the most records by the use of polynomials to the target.

第 4 段落

Das Wesentliche der neuen Methode besteht darin, daß nicht von den Differentialgleichungen und Randbedingungen des Problems, sondern direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung ausgegangen wird, aus welchem ja durch Variation jene Gleichungen und Bedingungen gewonnen werden können. Dieses Variationsproblem wird nun durch ein gewöhnliches Maximum- und Minimumproblem für eine endliche Anzahl Parameter ersetzt, dessen Lösung elementar gelingt, womit dann eine erste Approximation gegeben ist. Dieselbe läßt sich unbegrenzt verbessern durch Vermehrung der Zahl der Parameter, und ergibt somit ein konvergentes Verfahren zur Integration. Daß die mathematische Form der ersten Approximationen willkürlich gewählt werden kann, ist hierbei ein wesentlicher Vorteil. Denn es ist leicht, eine experimentell bekannte Funktion durch eine genügende Anzahl Konstanten in einer geeigneten mathematischen Form beliebig genau darzustellen; unsere Methode erlaubt es nun, die Konstanten a priori aus der Theorie zu bestimmen, so daß die Ergebnisse der Erfahrung, in Bezug auf die angenäherte Form der gesuchten Lösung, zur praktischen Durchführung der Integration benutzt werden können. Der Umstand, daß das Prinzip der kleinsten Aktion, welches die kürzeste Zusammenfassung der Gesetze der meisten physikalischen Erscheinungen gibt, auch in vielen Fällen den direktesten Weg zu deren mathematischen Behandlung und numerischen Berechnung weist, dürfte nicht ohne Bedeutung sein.

The essence of the new method is that not of the differential equations and boundary conditions of the problem, but directly from the principle of least action is assumed, from which indeed can be obtained by varying the equations and conditions. This variational problem is now replaced by an ordinary maximum and minimum problem for a finite number of parameters, the solution manages elementary, then making a first approximation is given. The same can be improved indefinitely by increasing the number of parameters, and thus results in a convergent process of integration. That the mathematical form of the first approximation can be chosen arbitrarily, this is an essential Advantage. For it is easy to represent an experimentally known function by a sufficient number of constants in a suitable mathematical form as accurately and our method allows us now to determine the constants a priori from the theory, so that the results of experience, in terms of the approximate shape of the desired solution can be used for the practical implementation of the integration. The fact that the principle of least action, which is the shortest summary of the laws of most physical phenomena, has in many cases the most direct route to their mathematical treatment and numerical calculation, should not be without significance.

第 5 段落

Für die Berechnung der Schwingungen einer quadratischen Platte mit ringsum freiem Rande führt man zweckmäßigerweise die bekannten Funktionen $u_n(x)$ ein, welche die Amplitude des n ten Obertones eines freischwingenden Stabes, dessen Länge gleich ist der Quadratseite angeben. Die Koordinatenachsen seien durch den Mittelpunkt parallel zu den Seiten des Quadrates gelegt. Aus unten zu erörternden Gründen müssen die Funktionen $u_0(x) = \text{const.}$; $u_1(x) = x \cdot \text{const.}$ eingeführt werden, die als Grundschwingungen des Stabes mit der Schwingungszahl Null aufzufassen sind; $u_2(x)$ ist also die Grundschwingung im gewöhnlichen Sinne, mit zwei Knotenpunkten; $u_m(x)$ besitzt m Knotenpunkte. Dann ergeben sich aus der Untersuchung folgende Resultate:

For the calculation of the vibrations of a square plate with free edge all around you will more appropriately, the known functions $u_n(x)$, the amplitude of the n th overtone of a freely vibrating rod, whose length is equal to the square side state. The coordinate axes are placed through the center parallel to the sides of the square. For reasons to be discussed below, the functions $u_0(x) = \text{const.}$, $u_1(x) = x \cdot \text{const.}$ be introduced, which are regarded as fundamental vibrations of the rod with the frequency of zero; $u_2(x)$ is the fundamental component in the ordinary sense, with two nodes, $u_m(x)$ has m nodes. Then result from the investigation, the following results:

1.

Samtliche Eigentöne der Platte lassen sich bis auf einige Prozent darstellen durch die Formeln:

$$(C.1) \quad \begin{cases} w_{mn} = u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x), \\ w'_{mn} = u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x). \end{cases}$$

Den Indizes 00, 01, 10 entspricht die Schwingungszahl Null, die Platte bleibt eben.

All keyed Eigentone of the plate, up to a few percent are represented by the formulas:

$$(C.2) \quad \begin{cases} w_{mn} = u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x), \\ w'_{mn} = u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x). \end{cases}$$

The indices 00, 01, 10 corresponds to the frequency of zero, the plate remains flat.

2.

Es existieren nur Doppeltöne, keine mehrfachen Töne. Die Doppeltöne entsprechen dem Falle, wo von den Indizes m n der eine gerade, der andere ungerade ist. Es ergeben dann w_{mn} und w'_{mn} dieselbe Tonhöhe; jede lineare Verbindung dieser zwei Funktionen entspricht einer möglichen Lösung. Die hierbei auftretende Schar von Klangfiguren hat die Eigenschaft, daß die Kurven sämtlich durch gewisse feste Punkte, von Strehlke Pole genannt, gehen, nämlich die Wurzeln des Gleichungssystems $w_{mn}(x, y)=0$, $w'_{mn}(x, y)=0$. In erster Annäherung sind dies die Wurzeln von $u_m(x)=0$, $u_m(y)=0$, bzw. $u_n(x)=0$, $u_n(y)=0$; die Abstände der Pole von den Seiten sind also (bis auf 1-2 Proz.) gleich den Abständen der Knoten frei schwingender Stäbe von deren Enden.

There are only dual tones, no multiple tones. The dual tones correspond to the case where one of the indices m n is even, the other is odd. It then result w_{mn} and w'_{mn} the same pitch, any linear combination of these two functions corresponds to a possible solution. Which occurred when the host of sound character has the property that the curves are all called by certain fixed points of Strehlke poles go, namely the roots of the equation system $w_{mn}(x, y) = 0$, $w'_{mn}(x, y) = 0$. To a first approximation, these are the roots of $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$, and $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$; and the distances between the poles of the sides are thus (up to 1-2 per cent) is equal to the distances between the nodes of the free-swinging rod ends.

3.

Die Eigentöne lassen sich mit beliebiger Genauigkeit durch Summen von Ausdrücken der Form (1) darstellen mit Koeffizienten, die sich aus der Theorie bestimmen. Im folgenden ist die Rechnung bis auf 1/1000 durchgeführt für m und n kleiner als 4. Die so berechneten Klangfiguren stimmen in sehr befriedigender Weise mit den genauen Beobachtungen von Strehlke überein. Die Korrekturen gegen (1) bleiben stets relativ klein.

The natural tones can be with any degree of accuracy by sums of expressions of the form (1) pose with coefficients that determine from the theory. The following is the calculation performed up to 1/1000 for m and n is less than 4. The calculated sound figures agree very satisfactorily correspond to the precise observations of Strehlke. The corrections to (1) always remain relatively small.

4.

Die Klangfiguren und Tonhöhen sämtlicher 35 Obertöne, für welche m und n kleiner als 7 sind, werden unten angegeben; für m und n kleiner als 4 sind sie nach den exakten Formeln berechnet, für größere Indizes nach (1), wobei jedoch der Fehler beim Maßstab der Zeichnung kaum wahrzunehmen wäre. Dies schien mir deshalb wünschenswert, weil über diese schönen Figuren durch ungenaue Beobachtung und theoretische Fehlschlüsse eine große Anzahl unrichtiger Ansichten in die Lehrbücher und Zeitschriften übergegangen ist, so daß selbst über die am leichtesten zu beobachtenden Fundamentaltöne Unsicherheit herrscht. In Chladni's Akustik erscheinen manche Eigenschwingungen als Doppeltöne, die es nur durch Inhomogenität des Materials und Mängel der Beobachtungsmethode sind. Die entsprechenden 46 Klangfiguren sind von Chladni größtenteils erhalten und, wenn auch nur in rohen Umrissen, gezeichnet worden. Da sich die zum Hervorbringen einer bestimmten Figur nötige Unterstützung der Platte aus den unten gegebenen, genauen Figuren entnehmen läßt, wird deren experimentelle Herstellung erheblich erleichtert, während bisher über das Zustandekommen irgend einer Figur, besonders bei den höheren Obertönen, im wesentlichen der Zufall entschied.

The sound figures and pitches of all 35 harmonics for which m and n are smaller than 7, given below; for m and n is less than 4, they are calculated according to the exact formulas for larger indices by (1), wherein however, the error in scale of the drawing would be hardly noticeable. This seemed desirable because it has passed through beautiful figures from inaccurate observation and theoretical fallacies, a large number of incorrect views in the textbooks and journals, so that there is even the most easily observable fundamental tones uncertainty. In some Chladni acoustic oscillations appear as a double sound, it is only by inhomogeneity of the material defects and the observation method. The corresponding figures are 46 sound of Chladni largely intact and where it has been drawn only in rough outline. As for bringing about a certain character necessary support of the plate from the below given, exact figures refer to leaves is their experimental production much easier, whereas in the past about the occurrence of any character, especially at the higher harmonics, essentially decided by chance.

5.

Die vielumstrittene Frage, ob die scheinbar geraden Linien, die in vielen Figuren auftreten, auch wirklich gerade seien, ist dahin zu beantworten, daß dies nur für die Diagonalen und Seitenhalbierenden – wo schön Symmetriegründe es erfordern – gilt. Außerdem ergeben sich aus (1) (angenähert) gerade Linien nur bei Doppeltönen und wenn $m = n$ ist. Die Resultate der Messungen Strehlkes, die vielfach angefochten wurden, stimmen hierin mit der Rechnung genau überein; die geringen Abweichungen dagegen, die Strehlke auch bei den Diagonalen und Seitenhalbierenden gefunden hat, beruhen auf einem unten zu erörternden systematischen Fehler bei der Herstellung von Sandfiguren.

The much-disputed question whether the apparently straight lines that appear in many figures are really just has to respond to the effect that this was only for the diagonals and median line — where good symmetry reasons require it — is valid. In addition, arising from (1) (approximately) straight lines only for double tones, and when $m = n$. The results of the measurements Strehlkes, many of which were contested vote, herein correspond exactly with the bill, the small deviations, however, found the Strehlke even with diagonals and median line asked based on a bottom to be discussed systematic errors in the production of sand figures.

6.

Die Tonhöhen der 35 Obertöne stimmen mit den von Chladni gegebenen innerhalb der zu erwartenden Fehler überein. Sie umfassen sechs Oktaven. In roher Annäherung sind die Tonhöhen gegeben durch die Formel

$$\nu = A \cdot \sqrt{m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2n^2},$$

wo m, n ganze Zahlen, A, μ Konstanten der Platte sind.

The pitch of the 35 harmonics are consistent with those given by Chladni within the expected error. They cover six octaves. In rough approximation the pitches are represented by the formula

$$\nu = A \cdot \sqrt{m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2n^2},$$

where m, n are integers, A, μ are constants of the plate.

7.

Die bei Membranen gültigen Satze: „Wo eine Knotenlinie den Rand trifft, steht sie auf demselben senkrecht; schneiden sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern der Platte, so bilden sie gleiche Winkel miteinander“, gelten bei Platten nur ausnahmsweise oder angenähert.

Valid for membranes proposition, “when a nodal line hits the boundary line, it is perpendicular to it; overlap two or more nodal lines in the interior of the plate, they form equal angles with each other,” apply to plates only occasionally or approximately.

8.

In den Ecken ist die Lösung eine im allgemeinen nicht analytische Funktion, womit die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Methoden bei diesem Problem genügend erklärt ist. Da die Lösung jedoch innerhalb der Platte endlich und stetig bleibt, wenn sie auch nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so bleiben analytische Darstellungen durch Polynome, Fourierreihen, nach den Funktionen wmn fortschreitende Reihen usw., wie sie unsere Methode bringt, dennoch möglich und praktisch anwendbar.

In the corners is the solution to a generally non-analytic function, with which the inadequacy of the ordinary methods for this problem is satisfactorily explained. Since the solution but within the plate is finite and continuous, is if they can not be expanded in a power series, so stay analytic representations by polynomials, Fourier series, according to the functions wmn progressive ranks, etc. as they occur in our method, however, possible and practical applicable.

9.

Parallelen zu den Seiten schneiden jede Figur in einer Anzahl Punkte, die höchstens gleich ist dem größeren der beiden Indizes m und n und mindestens gleich dem kleineren. Andere, analoge Gesetze gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die entsprechende Formel zu finden. Sind z. B. beide Diagonalen Knotenlinien, so hat man es mit w'_{mn} zu tun, wobei m, n beide gerade oder ungerade sind. Ist nur eine Diagonale vorhanden, so liegt wieder w'_{mn} mit m und n von ungleicher Parität (Doppelton) vor. Gehören die Seitenhalbierenden zur Figur, so ist einer oder beide Indizes ungerade usw.

Cut parallel to the sides of each character in a number of points which is at most equal to the larger of the two indices m and n are at least equal to the lesser. Other, similar laws allow it to find a sound figure given the appropriate formula. Include both diagonal nodal lines, one has to do with it w'_{mn} , where m, n both even or odd. If only one size available, it is again w'_{mn} with m and n are of unequal parity (double tone) before. Include median line to the figure, then one or two odd indices, etc.

10.

Schließlich wird die Methode, unter Anwendung von Polynomen, auf die schon von Kirchhoff berechnete Grundschiwingung eines Kreises angewendet. Formeln mit zwei Konstanten genügen, um die Schwingungszahl desselben auf 1/2 Proz. zu erhalten, d. h. mit derjenigen Genauigkeit, die für solche Versuche überhaupt in Betracht kommt. Der Rechnungsaufwand ist viel geringer wie bei der Kirchhoff'schen Methode, und sämtliche Operationen durchaus elementar. In der oben zitierten Arbeit habe ich auch die Anwendbarkeit der Methode auf die Schwingungen von Saiten, unter Benutzung von Polynomen zur angenäherten Darstellung der Lösung, untersucht: bei Benutzung von nur drei Gliedern ergibt sich der Fundamentalschwingung der Saite auf drei Milliardenstel genau.

Finally, the method using polynomials applied to the already computed by Kirchhoff fundamental oscillation of a circle. Formula with two constants are sufficient to the vibration of the same number to get to 1/2 per cent, ie those with accuracy that is eligible for such trials ever considered. The calculation effort is much less than with the Kirchhoff's method, and all elementary operations entirely. In the above-quoted work, I'm also the applicability of the method to the vibrations of strings, with the use of polynomials to the approximate representation of the solution examined: is the use of only three members to the fundamental tone of the string of three billionth exactly.

付録D Waller の諸論文

D.1 単語帳

natutal frequency は固有振動数。

resonance は共鳴、共振

sinusoid は正弦曲線, sinusoidal は形容詞で sinusoidal wave は正弦波。

A normal mode of an oscillating system is a pattern of motion in which all parts of the system move sinusoidally with the same frequency and with a fixed phase relation. The motion described by the normal modes is called resonance. The frequencies of the normal modes of a system are known as its natural frequencies or resonant frequencies.

D.2 Vibrations produced in bodies by contact with solid carbon dioxide (1933)

Proceedings of the Physical Society: Volume 45 (1933), pp. 101–116.

7ページの論文

The paper describes the conditions under which very loud notes may be produced and maintained for a considerable time in metal objects capable of vibration, such as tuning forks, bars, discs, rings, and tubes, when brought into contact with a solid carbon dioxide block. Notes have also been sustained in quartz crystals. It is shown that the vibration frequencies normally excited may range from about 1000 to 15000 similar. Lower frequencies have been excited in wires. Surface-tension ripples may be produced on mercury. The vibrations are only produced by solid carbon dioxide of high density. The physical properties of the vibrating body which are of importance in connexion with the phenomenon are considered. Evidence is brought forward in favour of the view that the source of energy for producing the vibrations is the heat which is given up by the metal to the solid carbon dioxide, and that the efficacy of this substance in producing vibrations is determined by the fact that it sublimates and in so doing produces considerable gaspressures. Some suggestions regarding possible applications of the phenomenon are made.

D.3 The production of sounds from heated metals by contact with ice and other substances (1934)

Proceedings of the Physical Society, Volume 46, Number 1 (1934), pp. 116–

何ページあるんだろう。

Experiments in which very loud notes were produced as a result of contact of metal bodies with solid carbon dioxide have been described in a previous communication*. The present paper is concerned with the conditions under which soft notes may be produced from heated metal bars brought into contact with ice and a number of other substances. These substances must either sublime or boil or

decompose with the evolution of gas, at temperatures for which the metal to be excited still retains adequate vibrating properties. The experiments confirm the theory regarding the mechanism of the phenomenon which was developed in the previous paper. They establish the general conditions under which elastic vibrations of audible frequency may be excited in a metallic body, when contact with another cooler solid substance results in the production of gas from the latter.

D.4 The production of chladni figures by means of solid carbon dioxide. Part 1: bars and other metal bodies (1937)

Proceedings of the Physical Society, Volume 49, Number 5 (1937), pp. 522–

Chladni figures can be very readily produced by means of solid carbon dioxide: some photographs of results obtained on metal objects of various shapes are shown. The frequencies of the vibrations excited in objects of low fundamental tone usually lie between about 1000 and 4000. The theoretical implications of this fact are considered.

D.5 Vibrations of free circular plates. Part 1: Normal modes (1938)

Proceedings of the Physical Society: Volume 50 (1938), pp. 70–76.

The normal vibrating modes of free circular plates have been determined over an interval of more than six octaves, the solid-carbon-dioxide method of excitation being used to produce the nodal figures, and a valve oscillator to measure their frequencies. It is concluded that the nodal system of ideally uniform and entirely free plates would, in accordance with theory, consist only of circles, diameters and combinations of circles and diameters. It is found that although each simple mode has its characteristic frequency, cases occur in which the difference between two or even three of these is very small, and the number of nodal diameters, which as regards raising the pitch are approximately equivalent to one nodal circle, increases from two to five, in the interval investigated, in passing from figures with relatively more circles to those with relatively more diameters. The expression, based on approximate theory, for calculating the frequencies of the higher modes, in which it is assumed that the addition of two nodal diameters increases the frequency by as much as one nodal circle, is accordingly not applicable in ordinary practice.

It is suggested that the simple and rapid solid-carbon-dioxide method of exciting free vibrations might be employed for testing the uniformity of plates, for detecting internal flaws, for studying recrystallization phenomena, and for obtaining comparative values of Poisson's ratio of metals and alloys.

D.6 Vibrations of free circular plates. Part 2: Compounded normal modes (1938)

Proceedings of the Physical Society: Volume 50 (1938), pp. 77–82.

The many nodal designs (other than those consisting solely of circles and diameters) which are obtained on free circular plates are shown to consist of two or more compounded normal modes of vibration, the periods of which are very nearly equal. The vibration frequencies corresponding to the

designs are intermediate between those of the combining modes. The figures are produced as a result of the slight divergence of free periods which exists in all but ideally uniform plates. An increase in damping, either internal or arising from the manner of support or of excitation, also favours the production of these designs, since it renders the resonance less sharp. Compounded modes of a somewhat similar character may be expected to occur in other systems of revolution, such as circular plates clamped at the edge, circular membranes, rings and cymbals, in all of which the normal nodal system consists of combinations of circles and diameters.

D.7 Vibrations of free circular plates. Part 3: A study of Chladni's original figures (1938)

Proceedings of the Physical Society: Volume 50 (1938), pp. 83–86.

The complete set of figures which Chladni produced on circular plates has been examined. It has been found that a second subsidiary normal vibrating mode, the nodal system of which consists of diameters, is in many of the figures compounded with a principal figure of nearly identical period. The manner of support and the manner of excitation make such combinations likely.

D.8 Fundamental Vibration of a Rectangular Plate

Nature, No. 3610, Jan. 7, 1939.

これはコピーを入手済み。

D.9 Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes (1939)

Proceedings of the Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.

後で詳しく解説する。

D.10 Vibrations of free square plates: part II. compounded normal modes (1940)

Proceedings of the Physical Society, Vol. 52 (1940), pp. 452–455.

これはコピーを入手済み。

D.11 A simple method of finding poisson's ratio (1940)

Proceedings of the Physical Society: Volume 52 (1940), pp. 710–713.

生田にはない。取り寄せが必要である。

D.12 Vibrations of Free Rectangular Plates (1949)

Proceedings of the Physical Society. Section B, Volume 62 (1949), Number 5, pp. 277– (生田にある)

Records theta are given of the normal vibrating modes and frequencies of free rectangular plates between the limiting shapes of the bar and the square. The nodal systems, which in general consist of straight lines parallel to the sides, are, from considerations of symmetry, divided into four classes. Combined modes, for which the nodal patterns are less simple, are not uncommon. The constituent modes belong to the same class, but their uncombined periods may be appreciably different. The combination of modes belonging to different classes is extremely rare, the uncombined periods differing very little in frequency. As the mirror symmetry of the nodal design is lost in such combinations, it may be questioned whether they are ideally possible even for modes of exactly equal period.

D.13 Vibrations of Free Elliptical Plates (1950)

Proceedings of the Physical Society. Section B, Vol. 63 (1950), pp. 451– (生田にある)

D.14 Interpreting Chladni Figures ()

これは入手済み。

Jensen's recently published Chladni figures can be interpreted as normal modes of vibration with antinodal centers which are distorted by the experimental method employed to produce them. The free transverse vibrations of uniform plates always conform with the symmetry of the geometrical surfaces. The principle of symmetry and of corresponding vibrations enables them to be identified and arranged in a systematic manner. The solid carbon dioxide method of exciting free vibrations, supplemented by the bow, produces the most symmetrical figures.

付録E Waller 1939 を解読する

Proceedings of the Physical Society, Vol. 51 (1939).

タイトルは、“Vibration of free square plates: part I. normal vibrating modes” で、直訳すると「自由な正方形板の振動: 第1部. 固有振動モード」となる。翌年に“Vibration of free square plates: part II. compounded normal modes” 「自由な正方形板の振動: 第2部. 固有振動の混合 (合成?)」を出している。

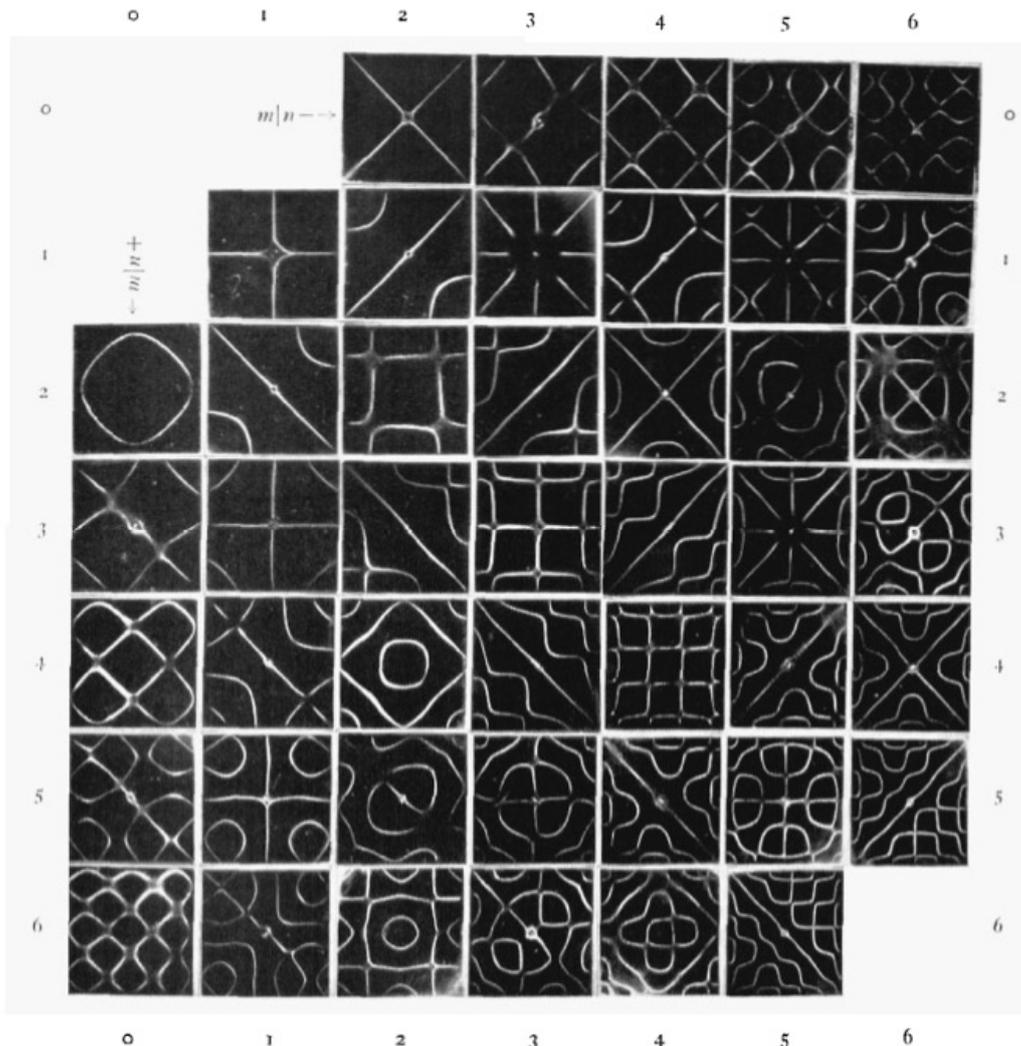
これ以前には、円形板の実験についての論文を出版していた。

小釜君が翻訳した文書 (に桂田が少し手を入れたもの) がある。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/wayaku-waller1939.pdf>

(部分訳なので、そのうち遠藤さんに加筆してもらおう。)

E.1 実験写真



Normal nodal systems of free square plate, see equations (1) and (3). The nodal designs are distinct for given values of m and n except when one of the values of m , n is even when the other one is odd. See table 1.

E.2 「Ritz の予想」について

Waller 自身ははっきり書いていなかったため、分かりづらかったが、Ritz が明らかにした事実 (数学的には予想) を背景に、Waller が組織的に実験した、という論文であると思われる。

他の多くの人の実験が間違えていることを指摘しているが、そういうことが出来たのは、Ritz の予想を理解していたことが大きいはずだ。それなのに、その予想を明確な形で述べず、また誰がその予想を提出したかもはっきり述べなかったため、それが分かるのに多大な手間がかかった。

Waller の他の研究者の仕事の評価には、バイアスがかかっている印象がある。読むときにその点は注意すべきである。Ritz については、ストレートに評価したくなかったため、モヤがかかってしまったのでは? と少し勘ぐっている。

E.3 節線パターン (nodal system) の対称性

(小釜君の修論の記述は、完全性や直交性と混じっているから、そのまま書くと判りづらい。)

正多角形の合同変換は良く知られている。正 n 角形の合同変換群は二面体群 (dihedral¹ group) と呼ばれ、 D_n と書かれる (代数では位数を表すために D_{2n})。

R を中心の周りの 90 度の回転、 S を一つの対称軸に関する折り返しとして、

$$D_n := \{I, R, R^2, R^3, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, R^3S, \dots, R^{n-1}S\}.$$

正方形板の場合は

$$D_4 := \{I, R, R^2, R^3, S, RS, R^2S, R^3S\}.$$

正方形は、8 個のシンメトリーを持つ。

Ritz が導入した、板の固有関数を良く近似する関数

$$\begin{aligned} w_m &:= u_m \otimes u_m \quad (m \geq 0), \\ w_{mn} &:= u_m \otimes u_n + u_n \otimes u_m \quad (m > n \geq 0), \\ w'_{mn} &:= u_m \otimes u_n - u_n \otimes u_m \quad (m > n \geq 0) \end{aligned}$$

の節線は以下の対称性を持つ (証明は簡単)。

- w_m の節線は $\forall x \in D_4$ に対して不変
- m, n が共に偶数、あるいは共に奇数のとき、 w_{mn}, w'_{mn} の節線は $\forall x \in D_4$ に対して不変
- m, n のうち一方が奇数、他方が偶数のとき、 w_{mn}, w'_{mn} の節線は $\forall x \in \{I, R^2, S, R^2S\}$ に対して不変であるが、 R に関しては不変ではない (ただし S は対角線に関する対称移動を表すとする)

対応する板の固有関数 W_m, W_{mn}, W'_{mn} も同じ対称性を持つことが、実験と数値計算の両面から確認できる。

¹daihi:drəl

付録F Ritz の数値計算

F.1

Gander-Kwok [6] は、 $(-1, 1)$ の場合で計算をしている。本質的には同じことだが、式の形がかなり違うので、きちんと詳細を書いておきたい (E さんがやってくれると期待している)。とりあえず結果だけ引用しておく。

$k_0 = k_1 = 0$. $m \geq 2$ のとき k_m は m が偶数のときは $\tan k_m + \tanh k_m = 0$ の解、 m が奇数のときは $\tan k_m - \tanh k_m = 0$ の解で、いずれの場合も $(m - 1/2)\pi/2$ に近い。

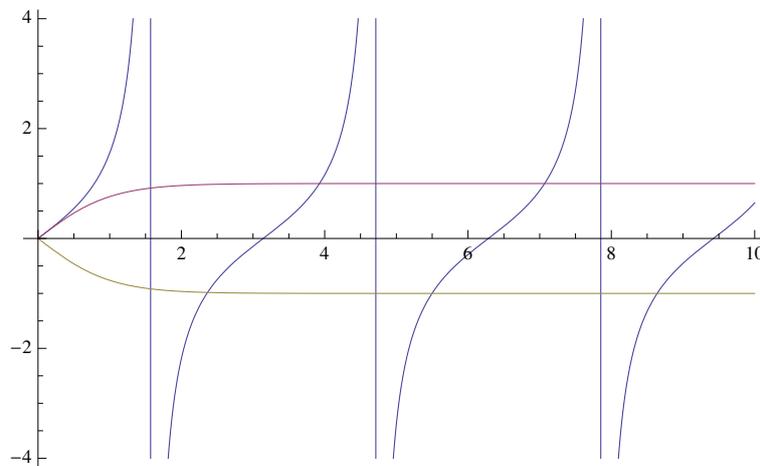


図 F.1: $\tan k$, $\tanh k$, $-\tanh k$ のグラフ

$$u_m(x) = \begin{cases} \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}} & (m \text{ は偶数}) \\ \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}} & (m \text{ は奇数}). \end{cases}$$

F.2 Mathematica で再現 (その1)

```

kirisute[x_] := If[Abs[x] < 10^(-10), 0, x]

Clear[k];
k[m_] := k[m] = x /. If[EvenQ[m],
  FindRoot[Tan[x] + Tanh[x] == 0, {x, m*Pi/2 - Pi/4}],
  FindRoot[Tan[x] - Tanh[x] == 0, {x, (m - 1/2)*Pi/2}]];
k[0] = k[1] = 0;

Clear[b];
b[m_, kk_, p_, ll_] :=
  b[m, kk, p, ll] =
  b[p, ll, m, kk] =
  kirisute[
    Re[Integrate[
      D[u[m, x], {x, kk}]*D[u[p, x], {x, ll}], {x, -1, 1}]]]

u[m_, x_] :=
  If[m == 0, 1/Sqrt[2],
  If[m == 1, Sqrt[3/2]*x,
  If[EvenQ[m], (Cosh[k[m]]*Cos[k[m]*x] + Cos[k[m]]*Cosh[k[m]*x])/
    Sqrt[Cosh[k[m]]^2 + Cos[k[m]]^2], (Sinh[k[m]]*Sin[k[m]*x] +
    Sin[k[m]]*Sinh[k[m]*x])/Sqrt[Sinh[k[m]]^2 - Sin[k[m]]^2]]]]]

chladnimatrix[N_, mu_] := Module[{i, j, m, n, p, q, Kt},
  Kt = Table[0, {i, (N + 1)^2}, {j, (N + 1)^2}];
  i = 0;
  For[m = 0, m <= N, m++,
  For[n = 0, n <= N, n++,
  i++; j = 0;
  For[p = 0, p <= N, p++,
  For[q = 0, q <= N, q++,
  j++;
  If[EvenQ[m + p] && EvenQ[n + q],
  Kt[[i]][[j]] =
  b[m, 2, p, 2]*b[n, 0, q, 0] + b[m, 0, p, 0]*b[n, 2, q, 2]
  + 2*mu*b[m, 2, p, 0]*b[n, 0, q, 2] +
  2*(1 - mu)*b[m, 1, p, 1]*b[n, 1, q, 1]]
  ]
  ]
  ];
  (Kt + Transpose[Kt])/2
]

NN = 6; mu = 0.225; a = chladnimatrix[NN, mu];

{lambda, v} = Eigensystem[a];

U = Table[
  Sum[v[[i]][[(NN + 1) m + n + 1]] u[m, x] u[n, y], {m, 0, NN}, {n,
  0, NN}], {i, 1, 49}];

draw[n_] := ContourPlot[U[[n]] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]

draw2[m_] := {ContourPlot[
  U[[m]] + U[[m + 1]] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}],
  ContourPlot[U[[m]] - U[[m + 1]] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]}

```

F.3 Mathematica で再現 (2)

Ritz はブレンドまでしている。20151005/ritz-blend.nb

```
kirisute[x_]:=If[Abs[x]<10^(-10),0,x]

Clear[k];
k[m_]:=k[m]=x/.If[EvenQ[m],FindRoot[Tan[x]+Tanh[x]==0,{x,m*Pi/2-Pi/4}],FindRoot[Tan[x]-Tanh[x]==0,{x,(m-1)*Pi/2-Pi/4}]]

k[0]=k[1]=0;
u[m_,x_]:=
  If[m==0,1/Sqrt[2],
    If[m==1,Sqrt[3/2]*x,
      If[EvenQ[m],(Cosh[k[m]]*Cos[k[m]*x]+Cos[k[m]]*Cosh[k[m]*x])/
        Sqrt[Cosh[k[m]]^2+Cos[k[m]]^2],
        (Sinh[k[m]]*Sin[k[m]*x]+Sin[k[m]]*Sinh[k[m]*x])/
        Sqrt[Sinh[k[m]]^2-Sin[k[m]]^2]]]]]

Clear[b];
b[m_,kk_,p_,ll_]:=
  b[m,kk,p,ll]=
  b[p,ll,m,kk]=
  kirisute[Re[Integrate[D[u[m,x],{x,kk}]*D[u[p,x],{x,ll}],{x,-1,1}]]]

chladnimatrix[N_,mu_]:=
  Module[{i,j,m,n,p,q,Kt},Kt=Table[0,{i,(N+1)^2},{j,(N+1)^2}];
  i=0;
  For[m=0,m<=N,m++,For[n=0,n<=N,n++,
    i++;j=0;
    For[p=0,p<=N,p++,For[q=0,q<=N,q++,j++,
      If[EvenQ[m+p]&&EvenQ[n+q],
        Kt[[i]][[j]]=b[m,2,p,2]*b[n,0,q,0]+b[m,0,p,0]*b[n,2,q,2]
          +2*mu*b[m,2,p,0]*b[n,0,q,2]
          +2*(1-mu)*b[m,1,p,1]*b[n,1,q,1]]]]];
  (Kt+Transpose[Kt])/2
]

NN=6;mu=0.345;a=chladnimatrix[NN,mu];

{lambda,v}=Eigensystem[a];
lambda=Reverse[lambda]
v=Reverse[v];

U=Table[Sum[v[[i]][[(NN+1) m+n+1]] u[m,x] u[n,y],{m,0,NN},{n,0,NN}],{i,1,49}];

draw[n_]:=ContourPlot[U[[n]]==0,{x,-1,1},{y,-1,1}]

h=Table[draw[m],{m,1,49}]

doubleQ[n_]:=Abs[(lambda[[n]]-lambda[[n+1]])/(lambda[[n]]+10^(-20))]<10^(-3)

id=1;Clear[g];
For[i=1,i<=48,i++,
  If[doubleQ[i],
    Print[i];
    ui=U[[i]]; uip1=U[[i+1]];
    b=1;
    a=(-uip1/ui)/.{x->-1,y->-1};Print[a];
    g[id]=ContourPlot[a*ui+b*uip1==0,{x,-1,1},{y,-1,1}];id=id+1
  ]
]
```

```

1
0.57735
7
-1.07537
9
-0.936285
14
-1.28042
18
-0.8681
23
-0.88332
26
1.24079
29
1.54338
36
-0.941775
40
0.944316
42
1.03187
47
1.02422
Show[g[2]]

Show[g[3]]

Show[g[4]]

Show[g[5]]

Show[g[6]]

Show[g[7]]

Show[g[8]]

Show[g[9]]

Show[g[10]]

Show[g[11]]

Show[g[12]]

```

```

id=1;Clear[g];
For[i=1,i<=48,i++,
  If[doubleQ[i],Print[i];
    ui=U[[i]];
    uip1=U[[i+1]];
    b=1;
    a=(-uip1/ui)/.{x->-1,y->0};Print[a];
    g[id]=ContourPlot[a*ui+b*uip1==0,{x,-1,1},{y,-1,1}];id=id+1
  ]
]

```

```
1
Power::infy: 無限式 1/0. が見付けられました. >>
ComplexInfinity
7
-0.0363163
9
-30.3896
14
8.13226
18
0.0706065
23
0.0619545
26
0.107457
29
-4.68069
36
0.0299856
40
-0.0286396
42
-63.7501
47
0.0119649
Show[g[1]]

Show[g[2]]

Show[g[3]]

Show[g[4]]

Show[g[5]]

Show[g[6]]

Show[g[7]]

Show[g[8]]

Show[g[9]]

Show[g[10]]

Show[g[11]]

Show[g[12]]
```

F.4 感想

わずかな項数でかなりの高精度の解が得られている。

固有値の精度はどうなのか。

元の固有値問題の解の固有値が小さい順に求まるのではない。 $m, n = 0, 1, \dots, 6$ で Waller のダイアグラムの図が求まっている。これは遠藤さんに指摘されたことだが、言われてみれば、なるほど、という感じ。

付録G 群論

G.1 二面体群

案外とウィキペディアの解説が良い (Wikipedia からの翻訳)。

- $n \geq 3$ のとき、正 n 角形を自分自身にうつす合同変換全体は群をなし、その位数は $2n$ である。これを位数 $2n$ の二面体群と呼び、 D_n で表す (D_{2n} と書く流儀もあるとか)。
- 二面体群は英語で dihedral group という。二面体とは、裏表を区別する正多角形、という意味とか。(多面体を polyhedral という。)
- 任意の $n \geq 3$ に対して、 D_n は非可換群である。
- 正 n 角形の中心を座標軸の原点とし、 x 軸が対称軸の一つであるようにすると、 D_n の要素は \mathbf{R}^2 上の線型写像とみなせて、行列で表すことができる。

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad S_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & -\cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

とおくとき、

$$D_n = \{R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, S_0, S_1, \dots, S_{n-1}\}.$$

R_k は、原点を中心とした、角 $\frac{2k\pi}{n}$ の回転を表す行列である。 S_k は、 x 軸と $\frac{k\pi}{n}$ の角度をなす直線に関する対称移動を表す行列である。 $R := R_1$ とおくと、 $R_k = R^k$, $R_0 = I$ である。

$$R_i R_j = R_{i+j}, \quad R_i S_j = S_{i+j}, \quad S_i R_j = S_{i-j}, \quad S_i S_j = R_{i-j}.$$

ただし添字の足し算、引き算は $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/(n)$ で考える。

- D_n を上の行列の群とすると、これは $n = 1, 2$ でも意味を持つ。 D_1 は位数 2 の巡回群であり、 D_2 はクラインの四元群である。この二つは非可換群である。

$$R := \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$D_n = \{I, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \dots, R^{n-1}S\}.$$

$R^n = I$, $S^2 = I$ に注意。

$$SRS = R^{-1}$$

という関係がある。

- $\sigma = R$, $\tau = S$, また単位元を e と書く。

$$\sigma^n = e, \quad \tau^2 = e, \quad \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$$

が D_n の基本関係式である。

- n が偶数かつ $n/2$ が奇数の場合、

$$D_n \simeq D_{n/2} \times C_2.$$

ただし C_2 は 2 次の巡回群。

G.2 クラインの四元群

Hamilton の四元数 (quaternion) は、例の

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

で、

$$\begin{aligned} ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned}$$

を満たす i, j, k を用いた

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

である。

クラインの四元群とは、

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

付録H 遠藤さんの実験

NaRiKa ハンディ低周波発信器 CR-T

http://www.rika.com/product/prod_detail1.php?catalog_no=A05-7631#supplie

¥29,800

5 ~ 200 kHz

増幅部 40 Hz ~ 30 kHz (最大 1W, 8 オーム), 調整 15 段階ステップ式

単 3 乾電池 3 個または AC アダプタ (DC9V), ¥1,200 これも買うかな?

スピーカー連続出力時 1 時間

あれ?

バイブレーター (励振器) FB-8N ¥29,000

POWER AMPLIFIER, MODEL 371-A

付録I リアルな実験

I.1 2012/9/21 福岡市

付録J Laplacian の場合

付録K プログラム

K.1 MATLAB プログラム (平野)

桂田 [32] に、Laplacian の場合 (1次元と2次元, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件) の解説と MATLAB プログラムがある。

K.1.1 プログラムの入手法

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/chladni/hirano-programs/> から入手できる。
例えば Mac ならば ~/Documents/MATLAB に置くと良い。

K.1.2 リモート接続で使う その1

- 自宅から研究室にある Mac 上で計算する方法の一つ。

```
/Applications/MATLAB_R2010b.app/bin/matlab -nodisplay
```

(面倒なので、path 通してあるところに、シンボリック・リンクをはってある。)

- どうせ、すぐに接続は切れるので、screen してある。つまり

```
screen  
[Enter]  
matlab -nodisplay
```

とするわけ。後からリモートログインしなおして、

```
screen -r
```

でリジュームするわけだ。

K.1.3 リモート接続で使う その2

VNC で接続して使うことも出来る。

K.1.4 plate_c.m — 重調和作用素, clamped edge

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$


```
> lambda=diag(d);
> lambda=lambda(200:-1:1);
> v=v(:,200:-1:1);
```

と並べ替えてしまうとか)。

- 固有関数のグラフは (後述の) `plot_d()` を用いて描く。固有値と固有関数を、固有値の小さい方から番号付けるとして、 i 番目の固有関数を表示するには、

- `plot_d(v(:,200+1-i),N,N)` 並べ替えしていない場合
- `plot_d(v(:,i),N,N)` 並べ替えしている場合

```
% plate_c.m -- Eigenvalue problem of rectangular plates with clamped edges
% written by Hirano Yuuki, Meiji University, Feb 2012
%
% \triangle^2 u=\lambda u
% u=0, \partial u/\partial n=0
% 0<=x<=a, 0<=y<=b
%
% usage:
% A=plate_c(1,1,640,640);
% [v,d]=eigs(A,200,0);
% plot_d(v(:,200),640,640)
```

```
function A=plate_c(a,b,nx,ny)
    hx=a/nx;
    hy=b/ny;
    m=nx-1;
    n=ny-1;
    Im=speye(m,m);
    In=speye(n,n);
    Jm=sparse(diag(ones(m-1,1),1)+diag(ones(m-1,1),-1));
    Jn=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
    Pm=sparse(diag(ones(m-2,1),2)+diag(ones(m-2,1),-2));
    Pn=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
    Am=-6*Im+4*Jm-Pm;
    Am(1,1)=-7;
    Am(m,m)=-7;
    An=-6*In+4*Jn-Pn;
    An(1,1)=-7;
    An(n,n)=-7;
    Bm=2*Im-Jm;
    Bn=2*In-Jn;

    A=-(kron(In,Am)/(hx*hx*hx*hx)+2*kron(-Bn,Bm)/(hx*hx*hy*hy)+kron(An,Im)/(hy*hy*hy*hy));
end
```

計算結果 (特に固有関数) については、平野 [49] の第 4 章を見よ。固有値については、以下に引用する。

[49] から引用

表 K.1 で $\sqrt{\lambda_n^{(1280)}}$ は 1280 分割した時の第 n 固有値の計算値の平方根、相対誤差は $(\sqrt{\lambda_n^{(1280)}} - \sqrt{\lambda_n^{(640)}}) / 4$ を計算したものである。 λ_{nBR} 、 λ_{nY} 、 λ_{nB} は Bauer-Reiss [14] に載っていたデータで、 λ_{nBR} は Bauer-Reiss が計算した固有値、 λ_{nY} は D. Young が Ritz 法によって求めた固有値、 λ_{nB} は V. V. Bolotin が Asymptotic Method によって求めた固有値である。

(Young, Bolotin については、平野君の修論には、Reference がないが、Young については、Leissa [30] を見たものと思われる。出典は Young [50] をそのうちチェックすること。)

n	$\sqrt{\lambda_n^{(1280)}}$	相对誤差	$\sqrt{\lambda_{nBR}}$	$\sqrt{\lambda_{nY}}$	$\sqrt{\lambda_{nB}}$
1	35.985045	7.0×10^{-5}	35.9844	35.99	35.096
2	73.39343	2.9×10^{-4}	73.3894	73.41	72.897
3	73.39343	2.9×10^{-4}	73.3894	73.41	72.897
4	108.21579	5.2×10^{-4}	108.1986	108.27	107.47
5	131.57953	9.2×10^{-4}	131.5626	131.64	
6	132.20357	9.1×10^{-4}	132.1859	132.25	131.63
7	164.9989	1.2×10^{-3}	164.9468	165.15	164.39
8	164.9989	1.2×10^{-3}	164.9468	165.15	164.39
9	210.5189	2.2×10^{-3}	210.4574		210.35
10	210.5189	2.2×10^{-3}	210.4574		210.35
11	220.0303	1.8×10^{-3}	219.8986		219.32
12	242.1506	2.5×10^{-3}	242.0102		
13	243.1410	2.5×10^{-3}	243.0087	243.10	242.20
14	296.3317	3.2×10^{-3}	296.039		295.69
15	296.3317	3.2×10^{-3}	296.039		295.69
16	308.8961	4.7×10^{-3}	308.707		
17	309.1578	4.7×10^{-3}	308.974		308.929
18	340.5738	5.0×10^{-3}	340.249		340.244
19	340.5738	5.0×10^{-3}	340.249		340.244
20	371.3384	4.6×10^{-3}	370.761		370.66
21	392.7578	5.7×10^{-3}	392.130		
22	393.8932	5.7×10^{-3}	393.326		392.80
23	427.3411	8.7×10^{-3}			
24	427.3411	8.7×10^{-3}			
25	458.2133	9.0×10^{-3}			
26	458.8034	9.0×10^{-3}			
27	467.2472	7.1×10^{-3}			
28	467.2472	7.1×10^{-3}			
29	510.6197	9.8×10^{-3}			
30	510.6197	9.8×10^{-3}			
31	562.1060	9.7×10^{-3}			
32	565.360	1.5×10^{-2}			
33	565.523	1.5×10^{-2}			
34	583.108	1.1×10^{-2}			
35	584.307	1.1×10^{-2}			
36	596.337	1.5×10^{-2}			
37	596.337	1.5×10^{-2}			
38	647.578	1.6×10^{-2}			
39	648.390	1.6×10^{-2}			
40	677.688	1.4×10^{-2}			

表 K.1: clamped edge での固有値

K.1.5 plate_f1.m — 重調和作用素, free edge の場合の係数行列

$$(K.1) \quad \Delta^2 u = \lambda u \quad \text{in } \Omega,$$

$$(K.2) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$(K.3) \quad \mu \Delta u + (1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.,$$

$$(K.4) \quad \text{角点では } \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \text{ が両側で等しい } \quad i.e. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/chladni/hirano-programs/plate_f1.m から入手できる。

- 例えば $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ の各辺を 640 等分して差分近似した行列を求めるには

```
> N=640
> mu=0.3
> a=plate_f1(N,mu);
```

- 絶対値が 0 に近い方から (今の場合 A は半正値なので、小さい方から、ということになる) 200 個の固有値を計算するには

```
> [v,d]=eigs(A,200,0);
```

とする。この辺は clamped edge のときと変わらない。

固有値だけを取り出したければ (対角成分を抜き出すということで) $\text{diag}(d)$ とする。さらに小さい順にしたければ $\text{sort}(\text{diag}(d))$ とか、あるいは

```
> lambda=diag(d);
> lambda=lambda(200:-1:1);
> v=v(:,200:-1:1);
```

と並べ替えてしまうとか。

- 固有関数のグラフは (後述の) $\text{plot}_n()$ を用いて描く。固有値と固有関数を、固有値の小さい方から番号付けるとして、 i 番目の固有関数を表示するには、

- $\text{plot}_n(v(:,200+1-i),N,N)$ 並べ替えしていない場合
- $\text{plot}_n(v(:,i),N,N)$ 並べ替えしている場合

```
% plate_f1.m -- Eigenvalue problem of square plates with free edges
% written by Hirano Yuuki, Meiji University, Feb 2012
% comments are modified by Masashi Katsurada, 24 June 2012.
%
% \triangle^2 u = \lambda u
% 0 < x < 1, 0 < y < 1
% mu: Poisson's ratio
% usage:
%   A=plate_f1(640,0.3);
%   [v,d]=eigs(A,200,0);
%   plot_n(v(:,197),640,640)
```

```

function P1=plate_f1(N,mu)
    h=1/N;
    n=N+1;
    a=-2*(mu*mu+2*mu-3);
    b=1-mu*mu;
    c=-2*(mu-1);
    d=15-8*mu-5*mu*mu;
    e=-4*(mu*mu+mu-2);
    f=2-mu;
    g=-2*(mu-3);
    k=-2*(3*mu*mu+4*mu-8);
    In=speye(n,n);
    Jn=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
    J2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
    j2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
    j2n(1,3)=sqrt(2);
    j2n(3,1)=sqrt(2);
    j2n(n-2,n)=sqrt(2);
    j2n(n,n-2)=sqrt(2);
    An=In;
    An(1,1)=b;
    An(n,n)=b;
    Bn=-8*In+2*Jn;
    Bn(1,1)=-e;
    Bn(n,n)=-e;
    Bn(1,2)=sqrt(2)*f;
    Bn(2,1)=sqrt(2)*f;
    Bn(n-1,n)=sqrt(2)*f;
    Bn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
    Cn=-g*In+f*Jn;
    Cn(1,1)=-a;
    Cn(n,n)=-a;
    Cn(1,2)=sqrt(2)*f;
    Cn(2,1)=sqrt(2)*c;
    Cn(n-1,n)=sqrt(2)*c;
    Cn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
    Dn=20*In-8*Jn+j2n;
    Dn(1,1)=k;
    Dn(n,n)=k;
    Dn(2,2)=19;
    Dn(n-1,n-1)=19;
    Dn(1,2)=-sqrt(2)*g;
    Dn(2,1)=-sqrt(2)*g;
    Dn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
    Dn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
    DDn=19*In-8*Jn+j2n;
    DDn(1,1)=d;
    DDn(n,n)=d;
    DDn(2,2)=18;
    DDn(n-1,n-1)=18;
    DDn(1,2)=-sqrt(2)*g;
    DDn(2,1)=-sqrt(2)*g;
    DDn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
    DDn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
    En=k*In-e*Jn+b*j2n;
    En(1,1)=2*a;
    En(n,n)=2*a;
    En(2,2)=d;
    En(n-1,n-1)=d;
    En(1,2)=-sqrt(2)*a;
    En(2,1)=-sqrt(2)*a;
    En(n-1,n)=-sqrt(2)*a;

```

```

En(n,n-1)=-sqrt(2)*a;
P1=kron(j2n,An)+kron(Jn,Bn)+kron(In,Dn);
P1(1:n,1:n)=En;
P1(1:n,n+1:2*n)=sqrt(2)*Cn';
P1(n+1:2*n,1:n)=sqrt(2)*Cn;
P1(n+1:2*n,n+1:2*n)=DDn;
P1(n*(n-2)+1:n*(n-1),n*(n-2)+1:n*(n-1))=DDn;
P1(n*(n-2)+1:n*(n-1),n*(n-1)+1:n*n)=sqrt(2)*Cn;
P1(n*(n-1)+1:n*n,n*(n-2)+1:n*(n-1))=sqrt(2)*Cn';
P1(n*(n-1)+1:n*n,n*(n-1)+1:n*n)=En;
P1=P1/(h*h*h*h);
end

```

K.1.6 plate_f2.m — free edge の場合の係数行列 (同じ結果)

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/chladni/hirano-programs/plate_f2.m から入手できる。

```

% plate_f2.m -- Eigenvalue problem of square plates with free edges
% written by Hirano Yuuki, Meiji University, Feb 2012
%
% \triangle^2 u = \lambda u
% 0 <= x <= a, 0 <= y <= b
% mu: poisson's ratio
% usage:
% A=plate_f1(1,1,640,640)
% eigs(A,200,0)
% plot_n(v(:,197),640,640)

```

```

function P2=plate_f2(N,mu)
h=1/N;
n=N+1;
a=-2*(mu*mu+2*mu-3);
b=1-mu*mu;
c=-2*(mu-1);
d=15-8*mu-5*mu*mu;
e=-4*(mu*mu+mu-2);
f=2-mu;
g=-2*(mu-3);
k=-2*(3*mu*mu+4*mu-8);
In=speye(n,n);
I0n=speye(n,n);
I0n(1,1)=0;
I0n(2,2)=0;
I0n(n-1,n-1)=0;
I0n(n,n)=0;
Jn=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
jn=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
jn(1,2)=sqrt(2);
jn(2,1)=sqrt(2);
jn(n-1,n)=sqrt(2);
jn(n,n-1)=sqrt(2);
J0n=sparse(diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1));
J0n(1,2)=0;
J0n(2,1)=0;
J0n(n-1,n)=0;
J0n(n,n-1)=0;
J2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
j2n=sparse(diag(ones(n-2,1),2)+diag(ones(n-2,1),-2));
j2n(1,3)=sqrt(2);
j2n(3,1)=sqrt(2);
j2n(n-2,n)=sqrt(2);

```

```

j2n(n,n-2)=sqrt(2);
Fn=zeros(n,n);
Fn(2,2)=1;
Fn(n-1,n-1)=1;
Gn=zeros(n,n);
Gn(1,1)=1;
Gn(n,n)=1;
Hn=zeros(n,n);
Hn(2,1)=1;
Hn(n-1,n)=1;
An=In;
An(1,1)=b;
An(n,n)=b;
Bn=-8*In+2*Jn;
Bn(1,1)=-e;
Bn(n,n)=-e;
Bn(1,2)=sqrt(2)*f;
Bn(2,1)=sqrt(2)*f;
Bn(n-1,n)=sqrt(2)*f;
Bn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
Cn=-g*In+f*Jn;
Cn(1,1)=-a;
Cn(n,n)=-a;
Cn(1,2)=sqrt(2)*f;
Cn(2,1)=sqrt(2)*c;
Cn(n-1,n)=sqrt(2)*c;
Cn(n,n-1)=sqrt(2)*f;
Dn=20*In-8*Jn+j2n;
Dn(1,1)=k;
Dn(n,n)=k;
Dn(2,2)=19;
Dn(n-1,n-1)=19;
Dn(1,2)=-sqrt(2)*g;
Dn(2,1)=-sqrt(2)*g;
Dn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
Dn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
DDn=19*In-8*Jn+j2n;
DDn(1,1)=d;
DDn(n,n)=d;
DDn(2,2)=18;
DDn(n-1,n-1)=18;
DDn(1,2)=-sqrt(2)*g;
DDn(2,1)=-sqrt(2)*g;
DDn(n-1,n)=-sqrt(2)*g;
DDn(n,n-1)=-sqrt(2)*g;
En=k*In-e*Jn+b*j2n;
En(1,1)=2*a;
En(n,n)=2*a;
En(2,2)=d;
En(n-1,n-1)=d;
En(1,2)=-sqrt(2)*a;
En(2,1)=-sqrt(2)*a;
En(n-1,n)=-sqrt(2)*a;
En(n,n-1)=-sqrt(2)*a;
P2=(kron(j2n,An)+kron(J0n,Bn)+kron(I0n,Dn)+kron(Fn,DDn)+...
kron(Gn,En)+kron(Hn,sqrt(2)*Cn)+(kron(Hn,sqrt(2)*Cn)'))/(h*h*h*h);

```

K.1.7 データ処理 MATLAB プログラム集

```
makedata_free.m
muarray=[-1.0:0.1:0 0.05:0.05:0.5];
maxk=size(muarray,2);
for k=1:maxk
    poisson=muarray(k)
    mustr=num2str(poisson);

    N=10;
    [v10,d10]=eigs(plate_f1(N,poisson),100,0);
    fname=['free_' mustr '_10.mat'];
    save(fname, 'N', 'v10', 'd10')

    N=20;
    [v20,d20]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_20.mat'];
    save(fname,'N','v20','d20')

    N=40;
    [v40,d40]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_40.mat'];
    save(fname,'N','v40','d40')

    N=80;
    [v80,d80]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_20.mat'];
    save(fname,'N','v80','d80')

    N=160;
    [v160,d160]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_160.mat'];
    save(fname,'N','v160','d160')

    N=320;
    [v320,d320]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_320.mat'];
    save(fname,'N','v320','d320')

    N=640;
    [v640,d640]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_640.mat'];
    save(fname,'N','v640','d640')

    N=1280;
    [v1280,d1280]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' mustr '_1280.mat'];
    save(fname,'N','v1280','d1280', '-v7.3')
end
```

複数の Poisson 比に対して計算する

```
% makedata_free_all.m
%
clear
muarray=[-0.1 0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5];
[dummy,maxk]=size(muarray);
for k=1:maxk
    poisson=muarray(k)
    muststr=num2str(poisson);

    N=10
    [v10,d10]=eigs(plate_f1(N,poisson),100,0);
    fname=['free_' muststr '_10.mat']
    save(fname, 'N', 'v10', 'd10')

    N=20
    [v20,d20]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_20.mat']
    save(fname,'N','v20','d20')

    N=40
    [v40,d40]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_40.mat']
    save(fname,'N','v40','d40')

    N=80
    [v80,d80]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_80.mat']
    save(fname,'N','v80','d80')

    N=160
    [v160,d160]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_160.mat']
    save(fname,'N','v160','d160')

    N=320
    [v320,d320]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_320.mat']
    save(fname,'N','v320','d320')

    N=640
    [v640,d640]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_640.mat']
    save(fname,'N','v640','d640')

    N=1280
    [v1280,d1280]=eigs(plate_f1(N,poisson),200,0);
    fname=['free_' muststr '_1280.mat']
    save(fname,'N','v1280','d1280', '-v7.3')
end
```

[dummy,maxk]=size(muarray); は決まり文句だけど、dummy=size(muarray,2); の方が良かったかな。後で負のポアソン比の計算をしたけれど、そちらではそうしました。

```

nv_to_dim2.m
% nv_to_dim2.m
% Naumann 境界条件の問題の差分を 2次元配列に変換
% written by Masashi Katsurada
% modified by Masashi Katsurada on 2012/9/29
%
% example:
% [v,d]=eigs(plate_f1(N,0.3),200,0);
% u=nv_to_dim2(v(:,201-n),N,N);
% x=0:1/N:1; y=0:1/N:1;
% u=u';
% mesh(x,y,u);
% contour(x,y,u);

function u=nv_to_dim2(v,nx,ny)
    u=zeros(nx+1,ny+1);
    u(:)=v;
    u(1,:)=u(1,:)*sqrt(2);
    u(nx+1,:)=u(nx+1,:)*sqrt(2);
    u(:,1)=u(:,1)*sqrt(2);
    u(:,ny+1)=u(:,ny+1)*sqrt(2);

```

次は Mathematica で扱うために、データを間引きしてばらすプログラム。

```

dividedata.m
% dividedata.m --- free_某_1280.mat を分割して poisson_某/u 番号.dat
% 2012/10/13 最初のバージョン (0,0.1,0.2,0.25,0.3,0.35,0.5 で実行する)
% written by Masashi Katsurada

clear
N=1280;
i=1:N/160:N+1;
j=1:N/160:N+1;
muarray=[0 0.1 0.2 0.25 0.3 0.35 0.5];
for k=1:7
    mu=muarray(k);
    mustr=num2str(mu);
    % mustr 0 0.1 0.2 0.25 0.3 0.35 0.5
    load(['free_' mustr '_1280.mat'])
    for n=1:200
        u=nv_to_dim2(v1280(:,201-n),N,N);
        u=u(i,j);
        save(['poisson_' mustr '/u' int2str(n) '.dat'], 'u', '-ascii')
    end
    e=diag(d1280);
    e=e(200:-1:1);
    save(['poisson_' mustr '/eigen.dat'],'e','-ascii')
end
end

```

最終的には、次のように徹底的に。

```

dividedataall.m
% dividedataall.m --- free_某_1280.mat を分割して poisson_某/u 番号.dat
% 2012/10/13 最初のバージョン (0,0.1,0.2,0.25,0.3,0.35,0.5 で実行する)
% 2012/10/15 (-0.1,0,0.05,0.1,0.15,0.2,0.25,0.3,0.35,0.4,0.45,0.5 で実行する)
% 2012/?/?? 最終版
% written by Masashi Katsurada

N=1280;
i=1:N/160:N+1;
j=1:N/160:N+1;
muarray=[-1:0.1:0 0.05:0.05:0.5];
maxk=size(muarray,2);
for k=1:maxk
    mu=muarray(k);
    mustr=num2str(mu);
    dirname=['Poisson_' mustr];
    load(['free_' mustr '_1280.mat'])
    system(['mkdir ' dirname])
    for n=1:200
        u=nv_to_dim2(v1280(:,201-n),N,N);
        u=u(i,j);
        save([dirname '/u' int2str(n) '.dat'], 'u', '-ascii')
    end
    e=diag(d1280);
    e=e(200:-1:1);
    save([dirname '/eigen.dat'],'e','-ascii')
end
end

```

K.1.8 固有関数を描くための MATLAB プログラム

結局、Laplacian の場合 (固有値問題や Poisson 方程式) と同じプログラムが利用できる (桂田 [32] を見よ)。

まずは clamped edges (Dirichlet 境界条件) の場合。

```
% 正方形領域上の関数の表示
% Laplacian (harmonic operator) with Dirichlet B.C.
% or
% Biharmonic operator with Dirichlet B.C.
function plot_d(v,nx,ny)
    vv=zeros(ny+1,nx+1);
    vvv=zeros(nx-1,ny-1);
    vvv(:)=v;
    vv(2:ny,2:nx)=vvv';
    x=0:1/nx:1;
    y=0:1/ny:1;
% 左側にグラフの鳥瞰図
    subplot(1,2,1);
    colormap hsv;
    mesh(x,y,vv);
% 右側に等高線
    right=subplot(1,2,2);
    contour(x,y,vv);
    pbaspect(right,[1 1 1]);
end
```

free edges (Neumann 境界条件) の場合。

```

plot_n.m
% plot_n.m --- 長方形領域上の問題の差分の描画 (Neumann, free edge 境界条件)
%
% 使用例
% (1) Laplacian の第 n 固有関数
%   [v,d]=eigs(eigp2nsp(nx,ny),10,0);
%   plot_n(v(:,11-n),nx,ny);
% (2) 重 Laplacian の第 n 固有関数
%   [v,d]=eigs(plate_f1(N,0.3),200,0); 小さい方から 200 個の固有値、固有関数
%   plot_n(v(:,201-n),N,N);           (n=4 は正の最小固有値)

function plot_n(v,nx,ny)
% メモリー中に v[0][0],v[1][0],...,v[Nx][0],v[0][1],... と並んでいる。
% 2次元配列に収める
vvv=zeros(nx+1,ny+1);
vvv(:)=v;
% 境界での値を修正する (角点では2倍することに注意)
vvv(1,:)=vvv(1,:)*sqrt(2);
vvv(nx+1,:)=vvv(nx+1,:)*sqrt(2);
vvv(:,1)=vvv(:,1)*sqrt(2);
vvv(:,ny+1)=vvv(:,ny+1)*sqrt(2);
% mesh(), contour() には渡すには、vv は ny+1,nx+1 とする必要がある。
vv=vvv';
x=0:1/nx:1;
y=0:1/ny:1;
% 左側にグラフの鳥瞰図
subplot(1,2,1);
colormap hsv;
mesh(x,y,vv);
% 右側に等高線
right=subplot(1,2,2);
contour(x,y,vv);
pbaspect(right,[1 1 1]);
end

```

K.2 Mathematica プログラム (小釜)

m2-20121005.nb

K.2.1 MATLAB で作ったデータの読み方

```

For[i = 1, i <= 200, i++,
  u[i] = Import["Documents/MATLAB/poisson0.3/u" <> IntegerString[i] <> ".dat"]]

```

K.2.2 手動で固有関数を混合

```
blend[]  
blend[m_, n_] :=  
  Manipulate[ListContourPlot[a*u[m] + b*u[n], DataRange -> {{0, 1}, {0, 1}},  
    Contours -> {0}, ContourShading -> None], {{a, 1, "a"}, -1, 1, 0.001},  
  {{b, -0.944, "b"}, -1, 1, 0.001}]
```

K.2.3 固有関数を回転

```
rot90[], rotm90[]  
rot90[u_] := Block[{i, j, np1}, np1 = Length[u];  
  Table[u[[np1 + 1 - j, i]], {i, 1, np1}, {j, 1, np1}]]  
  
rotm90[u_] := Block[{i, j, np1}, np1 = Length[u];  
  Table[u[[j, np1 + 1 - i]], {i, 1, np1}, {j, 1, np1}]]
```

```
ListContourPlot[u[7]]  
  
ListContourPlot[rot90[u[8]]]  
  
ListContourPlot[rotm90[u[8]]]  
  
Norm[u[7] - rot90[u[8]]]
```

K.2.4 重根の固有関数として、自動的 $y = x$ について対称なものを選ぶ

```
blend2[]  
blend2[m_, n_] :=  
  Manipulate[  
    ListContourPlot[a*u[m] + b*u[n], DataRange -> {{0, 1}, {0, 1}},  
    Contours -> {0}, ContourShading -> None],  
  {{a, If[u[n][[1,1]] != 0, 1, 0], "a"}, -1, 1, 0.001},  
  {{b, If[u[n][[1,1]] != 0, -u[m][[1,1]]/u[n][[1,1]], 1], "b"}, -1, 1, 0.001}]
```

```
blend2[7,8]
```

K.2.5 固有値を読み込み、重根を探す

```
固有値を読み込み、長さ 200 のリスト eigen を得る  
eigen = Flatten[Import["Documents/MATLAB/Poisson_0.3/eigen.dat"]]
```

```
Select[Table[n, {n, 1, 199}], Abs[eigen[[#]]-eigen[[#+1]]]/eigen[[#]]<0.00001 &]
```

$\mu = 0$ のとき、

5, 7, 9, 14, 16, 18, 23, 27, 29, 32, 36, 40, 42, 44, 48, 55, 57, 59, 61, 65, 70, 76, 78, 82,
84, 86, 88, 97, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 118, 122, 124, 130, 132, 134, 136, 140,
142, 147, 149, 157, 159, 161, 163, 165, 169, 173, 176, 186, 188, 190, 192, 194, 196

$\mu = 0.1$ のとき、

7, 9, 14, 18, 23, 27, 29, 36, 40, 42, 44, 48, 57, 59, 61, 65, 70, 76,
78, 82, 86, 88, 97, 101, 103, 107, 109, 111, 118, 124, 130, 132, 134, 136,
140, 147, 149, 157, 159, 161, 165, 169, 173, 176, 186, 188, 192, 194, 196

$\mu = 0.2$ のとき、

7, 9, 14, 18, 23, 27, 29, 36, 40, 42, 44, 49, 57, 59, 61, 65, 70, 76,
78, 82, 84, 88, 97, 99, 103, 105, 109, 111, 118, 124, 130, 132, 134, 136,
141, 147, 149, 157, 159, 161, 166, 169, 173, 178, 186, 188, 192, 194, 196

$\mu = 0.25$ のとき、

7, 9, 14, 18, 23, 27, 29, 36, 40, 42, 44, 49, 57, 59, 61, 65, 70, 76,
78, 82, 84, 88, 97, 99, 103, 105, 109, 111, 118, 124, 130, 132, 134, 136,
142, 147, 149, 157, 159, 161, 167, 169, 173, 178, 186, 188, 192, 194, 196

$\mu = 0.3$ のとき、

7, 9, 14, 18, 23, 27, 29, 36, 40, 42, 44, 49, 57, 59, 61, 65, 70, 76,
78, 82, 84, 88, 97, 99, 103, 105, 109, 111, 118, 124, 130, 132, 134, 136,
142, 147, 149, 157, 159, 161, 167, 169, 173, 178, 186, 188, 192, 194, 196

$\mu = 0.35$ のとき、

7, 9, 14, 18, 23, 26, 29, 36, 40, 42, 44, 49, 55, 59, 61, 65, 71, 76,
78, 82, 84, 88, 97, 99, 103, 106, 109, 111, 118, 124, 130, 132, 134, 136,
144, 147, 150, 157, 159, 161, 165, 169, 174, 178, 186, 189, 191, 194, 196

$\mu = 0.5$ のとき、

7, 10, 14, 18, 24, 26, 29, 35, 40, 42, 45, 50, 55, 58, 61, 65, 72, 76,
78, 81, 84, 88, 97, 99, 103, 106, 109, 111, 119, 123, 127, 132, 134, 136,
144, 147, 151, 157, 159, 161, 164, 167, 176, 178, 187, 189, 191, 194, 196

K.2.6 とにかく描く

一行に3つ図を並べる。

show[] でとにかく一つ描いて、重根みたいだったら show2[] で書き直し。

```
show[mu_, n_] :=
Module[{u, fname},
  fname="Documents/MATLAB/poisson_"<>ToString[mu]<>"/u"<>ToString[n]<>".dat";
  u = Import[fname];
  {ListContourPlot[u, ImageSize->180],
  ListPlot3D[u, ImageSize->180],
  ListContourPlot[u, Contours->{0}, ContourShading->None, ImageSize->200]}}

show2[mu_, n_] :=
Module[{u, u1, u2, dirname, fname1, fname2, a, b},
  dirname = "Documents/MATLAB/poisson_" <> ToString[mu] <> "/";
  fname1 = dirname <> "u" <> ToString[n] <> ".dat";
  fname2 = dirname <> "u" <> ToString[n + 1] <> ".dat";
  u1 = Import[fname1]; u2 = Import[fname2];
  a = 1; b = -u1[[1, 1]]/u2[[1, 1]];
  u = a*u1 + b*u2;
  {ListContourPlot[u, ImageSize -> 180],
  ListPlot3D[u, ImageSize -> 180],
  ListContourPlot[u, Contours->{0},ContourShading->None,ImageSize->200]}}
```

K.2.7 2012/10/20

- 正方形領域上の重調和作用素の固有値の三重根探し

```
>> N=160;
>> [v,d]=eigs(plate_f1(N,0.3372), 5, 45000); sort(diag(d))

ans =

    1.0e+04 *

    3.901055016167033
    4.085979972151815
    4.547834839448743
    4.547834839449542
    4.554761098306910
```

(45000 に近い固有値を5つ計算してソートする。0.3372 は人手二分法をして追い詰めた値。二重根 4.54783483945 とそれに極めて近い単根 4.55476109831 がある。)

うん。確かに存在することを確信する。

- 基本的な問題として、

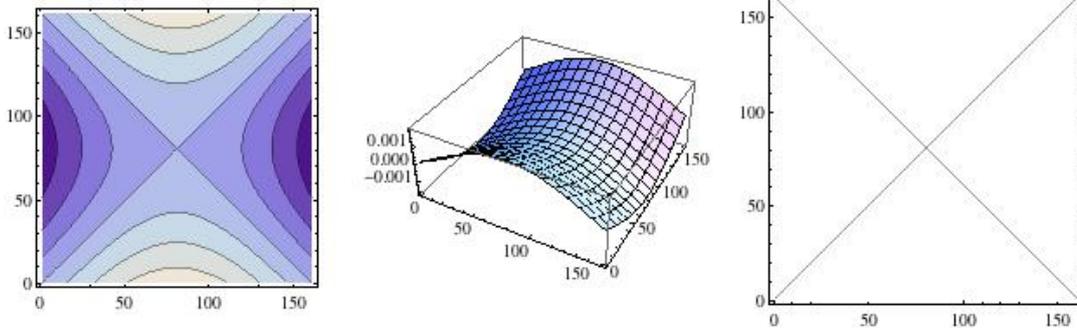


図 K.1: $\mu = 0.3, n = 5$

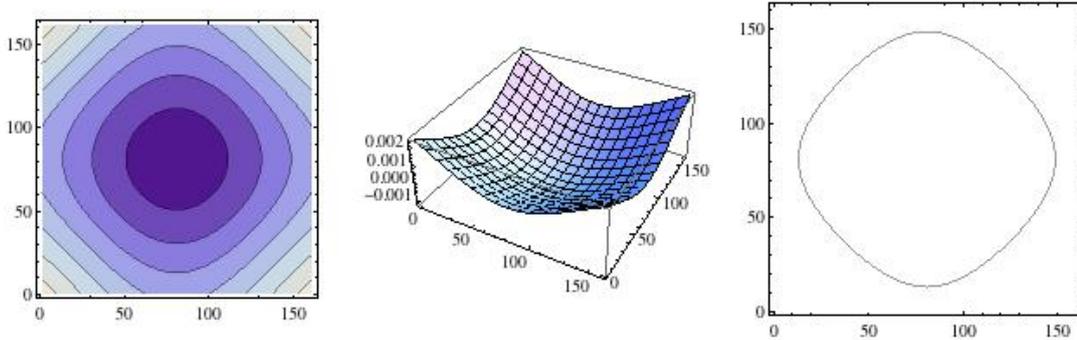


図 K.2: $\mu = 0.3, n = 6$

– 固有関数をどう番号付けるか？Poisson 比 μ が一つならば固有値の大小を使って並べるのも一つの手であるが（それでも重根の場合は問題が残る）、Poisson 比を連続的に変化させる場合には適切とは言えない。それを示す次の例。

* $\mu = 0.3$ のときは、 φ_5 はバツテン（鞍）、 φ_6 はマル（谷底）

* $\mu = -0.1$ のときは、 φ_5 はマル（山）、 φ_6 はバツテン（鞍）

山と谷は単なる符号の違いだけど、それと鞍は本質的に違うよね。マルとバツテンの順番（番号）が入れ替わっている。実はどこで入れ替わったかも分かっている。実は $\mu = 0$ のとき $\lambda_5 = \lambda_6$ なのである。今回使ったプログラムは、

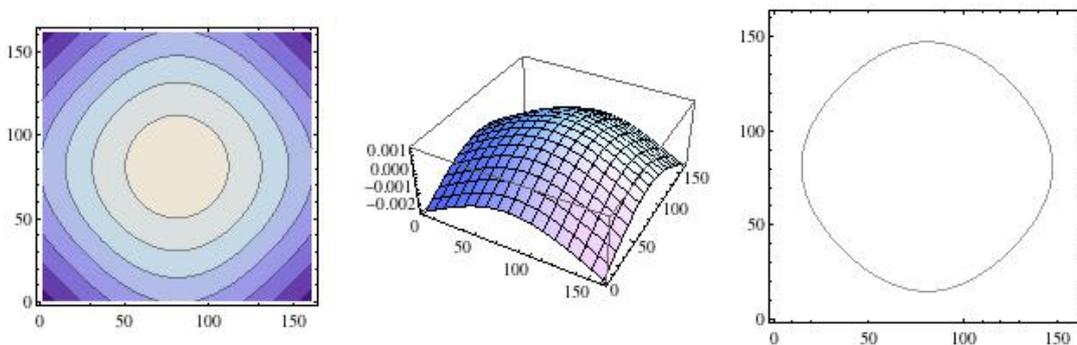


図 K.3: $\mu = -0.1, n = 5$

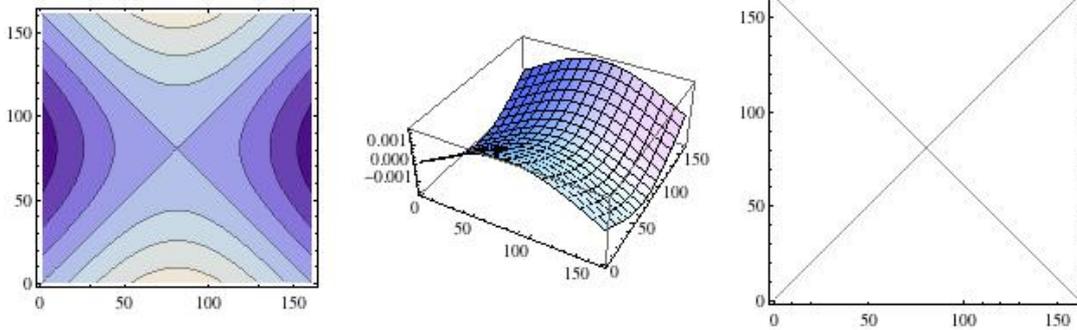


図 K.4: $\mu = -0.1, n = 6$

```

show3[mu_, n_] :=
Module[{u, fname},
  fname = "Documents/MATLAB/poisson_" <> ToString[mu] <> "/" <>
    ToString[n] <> ".dat"; u = Import[fname];
  GraphicsRow[
    {ListContourPlot[u, ImageSize -> 180],
      ListPlot3D[u, ImageSize -> 180],
      ListContourPlot[u, Contours->{0}, ContourShading->None,
        ImageSize->200]
    }
  ]
]

readeigen[mu_] :=
Module[{e, fname},
  fname = "Documents/MATLAB/poisson_" <> ToString[mu] <> "/eigen.dat";
  e = Import[fname];
  Flatten[e]
]

```

(GraphicsRow[] を使ったのが一つの新しい工夫。こうすると3つの図が一つのグラフィックスになるので、Export["なんとか.png", show3[-0.1,5]]) みたいなことが出来る。

$\mu = 0.3, -0.1, 0$ の場合の、固有値小さい方から6個

```

In[] := Take[readeigen[0.3], 6]
Out[] = {0.00136494, 0.00252915, 0.00325771, 181.394, 384.009, 589.042}

In[] := Take[readeigen[-0.1], 6]
Out[] = {0.00140348, 0.00255659, 0.00326315, 271.649, 464.574, 533.746}

In[] := Take[readeigen[0], 6]
Out[] = {0.00137206, 0.00253894, 0.00326049, 250.358, 500.564, 500.564}

```

$\mu = 0$ のとき、 $\lambda_5 = \lambda_6$ が分かる。

- 固有関数に適切な ID をつけて、Poisson 比を変化させて、固有値がどう変化するか、調べたい。そうしたら単調とかあるのか？

K.3 遠藤さん

K.3.1 小釜プログラムの解説 (2014/12/15)

小釜君の修士論文のダイアグラムは、重根の場合の図が、対称性を持っていない。これでは良く分からない。図を出力する方法を説明し、図を作りなおすことにした。

K.3.2 重根の場合に対称性のある図を描く (2014/12/17)

重根の判定を自動化するために、固有値を全部読み込むことにした。

```

readef[mu_, n_] :=
  Import["Desktop/Chladni-data/Poisson_" <> ToString[mu] <> "/u" <>
    IntegerString[n] <> ".dat"]

```

```

mulistp = {0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.225, 0.25, 0.3, 0.33333, 0.345, 0.35,
  0.4, 0.45, 0.5};

```

```

mulistn = {-1, -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0};

```

```

mulist = Flatten[{mulistp, mulistn}]

```

```

For[i = 1, i <= Length[mulist], i++, mu = mulist[[i]];

```

```

  ev[mu] = Flatten[Import["Desktop/Chladni-data/Poisson_"
    <> ToString[mu] <> "/eigen.dat"]]

```

```

showpositive[n_] := Module[{u, fname},

```

```

  For[i = 1, i <= 14, i++, u[i] = readef[mulistp[[i]], n]];

```

```

  GraphicsRow[

```

```

    Table[ListContourPlot[u[i], Frame -> None, Contours -> {0},
      ContourShading -> None, ImageSize -> 50,
      BoundaryStyle -> Black], {i, 1, 14}]]]

```

```

shownegative[n_] := Module[{u, fname},

```

```

  For[i = 1, i <= 11, i++, u[i] = readef[mulistn[[i]], n]];

```

```

  GraphicsRow[

```

```

    Table[ListContourPlot[u[i], Frame -> None, Contours -> {0},
      ContourShading -> None, ImageSize -> 50,
      BoundaryStyle -> Black], {i, 1, 11}]]]

```

```

wm[mu_, m_, n_] :=

```

```

  Module[{a, b, u},

```

```

    u[mu, n] = readef[mu, n]; u[mu, m] = readef[mu, m];

```

```

    If[u[mu, n][[1, 1]] != 0, a = 1, a = 0];

```

```

    If[u[mu, n][[1, 1]] != 0, b = -u[mu, m][[1, 1]]/u[mu, n][[1, 1]], b = 1];

```

```

    a*u[mu, m] + b*u[mu, n]

```

```

wp[mu_, m_, n_] :=

```

```

  Module[{a, b, u},

```

```

    u[mu, n] = readef[mu, n]; u[mu, m] = readef[mu, m];

```

```

    If[u[mu, n][[1, 1]] != 0, a = 1, a = 0];

```

```

    If[u[mu, n][[1, 1]] != 0, b = -u[mu, n][[1, 1]]/u[mu, m][[1, 1]], b = 1];

```

```

    a*u[mu, m] - b*u[mu, n]

```

```

isdouble[mu_, n_] :=

```

```

  Abs[(ev[mu][[n]] - ev[mu][[n + 1]])/ev[mu][[n + 1]]] < 10^(-5)

```

```

Table[isdouble[0.3, n], {n, 1, 100}]

```

```

newshowpositive[n_] :=

```

```

  Module[{u, fname},

```

```

    For[i = 1, i <= Length[mulistp], i++, mu = mulistp[[i]];

```

このプログラム、最後に 200 個の eps ファイルを作成しているが、Mac Pro で 25 分くらいの処理時間がかかった。

関連図書

- [1] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).
- [2] Gazzola, F., Grunau, H.-C. and Sweers, G.: *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Springer (2010).
- [3] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C編, 岩波書店 (1960).
- [4] N. H. フレッチャー, T. D. ロッシング：楽器の物理学, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002), 岸 憲史, 久保田 秀美, 吉川 茂 訳.
- [5] 渡部卓也：棒の振動, 明治大学理工学部数学科卒業研究レポート, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2010-watanabe-takuya.pdf> (2011).
- [6] Gander, M. J. and Kwok, F.: Chladni Figures and the Tacoma bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates, *SIAM Review*, Vol. 54(3), pp. 573–596 (2012).
- [7] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている.
- [8] ニューワイドずかん百科 科学, 学習研究社 (2006).
- [9] ^{こはし}小橋豊：音と音波, 基礎物理学選書 4, 裳華房 (1969), 良い本だと思います。常識に欠ける私には必携の必需品です。
- [10] Chladni, E. F. F.: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, Leipzig: Weidmanns Erben und Reich (1787), European Cultural Heritage Online などを読めます。
- [11] Chladni, E. F. F.: *Die Akustik*, Leipzig: Breitkopf und Härtel (1802, 1830), Waller によると、第2版は初版と同じであるそうです。第2版はネットで読める。
- [12] Chladni, E. F. F.: *Neue Beyträge Akustik*, Leipzig: Breitkopf und Härtel (1817), ペーパーバックで入手出来ますが、ネットでも読めます。
- [13] Waller, M. D.: *Chladni figures — a study in symmetry*, G. Bell and Sons Ltd. (1961).
- [14] Bauer, L. and Reiss, E. L.: Block Five Diagonal Matrices and the Fast Numerical Solution of the Biharmonic Equation, *Mathematics of Computation*, Vol. 26, pp. 311–326 (1972).
- [15] 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, 岩波書店 (1960), C編は加藤敏夫「変分法」.

- [16] Germain, S.: *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques* (1821), Mme. Veuve Courcier, Paris とあるけど何だろう？
- [17] Germain, S.: *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et l'équation générale de ces surfaces* (1826), Mme. Veuve Courcier, Paris とあるけど何だろう？
- [18] Germain, S.: *Mémoire sur la courbure des surfaces* (1830).
- [19] Wheatston, C.: On the Figures obtained by strewing Sand on Vibrating Surfaces, commonly called Acoustic Figures, *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. 123, pp. 593–634 (1833).
- [20] Kirchhoff, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **44**, pp. 51–92 (1850).
- [21] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 2*, London, Macmillan and co. (1878).
- [22] John William Strutt (third baron Rayleigh), : On the calculation of Chladni's figures for a square plate, *Philosophical Magazine*, Vol. xxn., pp. 225–229 (1911).
- [23] Waller, M. D.: Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, *Proceedings of the Physical Society*, Vol. 51, pp. 452–455 (1939).
- [24] 寺田寅彦：レーリー卿 (Lord Rayleigh), 岩波講座 物理学及び化学 (1930), 青空文庫に収録されている。
- [25] 小山慶太：寺田寅彦 — 漱石、レイリー卿と和魂洋才の物理学, 中央公論新社 (2012).
- [26] Lamb, H.: On the Flexure of an Elastic Plate, *Proc. London Math. Soc.*, *21*, pp. 70–91 (1889).
- [27] Gander, M. J. and Wanner, G.: From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing, *SIAM Review*, Vol. 54(4), pp. 627–666 (2012).
- [28] Leissa, A. W.: The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 961–978 (2005), 著者は 1973 年に古典的な論文を書いた。
- [29] Leissa, A. W.: VIBRATION OF PLATES, Technical Report NASA SP-160, NASA (1969).
- [30] Leissa, A. W.: THE FREE VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31(3), pp. 257–293 (1973), 非常に有名な論文であるらしい。
- [31] 神保秀一：偏微分方程式入門, 共立出版 (2006).
- [32] 桂田祐史：微分作用素の固有値問題, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/eigenvalues-of-differential-operators.pdf> (2010–2014).
- [33] 小釜燈台：クラドニ図形の数値解析, 明治大学理工学研究科 基礎理工学専攻 修士論文, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2013-kogama.pdf> (2013).
- [34] ヘルマン・ヴァイル：シンメトリー, 紀伊國屋書店 (1970), 遠山 啓訳。

- [35] 遠藤小欽：クラドニ図形の Ritz の方法による数値計算, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/open/2013-endou.pdf> (2014).
- [36] 近藤恭平：工学基礎 振動論, 培風館 (1993).
- [37] Bramble, J. H.: A second-order finite difference analog of the first biharmonic boundary value problem, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 236–249 (1966).
- [38] AGC グラスプロダクツ株式会社：旭硝子板ガラス建材総合カタログ 技術資料編 第9版板ガラスの物理的・機械的性質」, http://www.asahiglassplaza.net/catalogue/sougo_gi2012/spdfdata/00327_16s.pdf (2003).
- [39] Waller, M. D.: A simple method of finding poisson's ratio, *Proceedings of the Physical Society*, Vol. 52, pp. 710–713 (1940).
- [40] Thomson, W. and Tait, P. G.: *Treatise on Natural Philosophy*, Oxford (1867, 1883 (2nd edition)), Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1st_Baron_Kelvin からリンクが張られていて PDF で入手可能である。
- [41] Friedrichs, K.: Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten, *Math. Ann.*, Vol. 98, pp. 205–247 (1927).
- [42] 遠藤小欽^{しやおちん}：正多角形板の Chladni 図形, 明治大学大学院先端数理科学研究科 現象数理学専攻 修士論文, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/20150909-endo.pdf> (2016).
- [43] Morley, L. S. D.: The triangular equilibrium element in the solutions of plate bending problem, *Aero. Quart.*, Vol. 19, pp. 149–169 (1968).
- [44] Kirby, R. C., Logg, A., Rognes, M. E. and Terrel, A. R.: Common and unusual finite elements, pp. 95–119 (2012), これは Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth Wells eds., *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Volume 84 の chapter 3.
- [45] Gallistl, D.: Morley finite element method for the eigenvalues of the biharmonic operator, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 35, No. 4, pp. 1779–1811 (November 25, 2014).
- [46] 藤野勉：高階微分方程式の解析法 — Analysis Methods of Higher Order Differential Equations, *UNIVAC TECHNOLOGY REVIEW*, 第7号, (1984).
- [47] 藤野勉：熱伝導と熱応力, 培風館 (1972).
- [48] 平井一輝：円形物体の振動現象における Chladni の法則, 明治大学大学院先端数理科学研究科 現象数理学専攻 修士論文, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/chladni-figures/202202xx-hirai.pdf> (2022/2/x).
- [49] 平野裕輝：正方形領域における重調和作用素の固有値問題 — 差分法によるクラドニ図形の解析, 明治大学理工学研究科 基礎理工学専攻 修士論文, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/2011-hirano.pdf> (2012).
- [50] Young, D.: Vibration of rectangular plates by the Ritz method, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 448–453 (1950).