2002 年度卒業研究レポート

渦糸の力学系

4 年 16 組 9 番 稲垣亜希子
4 年 16 組 23 番 栗田智昭
4 年 16 組 46 番 田中賢史

2003 年 3 月 21 日

目 次

第 1 章　序 **2**

第 2 章　力学系 **3**
2.1　力学系理論からの準備と復習 3
2.2　Hamilton 系 6

第 3 章　Euler 方程式 **8**
3.1　完全流体の数学的記述方法 8
3.2　解の存在 · 非存在 10
3.3　渦度 10
3.4　Euler 方程式の解 12
3.5　流線および粒子の軌道 14
3.6　Euler 方程式の弱解 14

第 4 章　渦糸の力学系 **17**
4.1　渦糸とは 17
4.2　渦糸系 18
4.3　運動方程式 (複素表示) 19
4.4　渦糸の性質 20
4.5　個数が少ない場合の渦糸系の運動 22
4.5.1　2 個の渦糸 22
4.5.2　3 個の渦糸 25
4.5.3　4 個以上の渦糸 26
4.6　数値実験 26

第1章　序

この論文では、流体の運動を記述する非線形力学を数学的側面から検討し、2 次元の渦糸系の力学的性質を岡本 [1] に従って勉強し、そこに書かれている渦糸の性質を数値実験で確認した。

この論文の構成は以下のようなものである。第 2 章では非線形力学における数学的な概念と、Hamilton 系について述べる。第 3 章では非圧縮非粘性流体を記述する Euler 方程式について述べる。第 4 章では Euler 方程式から 2 次元の渦糸系と呼ばれる常微分方程式を導き、その力学的性質について調べる。数値実験に用いた Java プログラムも載せておく。

2003 年 3 月現在、

`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/`

でもそのプログラムを公開している。

第2章　力学系

2.1　力学系理論からの準備と復習

常微分方程式を解析学の言葉であらわすと次のようになる。

> n 個の実変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の滑らかな関数が n 個与えられている。これを、$f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)$ とする。自由度 n の常微分方程式とは、
>
> $$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \cdots, x_n) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$
>
> のことである。

また、幾何学的な言葉で表すと、

> n 次元ベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の各々に対して、ベクトル $X(x) \equiv (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ が定まっているとき、n 次元空間内の曲線 $t \mapsto x(t)$ で、その接ベクトルが $X(x(t))$ に等しくなるものを求めよ。

と表される。

この 2 つの見方を念頭において、次の定義をする。

定義 1 (力学系) M を有限次元多様体とし、その点を x で表す。点 x における M の接空間を T_xM と書き、T_xM の要素のことを接ベクトルと呼ぶ。$X = X(x)$ が M 上のベクトル場であるとは、M の各点 x に対し、接ベクトル $X(x) \in T_xM$ を与える規則が定められていることである。M 上のベクトル場 $X(x)$ が与えられたとき、常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{2.1}$$

のことを、ベクトル場 $X(x)$ によって定義される M 上の 力学系 *(dynamical system)* と呼ぶ。

変数 t を時間あるいは時間変数と呼び、$x = x(t)$ を時刻 t における状態と呼ぶ。x の属する空間、すなわち多様体 M のことを 相空間 *(phase space)* と呼ぶ。$X(a) = 0$ なる点 $a \in M$ のことを 平衡点 *(equilibrium point)* と呼ぶ。

例 1 (平衡点の例) 天井からバネでつり下げた物体がある。物体の質量を m、バネ定数を k、自然の長さからの伸びを x, 重力加速度を g とすると、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \quad -kx + mg$$

となる。速度変数 v を用いると、

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x + g \quad (\omega^2 = \tfrac{k}{m})$$

となる。平衡点は、この式の右辺を 0 とおいた

$$v = 0, \quad -\omega^2 x + g = 0$$

から決められて、$x = \dfrac{g}{\omega^2} = \dfrac{mg}{k}$, $v = 0$ となる。力学的に言えば、平衡点は力のつり合った静止状態に対応している。

ここでは、滑らかな力学系、つまりベクトル場 X は M の点 x の座標について何回でも連続的に微分可能であるものとする。常微分方程式 (2.1) は、初期条件 $x(0)$ を与えることによって、一意的に解 $x(t)$ を持つことが知られている。また、ある $t_{\min}$ と $t_{\max}$ が存在して、$x(t)$ は $t_{\min} < t < t_{\max}$ で M に値をとる連続微分可能な関数として定義される。

例 **2** $x(0) = 0$ は *1* 次元力学系 $\dot{x} = x^2$ のただ一つの平衡点である。この力学系の解の定義域が実数直線全体になるのは、$x(0) = 0$ の場合に限られる。以下、このことを示す。

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$x(0) = 0$$

を解く。$x_0 \neq \quad 0$ の場合、

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int 1 \cdot dt + C$$

$$\therefore -\frac{1}{x} = t + C$$

$$\therefore x = -\frac{1}{t + C}$$

$t = 0$ のとき $x = x_0$ なので、

$$x_0 = \frac{-1}{C} \quad \therefore C = -\frac{1}{x_0}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 t - 1}$$

これは、$x_0 > 0$ のとき $\left(-\infty, \dfrac{1}{x_0}\right)$ まで $x_0 < 0$ のとき $\left(\dfrac{1}{x_0}, +\infty\right)$ までしか意味がない。$x_0 = 0$ の場合

$$x(t) \equiv 0$$

これは $(-\infty, \infty)$ まで定義されている。以上から、解が $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 全体で定義できるのは、$x_0 = 0$ の場合に限る。

定義 **2** (爆発・爆発時刻) $t_{\max} < \infty$ になるとき、「解は有限時間内で爆発する」といい、$t_{\max}$ を爆発時刻と呼ぶ。

例 **3** (爆発の例)

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + p(t)x + q(t) \quad (\text{リッカチの方程式})$$

ここで $p(t)$, $q(t)$ は連続関数とする。とくに $p(t) = 0$, $q(t) \equiv 1$ のときには、$x(t) = \tan(t - t_0)$ (t_0 は任意定数)。したがって、有限時間内で解は発散してしまう。このように有限時間内で解が発散することを解の爆発という。

例 **4** *1* 次元調和振動子とは、*2* 階線形常微分方程式

$$\ddot{u} = -\omega^2 u$$

で表される力学系のことである。ここで ω は正の定数である。$x = (x_1, x_2) = (u, \dot{u})$ とおくと、平面 $M = \mathbf{R}^2$ 上の *2* 次元力学系が得られる。ベクトル場 $X(x)$ は、

$$X(x) = (x_2, -\omega^2 x_1)$$

である。この力学系では、すべての初期値に対して解の定義域は実数直線全体となる。一般に線形の微分方程式では定義域は実数直線全体になる。

n 階常微分方程式

$$\frac{d^n u}{dt^n} = F\left(u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right)$$

は、$x = (x_1, \cdots, x_n) = (u, \cdots, d^{n-1}u/dt^{n-1})$ とおくことにより、n 次元空間上の力学系を定義する。

定義 **3** (軌道) M の点 a を通る 軌道 *(orbit)* とは、初期条件 $x(0) = a$ を満たす *(2.1)* の解曲線

$$\{x(t); t_{\min} < t < t_{\max}\}$$

のことである。a を通る軌道を $O(a)$ で表す。ある正の数 T が存在して $x(t) = x(t+T)$ がすべての t について成立するとき、対応する軌道を 閉軌道 *(closed orbit)* あるいは 周期軌道 *(periodic orbit)* と呼ぶ。

1 次元調和振動子の力学系は平衡点と閉軌道のみからなる。

定義 **4** (ω 極限点) M の点 a を通る軌道に関して、$t_{max} = \infty$ と仮定する。このとき、点 $y \in M$ が a を通る軌道の ω 極限点であるとは、ある時刻列 $t_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ で、$n \to +\infty$ のとき、$t_n \to +\infty$ かつ $x \quad (t_n \to y)$ なるものが存在するときを言う。ω 極限点の全体を ω 極限集合と呼ぶ。

ただちにわかるように、a が平衡点であれば、a の通る軌道の ω 極限集合は 1 点からなる集合 $\{a\}$ である。

定理 **1** (**Poincaré-Bendixson**) 相空間 M が *2* 次元球面であるとする。このとき、任意の軌道の ω 集合 Ω は空でない。もし、Ω が平衡点を含まないならば、Ω は閉軌道である。M が平面 $\mathbf{R}^2$ のときも、$t_{max} = \ +\infty$ と仮定し、Ω が空集合でなければ同じ結論が成立する。

この定理の結論は相空間が球面あるいは平面でないと必ずしも成立しない。

2.2 Hamilton 系

n を自然数とする。$\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 $H = H(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$ が与えられたとき、次の常微分方程式を考える：

$$\dot{q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \quad \dot{p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.2}$$

この様な $2n$ 次元の力学系を **Hamilton** 系と呼ぶ。関数 H は ハミルトニアンあるいは **Hamilton** 関数と呼ばれる。n を自由度と呼ぶ ($2n$ ではない)。後に導入する渦糸の力学系は Hamilton 力学系の代表的なものである。

例 **5** $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $H(p, q) = (p^2 + q^2)/2$ で定義する。このときこの *Hamilton* 系は調和振動子を表す。実際

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q.$$

だから $\ddot{q} = -q$. これは例 *4* の $\omega = 1$ の場合に相当する。

例 **6** 平面 $\mathbf{R}^2$ の非圧縮流体の粒子の運動は、流れ関数を ψ としたとき、

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

で表される *(*第 *3* 章参照*)*。したがって、ψ を *Hamilton* 関数とする自由度 *1* の *Hamilton* 系になっている。

例 **7** $\mathbf{R}^{2n}$ 上の関数 F が *(2.2)* の第 *1* 積分であるとは、任意の解 $(q_1(t), \cdots, q_n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$ に対して

$$\frac{d}{dt} F(q_1(t), \cdots, q_n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t)) \equiv 0$$

が成立することを言う。*Hamilton* 関数 H は、時刻 t にあらわに依存しなければ、第 *1* 積分である。ただし、H が $H(t, q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ のように t を含んでいることを H は t にあらわに依存するという。

定義 **5 (Poisson** 括弧**)** $\mathbf{R}^{2n}$ 上の標準 ***Poisson*** 括弧 $\{\ ,\ \}$ とは、

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right]$$

で定まる *2* 次形式のことである。

関数 F が第 1 積分であるための必要十分条件は、Hamilton 関数 H に対して $\{F, H\} \equiv 0$ となることである。

例 8 調和振動子 $H(p,q) = (p^2+q^2)/2$ の場合、

$$I = \frac{p^2+q^2}{2}\ ,\ \theta = \arctan(p/q)$$

と定義する。θ は 2π の不定性を除いて定まる。あるいは、円周の座標として定まるといっても良い。このとき、元の方程式は、

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial I}$$

と書き表される。ところが、$H = I$ であり、これは θ に依存しない。したがって、$\dot{I} = 0, \dot{\theta} = -1$ となり、$I(t)$ は定数で $I(t) \equiv I(0)$。また、$\dot{\theta} = -1$ から $\theta(t) = -t + \theta(0)$. ゆえに

$$I(t) = I(0), \quad \theta(t) = -t + \theta(0)$$

というように、“解けた”ことになる。

第3章　Euler 方程式

3.1　完全流体の数学的記述方法

完全流体とは、密度が一定で粘性は無視できる流体のことである。

完全流体の運動は、3 次元空間内の領域 Ω の各点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ および各時刻での速度ベクトル $\mathbf{v}(t,x)$=$(v_1(t,x)$,$v_2(t,x)$,$v_3(t,x))$ と圧力 $p(t,x)$ だけで決定される。3 次元ベクトル $\mathbf{v}$ とスカラー p は、次の偏微分方程式を解くことによって決定される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3.2}$$

ここで、f_i は流体に直接作用する力 (外力と呼ばれる) を表す。ρ は質量密度を表す。密度一定と仮定したから ρ は正の定数である。p/ρ を改めて p と書くことにすれば $\rho = 1$ としてさしつかえないので、以下そうすることにする。(3.1) の 3 個の方程式の組を **Euler** の運動方程式 と呼び、(3.2) の方程式を 非圧縮性条件と呼ぶ。単に **Euler** 方程式 と言うときは、運動方程式と非圧縮性条件を連立させたものを言うことにする。運動方程式はベクトルの形で

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

とも表す。ここで、$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ である。ベクトル形での非圧縮性条件は

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$$

と表せる。

(3.1), (3.2) の連立方程式を解くためには、次の初期条件および境界条件が必要となる。

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$\mathbf{v}(t, x) \cdot \mathbf{n} = g(t, x) \quad (x \in \partial\Omega, 0 \leqq t).$$

ここで、$\partial\Omega$ は領域の境界を表し、$\mathbf{n}$ は境界における外向き単位法線ベクトルを表す。

しばしば我々は、2 次元的な流れを取り扱えば十分な場合に出会う。2 次元流とは、速度が、$\mathbf{v}$=$(v_1(t, x_1, x_2), v_2(t, x_1, x_2), 0)$ と表せるような流れのことである。この場合、$x = x_1$, $y = x_2$

と変数を書き表し、速度の成分も、$u = v_1$, $v = v_2$ と表すことにする。 2 次元 Euler 方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_1, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_2, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3.5}$$

2 次元流の問題は、 3 個の未知関数 u, v, p に対するこれら 3 個の方程式を初期値境界値条件のもとで解くことである。ところで、 3 次元の場合と違い、 2 次元の場合は、流れ関数と呼ばれるスカラー関数だけで運動を記述することができる。流れ関数による方程式の書き換えは便利なことが多い。

まず、流れ関数を定義する。非圧縮性条件 (3.5) から、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{3.6}$$

を満たす 1 価スカラー関数 ψ が、領域の各点の単連結な近傍で存在する。ψ を流れ関数と呼ぶ。Ω 自身が単連結ならば、ψ は Ω 上の 1 価関数としてとれる。Ω が単連結でなくとも、 1 価関数としてとれる場合がある。実際、 1 価関数になるための必要十分条件は、領域内の任意の閉曲線 C に対し

$$\int_C \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \int_C udy - vdx$$

が 0 となることである。Ω 上の 1 価な、(3.6) を満たす 2 回連続的微分可能な関数 ψ が存在する場合には、非圧縮性条件は (3.6) によって自動的に満たされる。

次に Euler の運動方程式を ψ だけで表すことができることを示す。$(3,3)$, $(3,4)$ をそれぞれ y, x で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{3.8}$$

となり、$(3.7) - (3.8)$ を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi - J(\psi, \triangle\psi) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{3.9}$$

となる。ここで、$J(,)$ は下のように定義され、$\triangle$ は Laplace 作用素である；

$$J(f,g)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x},\quad \triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

したがって、2 次元流の解析には ψ に対する非線形偏微分方程式 (3.9) が解ければよい。境界条件が $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ のとき、これは ψ の接線微分が 0 になると言い換えることができる。したがって、流れ関数は境界をなす各閉曲線の上で定数である。

3.2 解の存在 · 非存在

Euler 方程式に解があるかどうか考える。

物理系を記述する発展方程式 (時間を含む微分方程式) は、初期条件と境界条件を適切に与えれば、解が一つに定まり、かつそれが初期条件に連続的に依存する、というのが望ましい。これが保証されているときに、その発展方程式は 適切 (well-posed) であるという。微分方程式が導かれたからといって、必ずしも適切であるとは限らない。物理現象から微分方程式を導くことと、その適切性とは別物であることを認識することは、大変重要なことである。

そこで、Euler 方程式の適切性について現在わかっていることを述べると、次のようになる。

- 2 次元の場合、初期値 · 境界値が適当に与えられたら、解は $(t,x)\in[0,\infty)\times\Omega$ で存在して一意である (適切性は証明されている)。
- 3 次元の場合、初期値 · 境界値が適当に与えられたら、ある時刻 $T>0$ が存在して、解は $(t,x)\in[0,T)\times\Omega$ で存在する (適切性は有限時間でのみ証明されている)。
- 3 次元の場合、解が有限時間で爆発するかどうかは現在わかっていない。

そこで、以下では、有限時間で爆発する解については考えないことにする。すなわち何らかの意味で適切性がいえるもののみについて考察する。

3.3 渦度

速度ベクトル場 $\mathbf{v}$ に curl を施したベクトル場を 渦度 (vorticity) と呼ぶ :

$$\omega\equiv\text{curl}\,\mathbf{v}.$$

2 次元流の場合は、速度が $\mathbf{v}(t,x,y)=(u(t,x,y),v(t,x,y),0)$ なので、

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &= \left(0,0,\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

となる。よって、2 次元流の場合、渦度は

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

で与えられるスカラーであると見なすことにする。2 次元渦度と流れ関数には次の関係が成立する。

$$-\triangle\psi = \omega.$$

これは **Poisson 方程式** と呼ばれている。導き方を示すと、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= -\triangle\psi.\end{aligned}$$

これにより、ψ の境界上での値 (定数) がわかれば、ω から ψ を決定することができる。外力がないとき方程式 (3.9) は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \tag{3.10}$$

と書くこともできる。この方程式を 2 次元渦度方程式と呼ぶ。導き方を示すと、(3.9) の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi - J(\psi, \triangle\psi) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{3.11}$$

に $\omega = -\triangle\psi$,$\mathbf{f} \equiv 0$ を適用すると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

となる。したがって、(3.11) は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

と表せる。これにより次の定理を得る。

定理 2 (2 次元におけるエンストロフィー保存則) 2 次元流で外力がなく、境界条件が $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ もしくは周期境界条件のとき、

$$\int_\Omega |\omega(t,x)|^2 dx \tag{3.12}$$

は時間に依らない。

[証明] (3.12) を 1 回微分した式が 0 であることを示せばよい。

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega |\omega(t,x,y)|^2\, dxdy = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}|\omega(t,x,y)|^2\, dxdy = \iint_\Omega 2\omega_t\omega\, dxdy$$

$$= \iint_\Omega (-u\omega_x - v\omega_y)\omega\, dxdy = -\iint_\Omega (\omega u\omega_x + \omega v\omega_y)\, dxdy.$$

部分積分によって、

$$\iint_\Omega \omega u \frac{\partial \omega}{\partial x}\, dxdy = -\iint_\Omega (\omega u)_x \omega\, dxdy = -\iint_\Omega (\omega_x u\omega + \omega^2 u_x)\, dxdy,$$

$$\iint_\Omega \omega v \frac{\partial \omega}{\partial y}\, dxdy = -\iint_\Omega (\omega v)_y \omega\, dxdy = -\iint_\Omega (\omega_y v\omega + \omega^2 v_y)\, dxdy$$

であるから、

$$\iint_\Omega (\omega u\omega_x + \omega v\omega_y)\, dxdy = -\iint_\Omega \big(\omega(u\omega_x + v\omega_y) + \omega^2(u_x + v_y)\big)\, dxdy.$$

ゆえに

$$\iint_\Omega (\omega u\omega_x + \omega v\omega_y)\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_\Omega \omega^2(u_x + v_y)\, dxdy = 0.$$

ただし非圧縮性の条件 $u_x + v_y = 0$ を用いた。

ゆえに

$$\frac{d}{dt}\iint_\Omega |\omega(t,x,y)|^2\, dxdy = 0.$$

したがって、(3.12) は時間に依らない。

3.4 Euler 方程式の解

Euler 方程式の代表的な解を考察し、その性質を調べる。Euler 方程式の解のうちもっとも簡単なものは渦なしの解である。これは、領域 Ω で $\omega \equiv 0$ を満たす解のことである。今、Ω で調和であり、境界上で Neumann 境界条件を満たす 2 回微分可能なスカラー関数 U が存在するものとする。すなわち、

$$\Omega \text{ で } \quad \triangle U = 0, \quad \partial\Omega \text{ で } \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot \operatorname{grad} U = g. \tag{3.13}$$

U は時間 t にパラメーター的に依存してもよい。このとき、次の定理が成立する。

定理 3 (3.13) を満たす U があるときに、$\mathbf{v} = \operatorname{grad} U = \nabla U$ とおくと、あるスカラー関数 p が存在して、$(\mathbf{v}, p)$ が Euler 方程式の解になる。すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = g. \end{cases}$$

この解の渦度は恒等的に 0 である。

[証明]　非圧縮性条件は U が調和関数であることから導かれる。

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \triangle U = 0.$$

渦度が 0 になることも明らかである。

$$\omega = \mathrm{curl}\ \mathbf{v} = \mathrm{curl}\ \mathrm{grad}\ U = 0.$$

次に Euler の運動方程式が成り立つように圧力 p を求める。今、外力を 0, 質量密度を 1 としているので、 Euler の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot \mathrm{grad})\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\ p$$

となる。$q = |\mathbf{v}|$ とおくと、ベクトル解析の公式と $\mathrm{curl}\ \mathbf{v} = 0$ から

$$(\mathbf{v}\cdot \mathrm{grad})\mathbf{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}q^2\right) - \mathbf{v}\times \mathrm{curl}\ \mathbf{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}q^2\right)$$

であるから

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\ p - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}q^2\right).$$

ゆえに

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p + \frac{1}{2}q^2\right) = 0.$$

これは

$$p = -\frac{1}{2}q^2 - \frac{\partial U}{\partial t},$$

つまり

$$p = -\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right|^2\right) - \frac{\partial U}{\partial t}$$

とおけば満たされる。この等式を **Bernoulli** の等式と呼ぶ。

この定理は Neumann 境界条件を満たす調和関数に対応して Euler 方程式の解があることを示している。この解を渦なしの流れと呼ぶ。

例 **9** (球を過ぎる渦なしの流れ) この例では、Ω は原点を中心とする半径 a の 球面の外側の領域であるとする。すなわち、$\Omega = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3; a^2 \le x^2+y^2+z^2\}$ となる。このとき

$$U(x,y,z) = cx\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)$$

で定義される U は上の定理の条件 (3.13) を満たす。ここで、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり、c は定数である。$r\to\infty$ で、流れは一様な流れ $\mathbf{v} = (c,0,0)$ に近つく。まず、U が $\triangle U = 0$ を満たしているかどうか確認する。

$$\begin{aligned}
\triangle U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
&= -\frac{9a^3cx}{2r^5} + \frac{15a^3cx^3}{2r^7} + -\frac{3a^3cx}{2r^5} + \frac{15a^3cxy^2}{2r^7} + -\frac{3a^3cx}{2r^5} + \frac{15a^3cxz^2}{2r^7} \\
&= -\frac{15a^3cx}{2r^5} + \frac{15a^3cx}{2r^7}(x^2+y^2+z^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

次に、球面上で $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ となっていることを確かめる。

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} &= \frac{x}{a}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{y}{a}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{z}{a}\frac{\partial U}{\partial z}\\ &= \frac{x}{a}\left(c+\frac{a^3c}{2r^5}-\frac{3a^3cx^2}{2r^5}\right)+\frac{y}{a}\left(-\frac{3a^3cxy}{2r^5}\right)+\frac{z}{a}\left(-\frac{3a^3cxz}{2r^5}\right)\\ &= \frac{3cx}{2a}-\frac{3cx}{2a^3}(x^2+y^2+z^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

3.5 流線および粒子の軌道

定常解を可視化するために最も適当な方法は流線を描くことである。

定義 6 (流線) 流線 (stream line) とは、流れの領域の中の曲線で、その各点における接線ベクトルの方向と、その点における流れの速度ベクトルの方向が一致するものをいう。式で書けば、曲線 $s\mapsto\mathbf{x}(s)$ で、

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x}(s))$$

を満たすものを時刻 t における流線と呼ぶ。流線は時刻 t を指定して初めて確定する概念であることに注意するべきである。各時刻ごとに流線が描かれるわけである。

定義 7 (粒子の軌道) 曲線 $t\mapsto\mathbf{x}(t)$ で、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(t,\mathbf{x}(t))$$

を満たすものを粒子の軌道と呼ぶ。

定義 8 ある範囲の時刻 $0\leqq t\leqq T$ にわたって、空間内のある固定された点から粒子が連続的に排出されたときに、時刻 $t=T$ で粒子たちの描く曲線を流脈線と呼ぶ。時刻 $t=s$ で点 z を出発する粒子の軌道を $t\mapsto\mathbf{x}(t;s,z)$ と表すと、

$$[0,T]\ni s\mapsto\mathbf{x}(T;s,z)$$

が流脈線である。

3.6 Euler 方程式の弱解

弱解の定義を与える前に、いくつかの事実に注意する。
まず、$T>0$ とし、$[0,T]\times\bar{\Omega}$ 上の連続関数 U が与えられているとする。このとき、

$$\int_0^T\int_\Omega U(t,x)V(t,x)dxdy=0$$

がすべての $V\in C^1([0,T]\times\bar{\Omega})$ について成立することと、$U\equiv 0$ とは同値である。

したがって、$\partial v/\partial t + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - f \equiv 0$ と言うかわりに、「この式の左辺と任意のベクトル値関数との内積をとって積分すると 0 になる」と言っても同じことになる。

もう少し厳密に述べるために次のベクトル値関数の集合 X を定義する：

$$X = \{\phi \in C^1\left([0,T]\times\bar{\Omega}\right); \mathrm{div}\ \phi \equiv 0, \text{境界上で } \phi\cdot\mathbf{n} = 0\}.$$

ここでは、領域 Ω は有界領域であると仮定しておく。Ω 上で定義された Euler 方程式の解 $(\mathbf{v}, p)$ が与えられており、境界条件 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ が満たされているものと仮定する。このとき、任意の $\phi \in X$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T dt \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \mathbf{f}\right)\cdot\phi\, dx \\ &= \int_\Omega \mathbf{v}(T,x)\phi(T,x)\,dx - \int_\Omega \mathbf{v}(0,x)\phi(0,x)\,dx - \int_0^T dt\int_\Omega \mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dx \\ &\quad - \int_0^T dt\int_\Omega \big((\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi\big)\cdot\mathbf{v}\,dx - \int_0^T dt\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\phi\,dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

が成立する。この等式を次のように書き直す。まず、Ω 上の関数 $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ に対し、

$$(f,g) = \int_\Omega \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)dx$$

で $(,)$ を定義し、f と g の内積と呼ぶ。t を固定したときの x の関数 $\mathbf{v}(t,\cdot)$ を $\mathbf{v}(t)$ と表したとき

$$\big(\mathbf{v}(T),\phi(T)\big) - \big(\mathbf{v}(0),\phi(0)\big) - \int_0^T \left(\mathbf{v}(t), \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)dt - \int_0^T \big((\mathbf{v}(t)\cdot\nabla)\phi(t), \mathbf{v}(t)\big)dt - \int_0^T \big(\mathbf{f}(t),\phi(t)\big)dt = 0. \tag{3.15}$$

この等式は $\mathbf{v}$ が 1 回微分可能な Euler 方程式の解である限り成立せねばならない必要条件である。そこで、次のような定義をする。

定義 9 あるベクトル値関数 $\mathbf{v}(t,x)$ が

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega |\mathbf{v}(t,x)|^2 dx < \infty$$

を満たし、$t \mapsto (\mathbf{v}(t),\phi)$ がすべての $\phi \in X$ に対して t の連続関数になり、かつ (3.15) がすべての $\phi \in X$ について成立するとき $\mathbf{v}$ を Euler 方程式の弱解(weak solution) と呼ぶ。また、関数空間 X は台が有界なものの集合に制限する。

定義 10 あるベクトル値関数 $\mathbf{v}(x)$ が領域 Ω で局所 2 乗可積分であり、

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega v_i \frac{\partial\phi_j}{\partial x_i} v_j\,dx + \sum_{k=1}^3 \int_\Omega v_k f_k\,dx = 0$$

がすべての $\phi \in C^\infty_{0,\sigma}$ について成立するとき $\mathbf{v}$ を Euler 方程式の定常弱解と呼ぶ。ここで、$C^\infty_{0,\sigma}$ は次の 3 条件を満たすベクトル値関数 ϕ の全体である：(i) ϕ は無限回微分可能、(ii) Ω で恒等的に $\mathrm{div}\ \phi = 0$ 、(iii) 境界 $\partial\Omega$ の近くで恒等的に $\phi = 0$.

最後に、古典解ではない弱解の例をあげる。

例 **10** (**2** 次元円形渦) $\omega_0 \in \mathbf{R}$, 流れ関数 ψ を次式で定義する。

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\omega_0}{4} r^2 & (r < a) \\ -\dfrac{\omega_0}{2} a^2 \log \dfrac{r}{a} - \dfrac{\omega_0}{4} a^2 & (r > a) \end{cases}$$

ここで、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ である。

$$(u,v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \begin{cases} \left(-\dfrac{\omega_0}{2} y, \dfrac{\omega_0}{2} x \right) & (r < a) \\ \left(-\dfrac{\omega_0}{2} a^2 \dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{\omega_0}{2} a^2 \dfrac{x}{x^2+y^2} \right) & (r > a) \end{cases}$$

であることから、速度ベクトルは

$$v_r = 0,$$
$$v_\theta = \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{2} r & (r < a) \\ \dfrac{\omega_0}{2} \dfrac{a^2}{r} & (r > a). \end{cases}$$

これより、速度ベクトルは $r = a$ で連続であるが微分可能でないことがわかる。圧力は

$$\begin{cases} u u_x + v u_y = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ u v_x + v v_y = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

より、

$$(p_x, p_y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\omega_0^2}{4} x, \dfrac{\omega_0^2}{4} y \right) & (r < a) \\ \left(\dfrac{a^4 \omega_2}{4(x^2+y^2)^2} x, \dfrac{a^4 \omega_2}{4(x^2+y^2)^2} y \right) & (r > a) \end{cases}$$

ゆえに

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0^2}{8} r^2 & (r < a) \\ -\dfrac{a^4 \omega_0^2}{8} \dfrac{1}{x^2+y^2} + \mathrm{const} = -\dfrac{\omega_0^2}{8} \dfrac{a^4}{r^2} + \dfrac{\omega_0^2}{4} a^2 & (r > a) \end{cases}$$

は条件を満たす。上の定数 const は $r = a$ で p が連続となるように決めた。

2 次元なので渦度は

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

より、

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{2} + \dfrac{\omega_0}{2} = \omega_0 & (r < a) \\ \dfrac{\omega_0}{2} a^2 \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{\omega_0}{2} a^2 \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 & (r > a). \end{cases}$$

よって、この例では円の内側に一様な渦が分布しているので、円形渦と呼ばれている。

第4章　渦糸の力学系

4.1　渦糸とは

渦糸とは3次元空間内のある曲線上に渦度が集中していて, その外側では渦度 $\omega = 0$ となるEuler方程式の解のことである.

しかし, 実際の考察上, 今までの弱解の定義では無理が生じるので, 若干, 定義を改める必要がある.

ここで,1本のまっすぐな z 軸上にある, 強さ $\Gamma = 1$ の渦糸を考える.

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

これは $\Omega = \{(x,y,z)|(x,y) \neq (0,0)\}$ でEuler方程式を満たす. また $x^2+y^2 > 0$ で渦なしである.

$\Rightarrow$ ところが, z 軸上の1点でも含むような領域では, v は2乗可積分ではない. したがって, 弱解の定義の中にある,

$$\int_{\mathbf{R}^3} v_i v_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx$$

が意味を持たない.

そのため,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon^2 \leq x^2+y^2} v_i v_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx$$

といったように, 定義しなおす必要がある.

ある一つの平面に垂直な複数の渦糸がある場合は, その平面に垂直な方向に関しての運動は一様なので, その切り口の平面のみを考えればよい. このときの切り口平面上の点を 渦点 (**point vortex**) と呼ぶ.

平面内に N 個の渦糸が分布しているとき, その渦度は, 各渦点 (x_k, y_k) の位置に集中したデルタ関数の線型結合になる. このときの係数 Γ_k は, それぞれの 渦の強さ を表す.

$$\omega(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \delta(x - x_k, y - y_k)$$

ここで, その考える二次元平面を, 複素数平面とみなすこととする.

複素数平面上に N 個の渦点がある場合,

$$\begin{aligned} \text{ある時刻での渦点の位置} &: z_1(t), z_2(t), \cdots, z_N(t) \\ \text{渦の強さ} &: \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N \end{aligned}$$

渦度: $$\omega(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \delta(x+iy-z_k(t))$$

流れ関数: $$\psi(t,x,y) = \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \log|x+iy-z_j(t)|$$

というようにそれぞれを表すと,

速度ベクトル場: $$u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y-y_j(t)}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2}$$

$$v(t,x,y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x-x_j(t)}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2}$$

とそれぞれの式で与えられる.

$\Rightarrow$ 速度ベクトル場は, 流れ関数 ψ をそれぞれ x, y で偏微分することによって v, u が得られる.

$\because$

$$\begin{aligned}
\psi(t,x,y) &= \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \log|x+iy-z_j(t)| \\
&= \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{2} \log\{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2\}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{2(x-x_j(t))}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x-x_j(t)}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2} \\
&= v
\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{2(y-y_j(t))}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2} \\
&= \sum_{j=1}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y-y_j(t)}{(x-x_j(t))^2+(y-y_j(t))^2} \\
&= u.
\end{aligned}$$

また, $v_x - u_y = \omega$ となることの確認は省略する (以下ではこのことは使用しない).

4.2 渦糸系

この場合の Euler 方程式は, 偏微分方程式から常微分方程式に帰着できる。

(i) ω が N 個の渦点で表されているとき, ある時刻で満たされれば, 全ての時刻で満たされる (Kelvin's theorem による).

(ii) また渦点の強さは, 時間に依らない定数である.

したがって

$$\text{渦点の位置：}\quad z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t) \quad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

さえ定まればよい.

N が十分大きければ, $z_j(t)$ のなす渦糸系 (常微分方程式) は, Euler 方程式の良い近似となることが期待できる.

渦糸系の形 $\Rightarrow$ ところが速度ベクトル場の式は, 運動速度が $x + iy = z_j(t)$ で, 無限大になってしまうので, $j \neq k$ としてその部分を除いた形,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_k}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y - y_j(t)}{(x - x_j(t))^2 + (y - y_j(t))^2} \\
\frac{dy_k}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x - x_j(t)}{(x - x_j(t))^2 + (y - y_j(t))^2}
\end{aligned}$$

としたものを, 渦糸系 の式とする.

さらに,f が連続ならば, 全ての点 (x, y) において,

$$f(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \leq \epsilon^2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

となっている.

$\Rightarrow$ これは, 速度場が連続ならば, ある点における速度は, その点の周りの速度の平均であると解釈している.

この原理を, 連続でない速度ベクトル場の式にも適用し 積分の意味を Cauchy の主値であると解釈すれば, 速度ベクトル場の式から渦糸系の式が従う.

4.3 運動方程式 (複素表示)

運動方程式は複素表示では,

$$\dot{z}_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m \neq n} \frac{\Gamma_m}{\overline{z_n(t)} - \overline{z_m(t)}} \quad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

となる.

ここで,

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m \neq n} \Gamma_n \Gamma_m \log |z_n - z_m|$$

とおくと,

$$\Gamma_n \frac{d\overline{z}_n}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_n} \quad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

と書ける.

さらに, これを実部・虚部で分けると,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re} : \Gamma_n \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n} \\ &\mathrm{Im} : \Gamma_n \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots, N;\ N\text{: 自由度})$$

(Hamilton 系) と書き表すことができる.

ところで, この運動方程式は, 流体が全平面を占めているとしてのものである. この流体が, 境界を持つ部分領域 Ω の中にあって, N 個の渦点も Ω の中にある場合, Ω における調和関数の Dirichlet 問題に対する Green 関数 $G(x, x')$ を考える。ここで Green 関数とは

$$-\Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad G(x, x')|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

を満たす関数のことである。このとき,

$$F(x, x') = G(x, x') + \frac{1}{2\pi} \log |x - x'|$$

と定義すると, F は $\Omega \times \Omega$ で連続 ($x = x'$ でも連続) となる。

このとき流れ関数は

$$\psi(t, x, y) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j G(z, z_j(t)), \quad z = x + iy$$

で与えられる (証明略)。したがって渦点の運動方程式 (Ω 内) は,

$$\overline{\dot{z}_n(t)} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \sum_{m \neq n} \frac{\Gamma_m}{z_n(t) - z_m(t)} + \sum_{j=1}^{N} 2i\Gamma_j \frac{\partial F(z_n, z_j)}{\partial z_j} \qquad (n = 1, 2, \cdots, N)$$

となり, そのときのハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m \neq n} \Gamma_n \Gamma_m G(z_n, z_m) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^2 F(z_k, z_k)$$

と置ける.

4.4 渦糸の性質

定理 4 (重心保存則)

$$\sum_{n=1}^{N} \Gamma_n z_n \text{は時間に依存しない.}$$

[証明]

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n z_n(t)=0$ となればよい.

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n z_n(t)=\Gamma_1\dot{z}_1(t)+\Gamma_2\dot{z}_2(t)+\cdots+\Gamma_N\dot{z}_N(t)$$

$$\dot{z}_n(t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{m\neq n}\frac{\Gamma_m}{\overline{z_n(t)}-\overline{z_m(t)}}\quad(1,2,\cdots,N)$$

したがって,

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n z_n(t)=\sum_{\substack{m\neq n\\ 1\leqq m,n\leqq N}}-\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_m\Gamma_n}{\overline{z_n(t)}-\overline{z_m(t)}}\quad(1,2,\cdots,N)$$

なので,

$$a_{mn}\equiv-\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_m\Gamma_n}{\overline{z_n(t)}-\overline{z_m(t)}}$$

とおくと,

$$a_{mn}=-a_{nm}\quad(m\neq n).$$

よって,

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n z_n(t)=\sum_{\substack{m\neq n\\ 1\leqq m,n\leqq N}}a_{mn}=\sum_{m<n}a_{mn}+\sum_{m>n}a_{nm}=\sum_{m<n}a_{mn}-\sum_{m<n}a_{mn}=0.$$

定理 5

$$\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n|z_n(t)|^2\text{は時間に依存しない.}$$

[証明]

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n|z_n(t)|^2=0$ となればよい.

$$\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n z_n\frac{d\overline{z_n}}{dt}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m\neq n}\frac{\Gamma_n\Gamma_m z_n}{z_n-z_m}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m\neq n}\Gamma_n\Gamma_m\left(\frac{z_n}{z_n-z_m}+\frac{z_m}{z_m-z_n}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m\neq n}\Gamma_n\Gamma_m$$

となり両辺の実部を取ればよい.

4.5　個数が少ない場合の渦糸系の運動

4.5.1　2 個の渦糸

不変量を使うと, $N = 2$ の場合が解ける.

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{z_1}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{z_1 - z_2}\\ \frac{d\overline{z_2}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_1}{z_2 - z_1}\end{aligned}$$

を解く.

$(1)\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ の場合

重心の保存則から,

$$\Gamma_1 z_1(t) + \Gamma_2 z_2(t) = \Gamma_1(z_1(t) - z_2(t))$$

が一定なので,

$$z_1(t) - z_2(t) = C(\text{定数})$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{z_1}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{C},\\ \frac{d\overline{z_2}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{-\Gamma_2}{-C} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{C}.\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d\overline{z_1}}{dt} = \frac{d\overline{z_2}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma_2}{C}(\text{定数})$$

となる.

従って z_1, z_2 は等速直線運動をする. しかも, その速度は $z_1 - z_2$ に垂直な方向を向いている.

実際、

$$\text{速度} = \frac{dz_1}{dt} = \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{z_1 - z_2}\right)} = \frac{i}{2\pi}\frac{\Gamma_2}{\overline{z_1 - z_2}} = i\cdot\frac{\Gamma_2}{2\pi|z_1 - z_2|^2}(z_1 - z_2)$$

であり、i をかけることで偏角が 90° 増えることから、速度が $z_1 - z_2$ と垂直であることがわかる。

$(2)\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ の場合

重心の保存則から,$\Gamma_1 z_1(t) + \Gamma_2 z_2(t) = C$ (定数) である,

このとき,

$$\begin{aligned}\xi(t) &= z_1(t) - \frac{C}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\\ \eta(t) &= z_2(t) - \frac{C}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\Gamma_1\xi(t)+\Gamma_2\eta(t) &= \Gamma_1\cdot\left(z_1(t)-\frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)+\Gamma_2\cdot\left(z_2(t)-\frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)\\ &= (\Gamma_1 z_1(t)+\Gamma_2 z_2(t))-\left(\frac{C\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}+\frac{C\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)\\ &= C-C\\ &= 0.\end{aligned}$$

よって,

$$\eta(t)=-\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\xi(t)$$

が成立する.

ここで,

$$\begin{aligned}z_1(t)-z_2(t) &= \left(\xi(t)+\frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)-\left(\eta(t)+\frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)\\ &= \xi(t)-\eta(t)\end{aligned}$$

ということを用いると,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}}{dt} &= \frac{d}{dt}\overline{\left(z_1(t)-\frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right)}\\ &= \frac{d}{dt}\overline{z_1(t)}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{z_1-z_2}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_2}{\xi-\eta}\\ &= \frac{\Gamma_2^2}{2\pi i(\Gamma_1+\Gamma_2)}\frac{1}{\xi}\end{aligned}$$

ここで,

$$A = \frac{\Gamma_2^2}{2\pi(\Gamma_1+\Gamma_2)}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\xi}}{dt} &= \frac{\Gamma_2^2}{2\pi i(\Gamma_1+\Gamma_2)}\frac{1}{\xi}\\ &= \frac{A}{i}\cdot\frac{1}{\xi}\\ &= -Ai\frac{1}{\xi}\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d\xi}{dt} = Ai\frac{1}{\overline{\xi}}.$$

これから

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}\cdot\overline{\xi} &= Ai\frac{1}{\overline{\xi}}\cdot\overline{\xi}\\ &= Ai.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\xi(t)|^2 &= \frac{d}{dt}(\xi\cdot\overline{\xi})\\ &= \frac{d\xi}{dt}\cdot\overline{\xi}+\xi\cdot\frac{d\overline{\xi}}{dt}\\ &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{d\xi}{dt}\cdot\overline{\xi}\right)\\ &= 2\mathrm{Re}(Ai)\\ &= 0 \quad (\text{純虚数の実部だから}).\end{aligned}$$

ゆえに, $|\xi|^2$ は定数なので,

$$\xi = r_0 e^{i\theta(t)}, \quad r_0 = |\xi(0)|$$

とおける.

ここで, この式を t で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= r_0\frac{d}{dt}e^{i\theta(t)}\\ &= r_0 i\theta'(t)e^{i\theta(t)}.\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}Ai\frac{1}{\overline{\xi}} &= Ai\frac{1}{r_0 e^{-i\theta(t)}}\\ &= \frac{Ai}{r_0}e^{i\theta(t)}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{Ai}{r_0}e^{i\theta(t)} = r_0 i\theta'(t)e^{i\theta(t)}$$

より

$$\theta'(t) = \frac{A}{r_0^2}.$$

これはすぐに積分できて

$$\theta(t) = \frac{A}{r_0^2}t+\theta_0 \quad (\theta_0 = \theta(0)).$$

ゆえに

$$\xi(t) \quad = \quad r_0 e^{i(At/r_0^2+\theta_0)}.$$

ここで,

$$\sigma_0 = \frac{A}{r_0^2}$$

とおく.

これより, ある定数 r_0, σ_0, θ_0 が存在して.

$$\xi(t) = r_0 \exp(i(\sigma_0 t + \theta_0))$$

と書けることが分かった.

したがって,

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2} + r_0 e^{i(\sigma_0 t+\theta_0)} \\ z_2(t) &= \frac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2} - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} r_0 e^{i(\sigma_0 t+\theta_0)} \end{aligned}$$

となり, $z_1(t), z_2(t)$ は 点 $\dfrac{C}{\Gamma_1+\Gamma_2}$ を中心とする同心円上を, 互いに正反対の向きに, 一定の角速度で回っている.

4.5.2 3 個の渦糸

3 個の渦点があったとき, これらを支配する運動方程式は, 強さを各々 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{z_1}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_2}{z_1-z_2} + \frac{\Gamma_3}{z_1-z_3}\right), \\ \frac{d\overline{z_2}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_1}{z_2-z_1} + \frac{\Gamma_3}{z_2-z_3}\right), \\ \frac{d\overline{z_3}}{dt} &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_1}{z_3-z_1} + \frac{\Gamma_2}{z_3-z_2}\right) \end{aligned}$$

となるが, この場合には有限時間爆発もありうる.

例 **11** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 4\pi, \Gamma_3 = -2\pi$ のときを考える.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 + \sqrt{3}e^{i\theta}, \\ \lambda_2 &= -3 + \sqrt{3}e^{i\theta}, \\ \lambda_3 &= 4\sqrt{3}e^{i\theta} \end{aligned}$$

とおく ($0 < \theta < \pi/2$: θ は実数). このとき, 初期値 $z_j(0) = \lambda_j (j = 1, 2, 3)$ から出発すれば, 解は有限時間しか存在しない (岡本 [1] 参照).

上の例では

$$\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2}+\frac{1}{\Gamma_3}=0$$

となっているが、そうでない場合には次の定理が成り立つ。

定理 **6** 3 個の渦点の強さ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ が,

$$\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2}+\frac{1}{\Gamma_3}\neq 0$$

を満たすとき, どのような初期値に対しても, $-\infty < t < +\infty$ で連続微分可能な解が存在する (解は爆発しない).

証明はいささか細かいので省略する.

$\Rightarrow$ [非線形力学 (岡本 [1])] によると, この問題は J.L.Synge によって解かれている (詳しくは J.L.Synge, Canadian J.Math,1(1949) 参照). 渦糸の力学系は 2 次元力学系に帰着できる. 特にカオス的な軌道は存在しない.

4.5.3 4 個以上の渦糸

一般にはカオス的な振る舞いをする (詳しくは H.Aref and N.Pomphrey, Proc. R. Soc Lond. A.380 (1982), 359–387, S.L.Ziglin, Soviet Math. Dokl., 21 (1980), 296–299, H. Aref et al., Fluid Dynamics Research, 3 (1988), 63–74. 参照).

4.6 数値実験

ここに, Java による渦糸系の力学のソース・プログラム (作:田代航平君) といくつかの実行結果を載せておく. プログラムは 2003 年 3 月現在

http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html

から入手可能である。

```
// vortex2.java --- 渦糸系の力学系のシミュレーション
// (c)kou
// 2003.02.11 完成
// <applet code="vortex2.class" width=600 height=600></applet>
// modified by mk (2003/3/19) Runge-Kutta 法を使うように変更

import java.applet.*;
import java.awt.*;
import java.awt.event.*;

final public class vortex2 extends Applet implements Runnable, ActionListener {

  private Image off;        // オフスクリーン
  private Graphics grf;     // オフスクリーンのグラフィックス

  private Thread th = null; // スレッド
```

```
private Dimension d;      // アプレットのサイズ
private Dimension imgD;   // オフスクリーンのサイズ

private double dt = 0.2;  // 時刻の増分（刻み幅）
private int N = 5;        // 渦糸の個数
private int MaxN = 12;
private double scale = 20;// 拡大率
private int sleepTime=10; // スレッドの待ち時間
private double[] Gamma;   // 渦の強さ（ガンマ）
private double[] Z;       // 渦糸の位置（k 番目の渦の位置は（Z[2*k],Z[2*k+1]））
private double [] Z2, f, k1, k2, k3, k4; // Runge-Kutta 法の計算用変数

private String[] btString = {"Start", "End"}; // ボタンの名前
private Button[] bt; // ボタン

private String[] laString1={"dt","N","scale","sleepTime"}; // ラベルの名前
private String[] laString2={"k","Γ ","X","Y"};             // ラベルの名前

private Label[] la1, la2, la3; // ラベル
private TextField[] tf1;       // ラベルに対するテキストフィールド

private TextField[] tfGamma;   //Γ の値のテキストフィールド
private TextField[] tfX;       // 渦糸の初期位置の x 座標のテキストフィールド
private TextField[] tfY;       // 渦糸の初期位置の y 座標のテキストフィールド

private Color[] color1;        // 色合いの薄い色（未使用！）
private Color[] color2;        // 色合いが中くらいの色

public void init() {
  int i; // カウンタ

  setBackground(Color.white);//背景色の設定

  d=getSize();//アプレットのサイズの取得
  imgD=new Dimension(d.width-200,d.height);//オフスクリーンの色の設定

  // 色の作成
  color1 = new Color[MaxN];
  color2 = new Color[MaxN];
  for (i = 0; i < MaxN;i++) {
    float a = i / (float)MaxN;
    color1[i]=Color.getHSBColor(a, 0.2f, 1.0f);
    color2[i]=Color.getHSBColor(a, 0.5f, 1.0f);
  }
   // オフスクリーンの準備
  off = createImage(imgD.width,imgD.height); // オフスクリーンの作成
  grf = off.getGraphics();                   // グラフィックスの取得
  // オフスクリーンのクリア
  grf.setColor(Color.black);                 // 背景色の設定
  grf.fillRect(0,0,imgD.width,imgD.height);  // 塗りつぶす
  // オフスクリーンに座標軸を描く
  grf.setColor(Color.gray);                  // 軸の色の設定
  grf.drawLine(0,imgD.height/2,imgD.width,imgD.height/2); // x 軸
  grf.drawLine(imgD.width/2,0,imgD.width/2,imgD.height);  // y 軸

  // レイアウトマネージャを使わない（自分で設定する））
  setLayout(null);
```

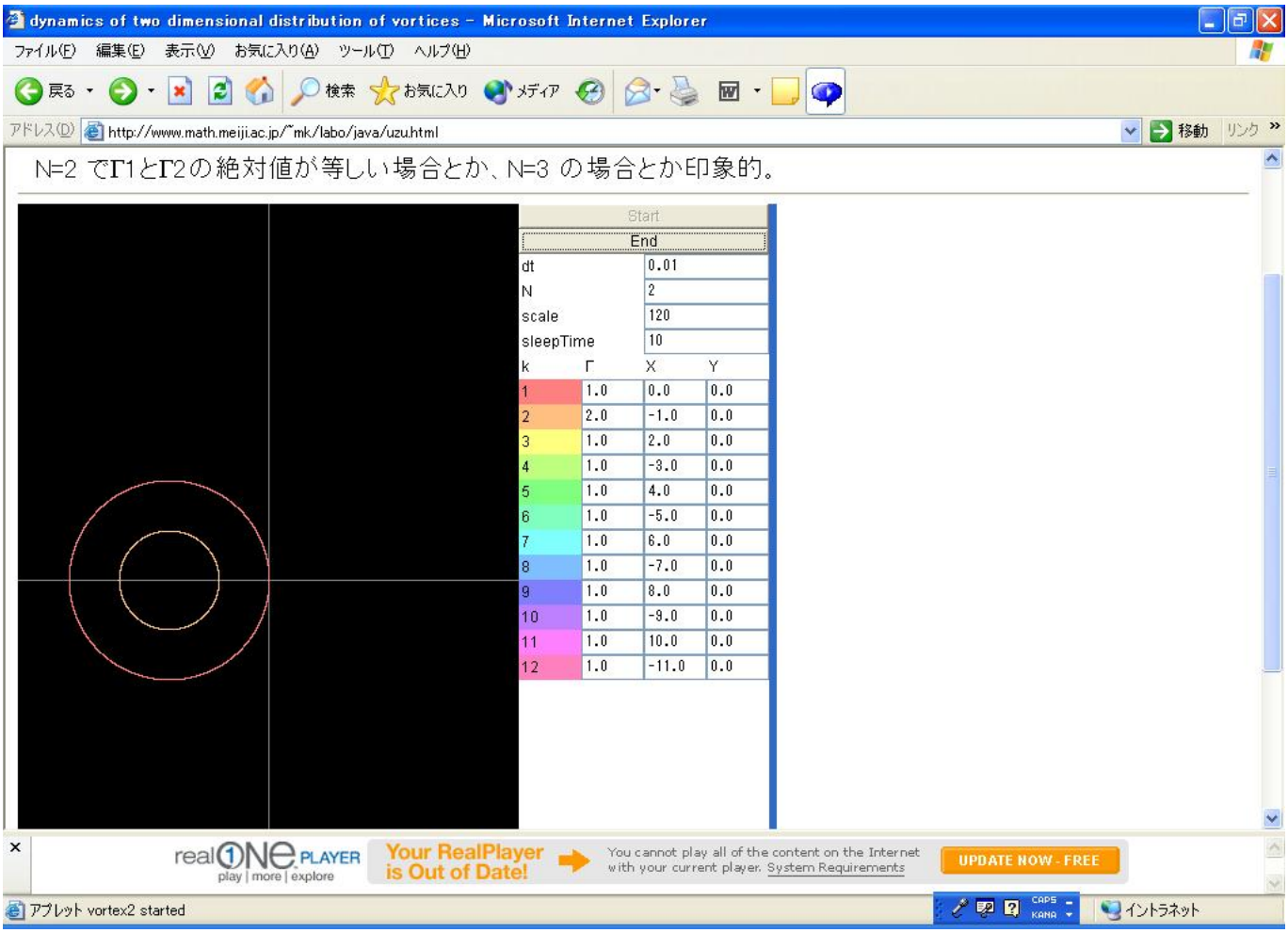
```
// Start, End ボタンの準備
bt= new Button[btString.length]; // ボタンの配列の生成
for (i = 0; i < bt.length; i++) {
  bt[i] = new Button(btString[i]); // ボタンの生成
  bt[i].addActionListener(this);   // リスナーに関連付け
  bt[i].setBounds(imgD.width,20*i,d.width-imgD.width,20);//ボタンの位置決め
  add(bt[i]);                      //ボタンの登録
}

// dt, N, scale, sleepTime のラベル、テキスト・フィールドの準備
la1 = new Label[laString1.length];     // ラベルの宣言
tf1 = new TextField[laString1.length]; // テキストフィールドの宣言
for (i = 0; i < la1.length; i++) {
  la1[i] = new Label(laString1[i]);    // ラベルの生成
  la1[i].setBounds(imgD.width,
                   20*(i+bt.length),
                   (d.width-imgD.width)/2,
                   20);                // ラベルの位置決め
  add(la1[i]);                         // ラベルの登録

  tf1[i]=new TextField();              // テキストフィールドの生成
  tf1[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)/2,
                   20*(i+bt.length),
                   (d.width-imgD.width)/2,
                   20);                // テキストフィールドの位置決め
  add(tf1[i]);                         // テキストフィールドの登録
}

// k,「 , X, Y というラベルの準備
la2 = new Label[laString2.length];     // ラベルの配列の生成
for (i = 0; i < laString2.length; i++) {
  la2[i] = new Label(laString2[i]);    // ラベルの生成
  la2[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)*i/4,
                   20*(bt.length+la1.length),
                   (d.width-imgD.width)/4,
                   20);                // ラベルの位置決め
  add(la2[i]);                         // ラベルの登録
}

// 各渦糸のデータ（強さ、初期位置）のラベル、テキストフィールド
la3 = new Label[MaxN]; // ラベルの配列の生成
tfGamma = new TextField[MaxN];         // テキストフィールドの生成
tfX = new TextField[MaxN];             // テキストフィールドの生成
tfY = new TextField[MaxN];             // テキストフィールドの生成
for (i = 0; i < la3.length; i++) {
  la3[i] = new Label("" + (i + 1));    // ラベルの生成
  la3[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)*0/4,
                   20*(bt.length+la1.length+1+i),
                   (d.width-imgD.width)/4,
                   20);                // ラベルの位置決め
  la3[i].setBackground(color2[i]);     // 背景の設定
  add(la3[i]);                         // ラベルの登録

  tfGamma[i] = new TextField(); // テキストフィールドの生成
  tfGamma[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)*1/4,
                       20*(bt.length+la1.length+1+i),
                       (d.width-imgD.width)/4,
```

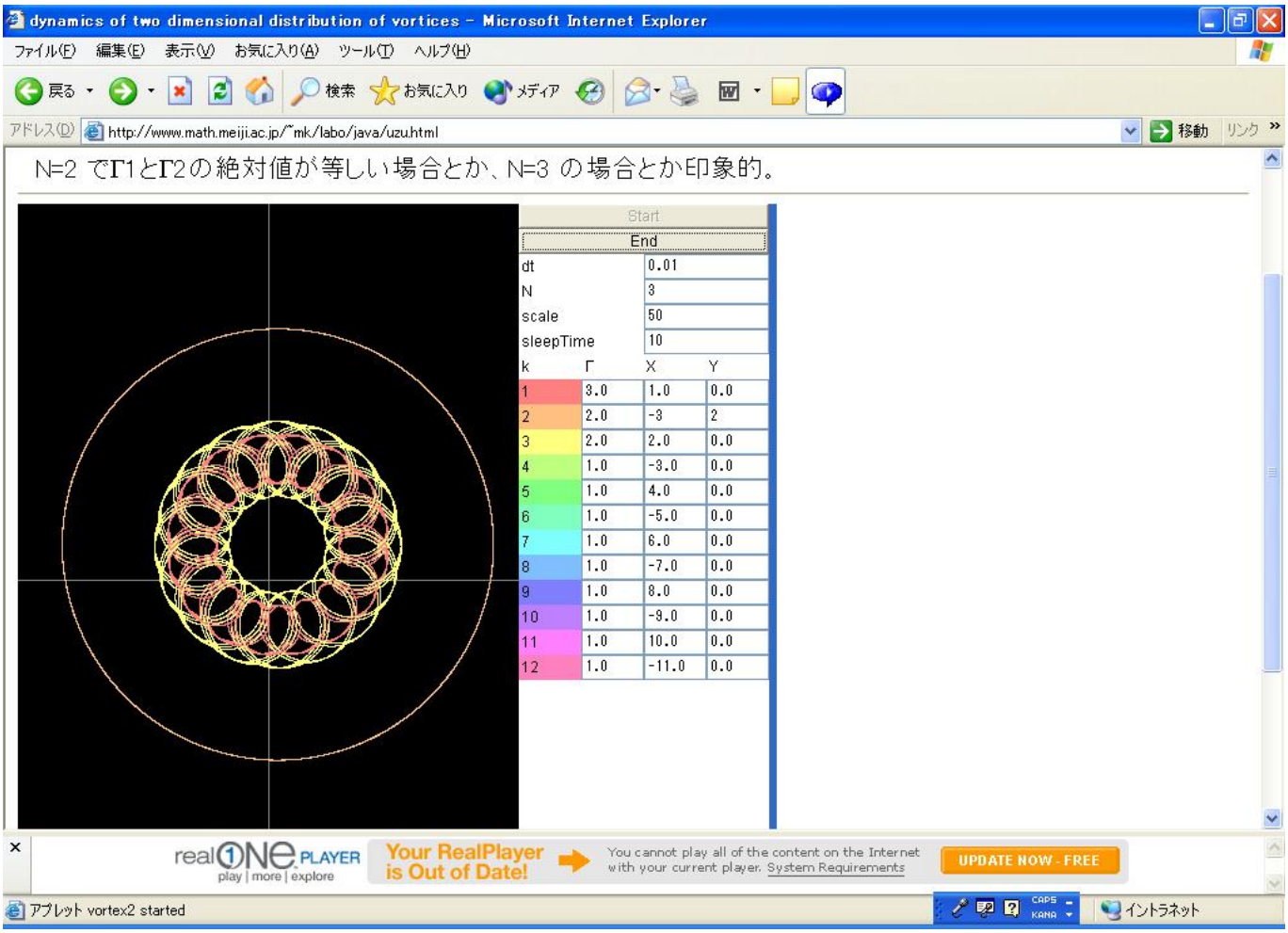
```
                        20); // ラベルの位置決め
    add(tfGamma[i]); // テキストフィールドの登録

    tfX[i]=new TextField(); // テキストフィールドの生成
    tfX[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)*2/4,
                     20*(bt.length+la1.length+1+i),
                     (d.width-imgD.width)/4,
                     20); // ラベルの位置決め
    add(tfX[i]); // テキストフィールドの登録

    tfY[i]=new TextField(); // テキストフィールドの生成
    tfY[i].setBounds(imgD.width+(d.width-imgD.width)*3/4,
                     20*(bt.length+la1.length+1+i),
                     (d.width-imgD.width)/4,
                     20); // ラベルの位置決め
    add(tfY[i]); // テキストフィールドの登録
  }

  // 計算用の配列を確保する
  Gamma = new double[MaxN];
  Z  = new double[2*MaxN];
  Z2 = new double[2*MaxN];
  f  = new double[2*MaxN];
  k1 = new double[2*MaxN];
  k2 = new double[2*MaxN];
  k3 = new double[2*MaxN];
  k4 = new double[2*MaxN];

  // 渦の強さ，初期位置の決定
  for (i = 0; i < MaxN; i++) {
    Gamma[i]=1;
    Z[2*i]   = Math.pow(-1.0,i)*i;
    Z[2*i+1] = 0;
  }
  // 渦の強さ，初期位置をテキストフィールドに表示
  tf1[0].setText("" + dt);
  tf1[1].setText("" + N);
  tf1[2].setText("" + scale);
  tf1[3].setText("" + sleepTime);
  for (i = 0; i < tfGamma.length; i++) {
    tfGamma[i].setText("" + Gamma[i]);
    tfX[i].setText("" + Z[2*i]);
    tfY[i].setText("" + Z[2*i+1]);
  }

  // スタートボタンを無効化
  bt[0].setEnabled(false);
}

public void paint(Graphics g) {
  update(g);
}
public void update(Graphics g) {
  g.drawImage(off, 0, 0, this); // オフスクリーンの表示
}
// スレッドを生成してスタート
public void start() {
  if (th == null) {
```

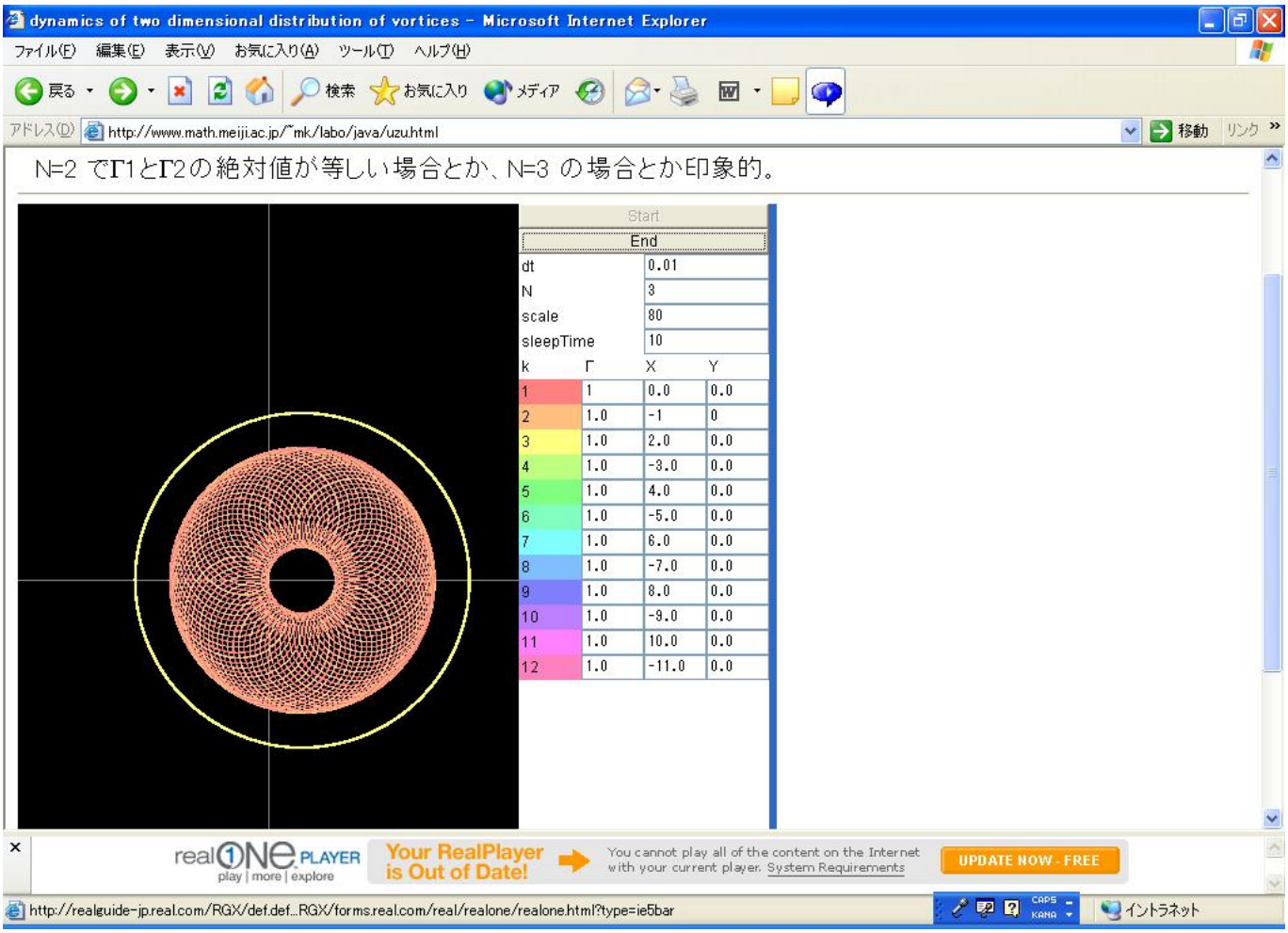
```
    th = new Thread(this);
    th.start();
  }
}
// スレッドを止める
public void stop() {
  if (th != null) {
    th=null;
  }
}
// 座標変換（x 座標）
private int scx(double x) {
  return (int)(scale * x) + imgD.width / 2;
}
// 座標変換（y 座標）
private int scy(double y) {
  return - (int)(scale * y) + imgD.height / 2;
}
// ユーザーの座標系で線分を描く
private void MydrawLine(double x1, double y1, double x2, double y2) {
  grf.drawLine(scx(x1), scy(y1), scx(x2), scy(y2));
}
// 渦糸系のベクトル場 f(z) の計算
public void aux(double []z, double []f, int N) {
  double doublePI = 2.0 * Math.PI;
  double sumx, sumy;
  for (int i = 0; i< N; i++) {
    sumx= 0; sumy= 0;
    for (int j = 0; j < N; j++)
      if (j != i) {
        double seki = Gamma[j] / (sqr(z[2*i]-z[2*j])+sqr(z[2*i+1]-z[2*j+1]));
        sumx -= seki * (z[2*i+1]-z[2*j+1]);
        sumy += seki * (z[2*i]-z[2*j]);
      }
      f[2*i+1] = sumy / doublePI;
      f[2*i]   = sumx / doublePI;
  }
}
// 計算スレッド
public void run() {
  int i;
  int n = 2 * N; // 力学系の次元
  // オリジナルではここで配列の宣言をしていたが、それでは遅すぎる
  // double [] Z2 = new double[n];
  // double [] f  = new double[n];
  // double [] k1 = new double[n];
  // double [] k2 = new double[n];
  // double [] k3 = new double[n];
  // double [] k4 = new double[n];

  while (th != null) {
    // スピードを稼ぐために 100 回に 1 回だけスリープするようにした
    for (int count = 0; count < 100; count++) {
      // Runge-Kutta: next Z = Z + (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4) / 6
      // k1
      aux(Z, f, N);
      for (i = 0; i < n; i++)
        k1[i] = dt * f[i];
```

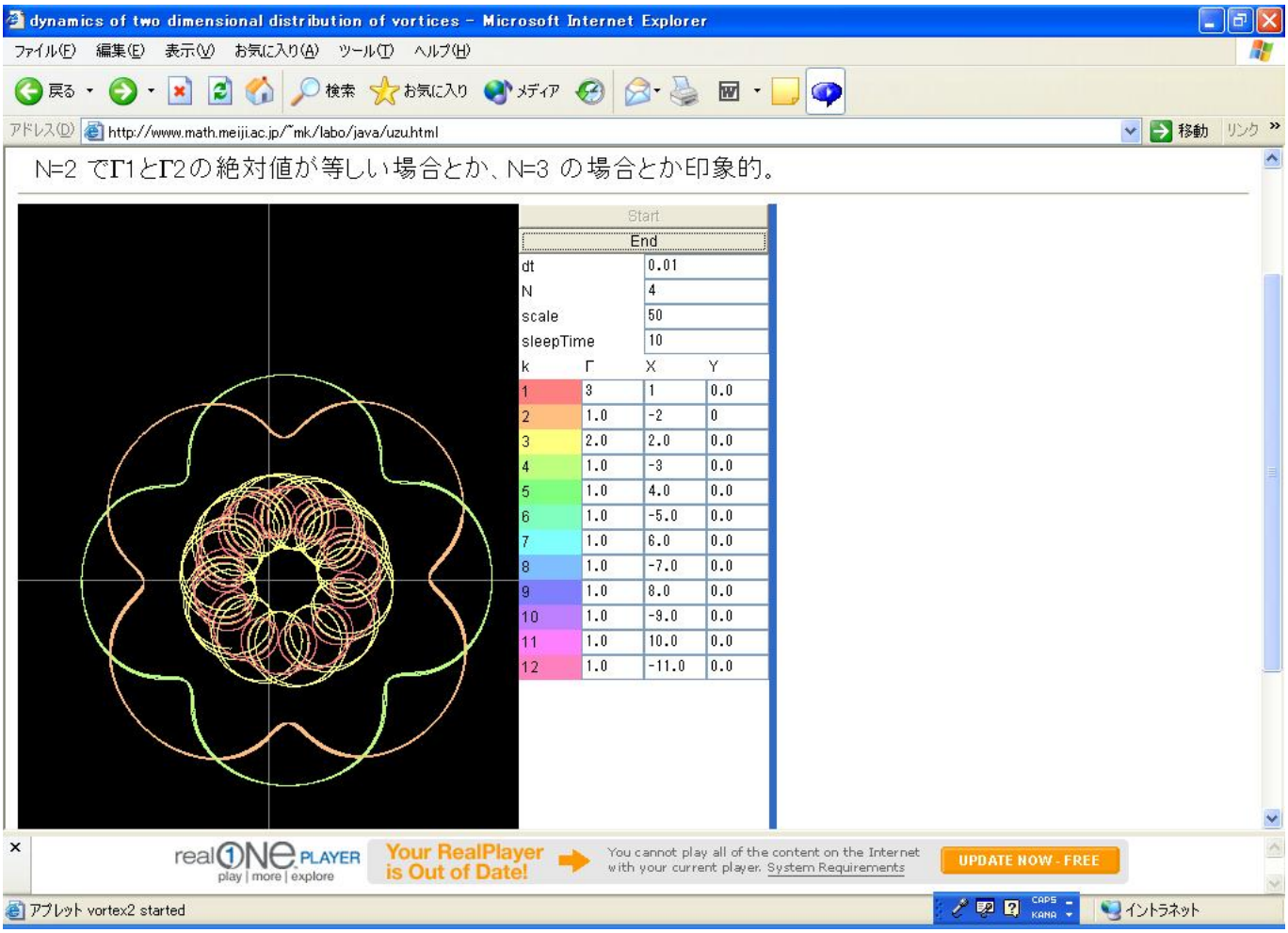
```
      // k2
      for (i = 0; i < n; i++)
        Z2[i] = Z[i] + 0.5 * k1[i];
      aux(Z2, f, N);
      for (i = 0; i < n; i++)
        k2[i] = dt * f[i];
      // k3
      for (i = 0; i < n; i++)
        Z2[i] = Z[i] + 0.5 * k2[i];
      aux(Z2, f, N);
      for (i = 0; i < n; i++)
        k3[i] = dt * f[i];
      // k4
      for (i = 0; i < n; i++)
        Z2[i] = Z[i] + k3[i];
      aux(Z2, f, N);
      for (i = 0; i < n; i++)
        k4[i] = dt * f[i];
      // 次のステップの値 (Runge-Kutta)
      for (i = 0; i < n; i++)
        Z2[i] = Z[i] + (k1[i] + 2 * (k2[i] + k3[i]) + k4[i]) / 6;
      // 軌跡を描く
      for (int k = 0; k < N; k++) {
        grf.setColor(color2[k]);
        MydrawLine(Z[2*k], Z[2*k+1], Z2[2*k], Z2[2*k+1]);
      }
      // 値の更新
      for (i = 0; i < n; i++)
        Z[i] = Z2[i];
      // オフスクリーンを描画する
      repaint();
    }
    // スレッドの処理（田代君の真似）
    if (sleepTime > 0) {
      try {
        th.sleep(sleepTime); //スレッドを一時停止
      }
      catch(InterruptedException e) {};
    }
    th.yield(); //スレッドを一時譲る
  }
}
// イベントの処理
public void actionPerformed(ActionEvent e) {
  if (e.getSource() == bt[0]) {
    // Start ボタンが押されたら
    //スタートボタンを無効化，エンドボタンを有効化してフォーカスを移す
    bt[0].setEnabled(false);
    bt[1].setEnabled(true);
    bt[1].requestFocus();

    // テキストフィールドの値を変数に代入
    dt = Double.valueOf(tf1[0].getText()).doubleValue();
    N = Integer.parseInt(tf1[1].getText());
    scale = Double.valueOf(tf1[2].getText()).doubleValue();
    sleepTime = Integer.parseInt(tf1[3].getText());
    for (int i = 0; i < MaxN; i++) {
      Gamma[i] = Double.valueOf(tfGamma[i].getText()).doubleValue();
```

```
      Z[2*i]   = Double.valueOf(tfX[i].getText()).doubleValue();
      Z[2*i+1] = Double.valueOf(tfY[i].getText()).doubleValue();
    }
    // N の範囲をチェックする
    if (N > MaxN) {
      // N が最大値を超えていたら MaxN にする
      N = MaxN;
      tf1[1].setText("" + N); //数値をテキストフィールドに表示
    }
    if (N < 1) {
      // N が最大値を超えていたら MaxN にする
      N = 1;
      tf1[1].setText("" + N); //数値をテキストフィールドに表示
    }
    // オフスクリーンのクリア
    grf.setColor(Color.black);                 // 背景色の設定
    grf.fillRect(0,0,imgD.width,imgD.height); // 塗りつぶす（クリア）
    grf.setColor(Color.gray);                  // 軸の色の設定
    grf.drawLine(0,imgD.height/2,imgD.width,imgD.height/2); // x 軸
    grf.drawLine(imgD.width/2,0,imgD.width/2,imgD.height);  // y 軸
    // スレッドの開始
    start();
  }
  else if (e.getSource() == bt[1]) {
    // End ボタンが押されたら
    bt[0].setEnabled(true);  // スタートボタンを有効化
    bt[0].requestFocus();    // スタートボタンにフォーカスを移す
    bt[1].setEnabled(false); // エンドボタンを無効化
    // スレッドをとめる
    stop();
  }
 }
 // 二乗を返す
 private double sqr(double a) {
  return a * a;
 }
}
```


dynamics of two dimensional distribution of vortices – Microsoft Internet Explorer
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) お気に入り(A) ツール(T) ヘルプ(H)
戻る 検索 お気に入り メディア
アドレス(D) http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html
移動 リンク
N=2 でΓ1とΓ2の絶対値が等しい場合とか、N=3 の場合とか印象的。
Start
End
dt 0.01
N 2
scale 120
sleepTime 10
k Γ X Y
1 1.0 0.0 0.0
2 2.0 -1.0 0.0
3 1.0 2.0 0.0
4 1.0 -3.0 0.0
5 1.0 4.0 0.0
6 1.0 -5.0 0.0
7 1.0 6.0 0.0
8 1.0 -7.0 0.0
9 1.0 8.0 0.0
10 1.0 -9.0 0.0
11 1.0 10.0 0.0
12 1.0 -11.0 0.0
realONE PLAYER
play | more | explore
Your RealPlayer is Out of Date!
You cannot play all of the content on the Internet with your current player. System Requirements
UPDATE NOW - FREE
アプレット vortex2 started
CAPS KANA
イントラネット


dynamics of two dimensional distribution of vortices – Microsoft Internet Explorer
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) お気に入り(A) ツール(T) ヘルプ(H)
戻る 検索 お気に入り メディア
アドレス(D) http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html
移動 リンク
N=2 でΓ1とΓ2の絶対値が等しい場合とか、N=3 の場合とか印象的。
Start
End
dt 0.01
N 3
scale 50
sleepTime 10
k Γ X Y
1 3.0 1.0 0.0
2 2.0 -3 2
3 2.0 2.0 0.0
4 1.0 -3.0 0.0
5 1.0 4.0 0.0
6 1.0 -5.0 0.0
7 1.0 6.0 0.0
8 1.0 -7.0 0.0
9 1.0 8.0 0.0
10 1.0 -9.0 0.0
11 1.0 10.0 0.0
12 1.0 -11.0 0.0
realONE PLAYER
play | more | explore
Your RealPlayer is Out of Date!
You cannot play all of the content on the Internet with your current player. System Requirements
UPDATE NOW - FREE
アプレット vortex2 started
CAPS KANA
イントラネット


dynamics of two dimensional distribution of vortices – Microsoft Internet Explorer
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) お気に入り(A) ツール(T) ヘルプ(H)
戻る 検索 お気に入り メディア
アドレス(D) http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html
移動 リンク
N=2 でΓ1とΓ2の絶対値が等しい場合とか、N=3 の場合とか印象的。
Start
End
dt 0.01
N 3
scale 80
sleepTime 10
k Γ X Y
1 1 0.0 0.0
2 1.0 -1 0
3 1.0 2.0 0.0
4 1.0 -3.0 0.0
5 1.0 4.0 0.0
6 1.0 -5.0 0.0
7 1.0 6.0 0.0
8 1.0 -7.0 0.0
9 1.0 8.0 0.0
10 1.0 -9.0 0.0
11 1.0 10.0 0.0
12 1.0 -11.0 0.0
realONE PLAYER
play | more | explore
Your RealPlayer is Out of Date!
You cannot play all of the content on the Internet with your current player. System Requirements
UPDATE NOW - FREE
http://realguide-jp.real.com/RGX/def.def...RGX/forms.real.com/real/realone/realone.html?type=ie5bar
CAPS KANA
イントラネット


dynamics of two dimensional distribution of vortices – Microsoft Internet Explorer
ファイル(F) 編集(E) 表示(V) お気に入り(A) ツール(T) ヘルプ(H)
戻る 検索 お気に入り メディア
アドレス(D) http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html
移動 リンク
N=2 でΓ1とΓ2の絶対値が等しい場合とか、N=3 の場合とか印象的。
Start
End
dt 0.01
N 4
scale 50
sleepTime 10
k Γ X Y
1 3 1 0.0
2 1.0 -2 0
3 2.0 2.0 0.0
4 1.0 -3 0.0
5 1.0 4.0 0.0
6 1.0 -5.0 0.0
7 1.0 6.0 0.0
8 1.0 -7.0 0.0
9 1.0 8.0 0.0
10 1.0 -9.0 0.0
11 1.0 10.0 0.0
12 1.0 -11.0 0.0
realONE PLAYER
play | more | explore
Your RealPlayer is Out of Date!
You cannot play all of the content on the Internet with your current player. System Requirements
UPDATE NOW - FREE
アプレット vortex2 started
CAPS KANA
イントラネット

関連図書

[1] 岡本久・藤井宏, 非線形力学, 岩波書店 (1995).

[2] 今井功, 流体力学, 裳華房 (1993).