棒の振動

理工学部数学科　４年１６組６４番　渡部　卓也

2011年 2月 18日

目次

第1章　はじめに

まず、棒の定義として、次のようにいう。

> １次元の、静止状態では直線である連続体で、変形のポテンシャルエネルギーが、曲率の平方を棒全体にわたって積分したものに比例するようなものとする。

私は、卒業研究テーマとして『棒の振動』を取り上げました。内容を簡単に説明すると、まず、棒の微分方程式を解いていき、得られた式を Mathematica を用いてグラフにしました。次に、微分方程式を差分法を用いて解き、差分方程式を導き出し、仮想格子点を用いてプログラミングを行い、棒の振動をシミュレーションしました。

今回、棒の振動の両端固定、両端支持、両端自由の３つの状態について調べました。それぞれの状態について説明すると、両端固定は棒の両端を手のひら全体で握っているような状態、両端支持は棒の両端を指で支えているような状態とイメージしていただければわかりやすいと思います。両端自由については棒が宙に浮いている状態をイメージしていただきたいです。

第2章　棒の波動方程式

2.1　一般的なこと

一様な棒の縦振動の微分方程式は、
x…棒の位置、t…時刻、u…x、t における変位、とすると、

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

となる。また初期値を $u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$ とする。
$u = v(x)g(t)$ とおいて得られる固有振動を決定する。($t > 0$、$0 < x < \pi$)
$u = v(x)g(t)$ と (2.1) より、

$$v_{xxxx}(x)g(t) + v(x)g_{tt}(t) = 0,$$

$$v_{xxxx}(x)g(t) = -v(x)g_{tt}(t),$$
$$-\frac{v_{xxxx}(x)}{v(x)} = \frac{g_{tt}(t)}{g(t)}.$$

より、右辺は t の関数、左辺は x の関数となり両辺は t、x 双方に依存せず定数関数となる。それを $-\lambda$ とおくと（λ は定数）

$$-\frac{v_{xxxx}(x)}{v(x)} = \frac{g_{tt}(t)}{g(t)} = -\lambda,$$
$$v_{xxxx}(x) - \lambda v(x) = 0 \quad (0 < x < \pi). \tag{2.2}$$
$$g_{tt}(t) + \lambda g(t) = 0 \quad (0 < t).$$

まず、(2.2) の特性根を s とし、特性方程式を解いていく。$\lambda \neq 0$ のとき（$\lambda \geq 0$ は明らか）$\sqrt[4]{\lambda} = \nu$ とすると、

$$s^4 - \nu^4 = 0.$$

$$s = \pm\nu, \pm i\nu.$$

よって

$$v(x) = C_1 e^{\nu x} + C_2 e^{-\nu x} + C_3 e^{i\nu x} + C_4 e^{-i\nu x},$$

この式を整理すると、

$$v(x) = C_1 \cos\nu x + C_2 \sin\nu x + C_3 \cosh\nu x + C_4 \sinh\nu x \quad （C_1 \sim C_4 : \text{任意定数}）.$$

$\lambda = 0$ のとき、特性方程式

$$s^4 = 0,$$

より

$$s = 0 \quad (\text{重複度 } 4).$$

よって、

$$v(x) = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3 \quad (D_1 \sim D_4 : \text{任意定数}).$$

次に、$g_{tt}(t) + \lambda g(t) = 0$ を同様にして解くと、

$$g(t) = \begin{cases} A\cos(\nu^2 t) + Bsin(\nu^2 t) \quad (\lambda > 0) \quad (A, B : \text{任意定数}) \\ E + Ft \quad (\lambda = 0) \quad (E, F : \text{任意定数}) \end{cases}$$

　次に、$v(x)$ の直交性を調べる。$A\phi := \phi''''$　により作用子 A を定めて関数 ϕ, ψ の内積 (ϕ, ψ) を

$$(\phi, \psi) := \int_0^\pi \phi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

で定義する。$\phi(x) = \phi'(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi'(x) = 0 \quad (x = 0, \pi)$ を満たす関数 ϕ, ψ に対して、

$$\begin{aligned} (A\phi, \psi) &= \int_0^\pi \phi''''(x)\overline{\psi(x)}dx \\ &= [\phi'''(x)\overline{\psi(x)}]_0^\pi - \int_0^\pi \phi'''(x)\overline{\psi'(x)}dx \\ &= -[\phi''(x)\overline{\psi'(x)}]_0^\pi + \int_0^\pi \phi''(x)\overline{\psi''(x)}dx \\ &= [\phi'(x)\overline{\psi''(x)}]_0^\pi - \int_0^\pi \phi'(x)\overline{\psi'''(x)}dx \\ &= -[\phi(x)\overline{\psi'''(x)}]_0^\pi + \int_0^\pi \phi(x)\overline{\psi''''(x)}dx \\ &= \int_0^\pi \phi(x)\overline{\psi''''(x)}dx \\ &= (\phi, A\psi). \end{aligned}$$

よって、A は対称である。これを利用して、$v(x)$ の直交性を調べる。

$$\lambda_n(v_n, v_n) = (\lambda_n v_n, v_n) = (Av_n, v_n) = (v_n, Av_n) = \overline{\lambda_n}(v_n, v_n).$$

より、

$$\lambda_n = \overline{\lambda_n} \quad i.e. \quad \lambda_n \in \mathbf{R}.$$

次に、

$$\begin{aligned} \lambda_n(v_n, v_m) &= (\lambda_n v_n, v_m) \\ &= (Av_n, v_m) = (v_n, Av_m) \\ &= (v_n, \lambda_m v_m) = \overline{\lambda_m}(v_n, v_m) = \lambda_m(v_n, v_m), \end{aligned}$$

より

$$(\lambda_n-\lambda_m)(v_n-v_m)=0.$$

であるから $\lambda_n\neq\lambda_m$ なら

$$(v_n,v_m)=0.$$

が導かれる。次に $\lambda_n\geqq 0$ であることを証明する。

$$\begin{aligned}\lambda_n(v_n,v_n)&=(\lambda_n v_n,v_n)=(Av_n,v_n)\\&=\int_0^\pi v_n''''(x)\overline{v_n(x)}dx\\&=[v_n'''(x)\overline{v_n(x)}]_0^\pi-\int_0^\pi v_n'''(x)\overline{v'(x)}dx\\&=-[v_n''(x)\overline{v_n'(x)}]_0^\pi+\int_0^\pi v_n''(x)\overline{v_n''(x)}dx\\&=\int_0^\pi v_n''(x)\overline{v_n''(x)}dx=\int_0^\pi |v_n''(x)|^2dx\geqq 0.\end{aligned}$$

の両辺を (v_n,v_n) で割って、$\lambda_n\geqq 0$ となる。よって証明された。

2.2　両端固定境界条件

　両端固定のとき、境界条件は

$$v(x)=v_x(x)=0\quad(x=0,\pi).$$

である。

　$\lambda=0$　のとき、

$$v(x)=D_1+D_2x+D_3x^2+D_4x^3.$$

$$v_x(x)=D_2+2D_3x+3D_4x^2.$$

$x=0$ のとき、

$$v(0)=D_1=0.$$

$$v_x(0)=D_2=0.$$

$x=\pi$　のとき、

$$v(\pi)=D_3\pi^2+D_4\pi^3=0,$$

より

$$D_3+D_4\pi=0. \tag{2.3}$$

$$v_x(\pi)=2D_3\pi+3D_4\pi^2=0,$$

より

$$2D_3 + 3D_4\pi = 0. \tag{2.4}$$

よって (2.3),(2.4) より

$$D_3 = D_4 = 0. \tag{2.5}$$

以上より $v \equiv 0$ となるので両端固定のときは $\lambda > 0$ である。
　$\lambda > 0$ のとき

$$v_x(x) = \nu(-C_1 \sin\nu x + C_2 \cos\nu x + C_3 \sinh\nu x + C_4 \cosh\nu x).$$

$x = 0$　のとき、

$$v(0) = C_1 + C_3 = 0,$$
$$v_x(0) = C_2 + C_4 = 0,$$

よって、

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2. \tag{2.6}$$

$x = \pi$　のとき、(2.6) より

$$v(\pi) = C_1 \cos\nu\pi + C_2 \sin\nu\pi - C_1 \cosh\nu\pi - C_2 \sinh\nu\pi = 0,$$

$$(\cos\nu\pi - \cosh\nu\pi)C_1 + (\sin\nu\pi - \sinh\nu\pi)C_2 = 0. \tag{2.7}$$

$$v_x(x) = \nu(-C_1 \sin\nu\pi + C_2 \cos\nu\pi - C_1 \sinh\nu\pi - C_2 \cosh\nu\pi),$$

$$-(\sin\nu\pi + \sinh\nu\pi)C_1 + (\cos\nu\pi - \cosh\nu\pi)C_2 = 0. \tag{2.8}$$

(2.7)、(2.8) より、

$$\begin{pmatrix} \cos\nu\pi - \cosh\nu\pi & \sin\nu\pi - \sinh\nu\pi \\ -(\sin\nu\pi + \sinh\nu\pi) & \cos\nu\pi - \cosh\nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\nu\pi - \cosh\nu\pi & \sin\nu\pi - \sinh\nu\pi \\ -(\sin\nu\pi + \sinh\nu\pi) & \cos\nu\pi - \cosh\nu\pi \end{pmatrix}.$$

とすると、$\det B \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり、$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ で $v \equiv 0$ となる。
　$\det B = 0$ を考える。

$$\det B = (\cos\nu\pi - \cosh\nu\pi)^2 + (\sin\nu\pi + \sinh\nu\pi)(\sin\nu\pi - \sinh\nu\pi) = 0,$$

$$\cos^2\nu\pi - 2\cos\nu\pi\cosh\nu\pi + \cosh^2\nu\pi + \sin^2\nu\pi - \sinh^2\nu\pi = 0,$$

$$-2\cos\nu\pi\cosh\nu\pi + 1 + 1 = 0,$$

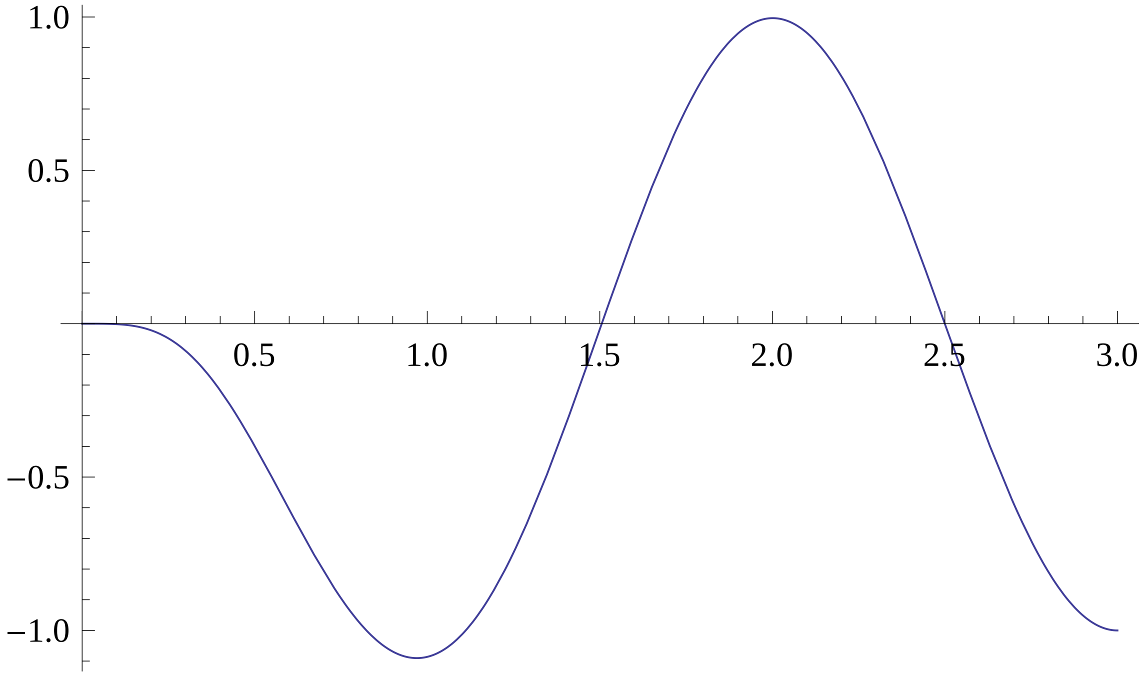

図 2.1: $\cos(\nu\pi) - \frac{1}{\cosh(\nu\pi)}$

$$\cos\nu\pi\cosh\nu\pi = 1.$$

よって、超越方程式 $\cosh\nu\pi\cos\nu\pi = 1$ を得る。超越方程式のグラフは次のようになる。$\nu > 0$ の範囲に無限個存在する。小さい順に $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$ とおくと、

$$\lim_{x\to\infty}\nu_n = \infty, \quad \nu_n \fallingdotseq n + \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(2.7) より、

$$C_2 = -\frac{\cos\nu\pi - \cosh\nu\pi}{\sin\nu\pi - \sinh\nu\pi}. \tag{2.9}$$

以上より、固有関数

$$v_n(x) = (\sin\nu_n\pi - \sinh\nu_n\pi)(\cos\nu_n x - \cosh\nu_n x) - (\cos\nu_n\pi - \cosh\nu_n\pi)(\sin\nu_n x - \sinh\nu_n x). \tag{2.10}$$

を得る。そのグラフは次である。よって、解の公式は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(A_n\cos(\nu_n^2 t) + B_n\sin(\nu_n^2 t)).$$

初期条件より、

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x).$$

$$\begin{aligned}(\phi, v_m) = (\sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n, V_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(v_n, v_m) \\ &= A_m(v_m, v_m).\end{aligned}$$

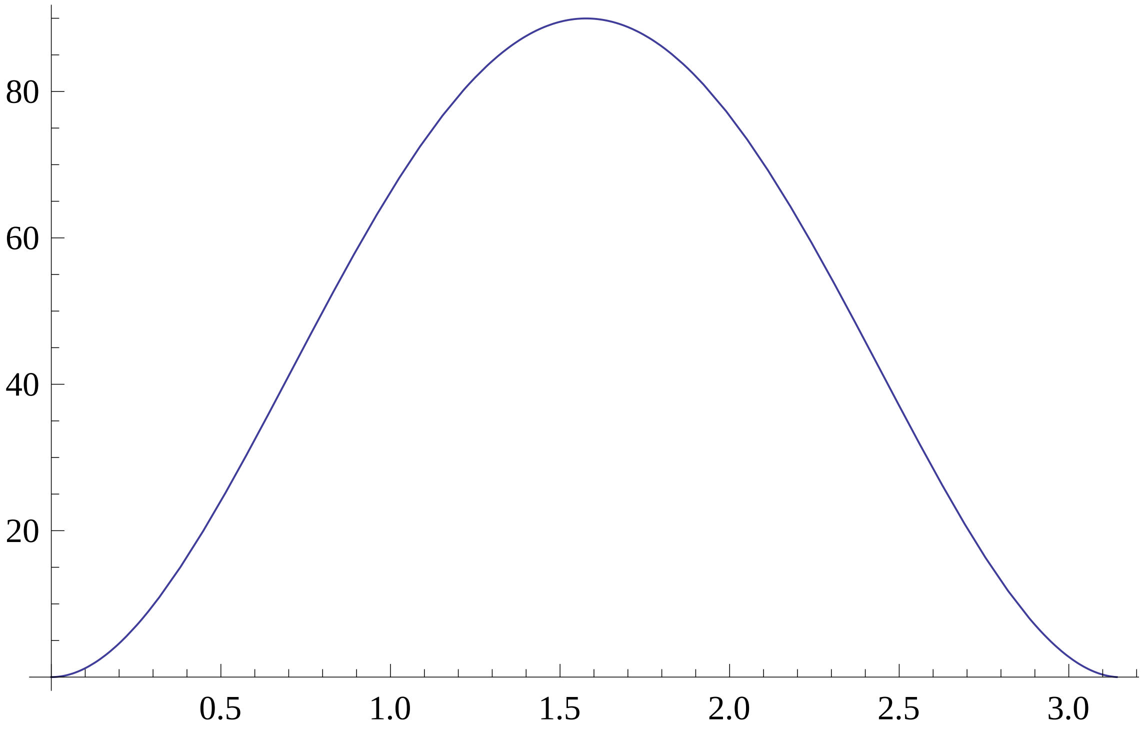

図 2.2: 両端固定境界条件の固有関数

以上より、

$$A_m = \frac{(\phi, v_m)}{(v_m, v_m)} = \frac{1}{(v_m, v_m)} \int_0^\pi \phi(x) v_m(x) dx.$$

B_n に関しても同様に考えると、初期条件より

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 v_n(x).$$

$$\begin{aligned}(\psi, v_m) = (\sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 v_n, v_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 (v_n, v_m) \\ &= B_m \nu_m^2 (v_m, v_m).\end{aligned}$$

以上より、

$$B_m = \frac{(\psi, v_m)}{(v_m, v_m)} = \frac{1}{(v_m, v_m)\nu_m^2} \int_0^\pi \psi(x) v_m(x) dx.$$

これらをまとめると、両端固定の解の公式は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(A_n \cos(\nu_n^2 t) + B_n \sin(\nu_n^2 t)).$$

$$\begin{cases} v_n(x) = (\sin \nu_n \pi - \sinh \nu_n \pi)(\cos \nu_n x - \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n \pi - \cosh \nu_n \pi)(\sin \nu_n x - \sinh \nu_n x) \\ A_n = \frac{1}{(v_m, v_m)} \int_0^\pi \phi(x) v_m(x) dx \\ B_n = \frac{1}{(v_m, v_m)\nu_m^2} \int_0^\pi \psi(x) v_m(x) dx. \end{cases}$$

となる。

2.3　両端支持境界条件

　両端支持とき、境界条件は

$$v(x) = v_{xx}(x) = 0, \quad (x = 0, \pi).$$

$\lambda = 0$ のとき

$$v(x) = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3.$$

$$v_{xx}(x) = 2D_3 + 6D_4 x.$$

$x = 0$ のとき、

$$v(0) = D_1 = 0.$$

$$v_{xx}(0) = D_3 = 0.$$

$x = \pi$　のとき、

$$v(\pi) = D_2 \pi + D_4 \pi^3 = 0,$$

$$v_{xx}(\pi) = 6D_4 \pi = 0,$$

より

$$D_4 = 0.$$

よって

$$D_2 = D_4 = 0.$$

以上より $v \equiv 0$ となるので両端支持のときは $\lambda > 0$ である。
　$\lambda > 0$　のとき

$$v_{xx}(x) = \nu^2(-C_1 \cos \nu x - C_2 \sin \nu x + C_3 \cosh \nu x + C_4 \sinh \nu x).$$

$x = 0$　のとき、

$$v(0) = C_1 + C_3 = 0,$$

$$v_{xx}(0) = \nu^2(-C_1 + C_3) = 0,$$

より

$$C_1 = -C_3, \quad C_1 = C_3.$$

よって、

$$C_1 = C_3 = 0. \tag{2.11}$$

とする。
　$x = \pi$　のとき、(2.11) より

$$v(\pi) = C_2 \sin \nu\pi + C_4 \sinh \nu\pi = 0. \tag{2.12}$$

$$v_{xx}(\pi) = \nu^2(-C_2 \sin \nu\pi + C_4 \sinh \nu\pi) = 0. \tag{2.13}$$

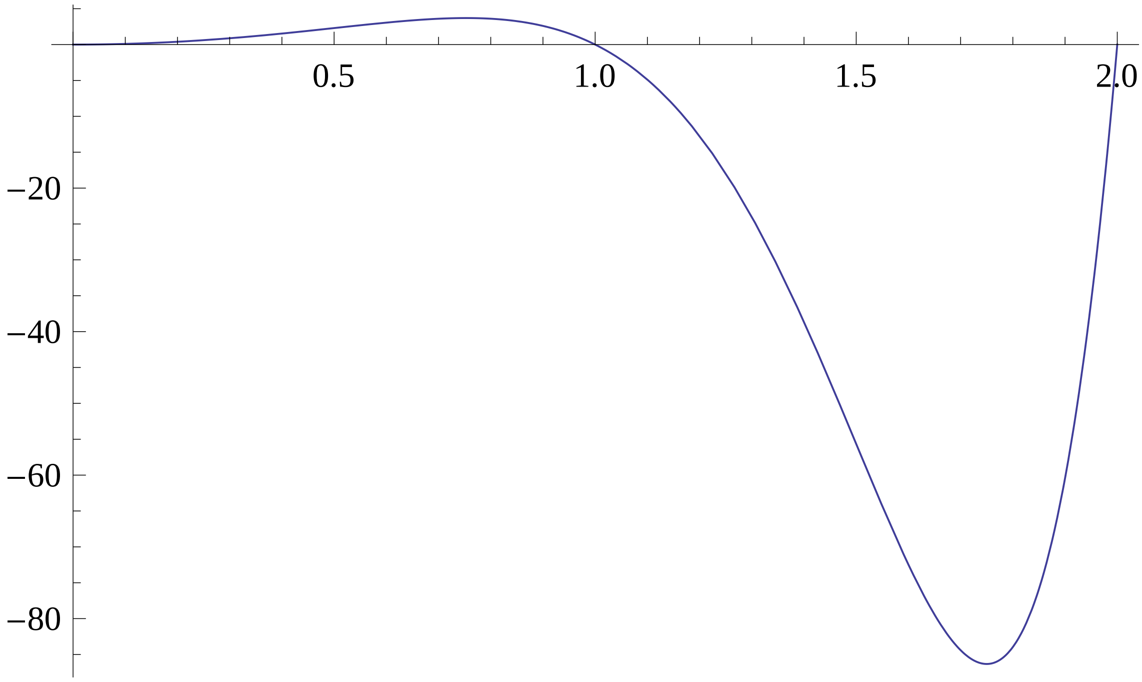

図 2.3: $\sin\nu\pi\sinh\nu\pi$

(2.12)、(2.13) より、

$$\begin{pmatrix}\sin\nu\pi & \sinh\nu\pi \\ -\sin\nu\pi & \sinh\nu\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_3 \\ C_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix}\sin\nu\pi & \sinh\nu\pi \\ -\sin\nu\pi & \sinh\nu\pi\end{pmatrix}.$$

として、$\det C = 0$ を考えると、

$$\det C = \sin\nu\pi\sinh\nu\pi + \sin\nu\pi\sinh\nu\pi = 0.$$

よって超越方程式　$\sin\nu\pi\sinh\nu\pi = 0$　を得る。超越方程式のグラフは次のようになる。

この超越方程式を解くと、$\nu > 0$ より $\sinh(\nu\pi) \neq 0$ なので

$$\sin(\nu\pi) = 0, \quad \nu = n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(2.13) より、

$$C_4 = \frac{\sin\nu\pi}{\sinh\nu\pi}C_2$$

よって、

$$v(x) = C_2\sin\nu x + C_4\frac{\sin\nu\pi}{\sinh\nu\pi}\sinh\nu x$$

となり、固有関数

$$v(x) = \sin\nu x\sinh\nu\pi + \sin\nu\pi\sinh\nu x, \tag{2.14}$$

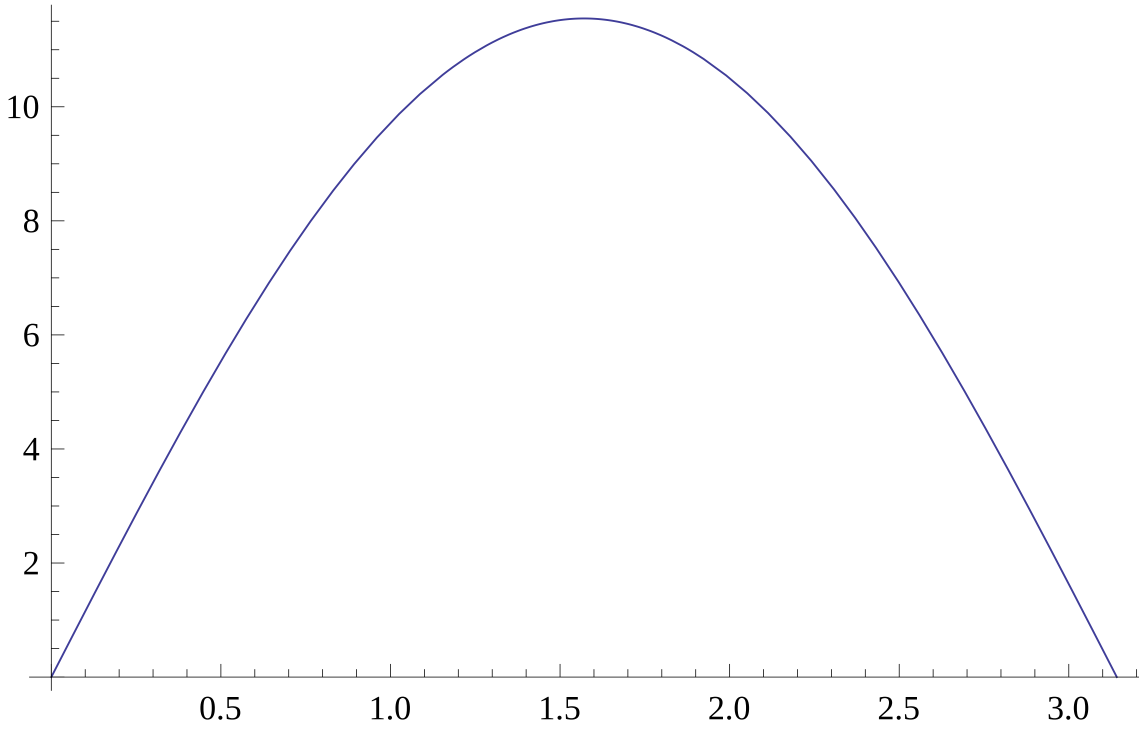

図 2.4: 両端支持の固有関数

を得る。ここで $\sin(\nu\pi) = 0$ より

$$v(x) = \sin(\nu x)\sinh(\nu\pi).$$

なので、結局

$$\tilde{v_n}(x) = \sin(nx).$$

そのグラフは次である。よって、解の公式は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)(A_n \cos(n^2 t) + B_n \sin(n^2 t)).$$

A_n, B_n は初期条件より定まる。

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx),$$

より

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(nx)dx.$$

となる。

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n \sin(nx),$$

より

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(nx)dx.$$

となる。以上より両端支持の解の公式は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)(A_n \cos(n^2 t) + B_n \sin(n^2 t)). \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(nx)dx. \\ B_n = \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} \psi(x)\sin(nx)dx. \end{cases}$$

2.4　両端自由境界条件

$\lambda \neq 0$　で両端自由のとき、境界条件は

$$v_{xx}(x) = v_{xxx}(x) = 0, \quad (x = 0, \pi).$$

$$v_x(x) = -\nu C_1 \sin \nu x + \nu C_2 \cos \nu x + \nu C_3 \sinh \nu x + \nu C_4 \cosh \nu x.$$

$$v_{xx}(x) = -\nu^2 C_1 \cos \nu x - \nu^2 C_2 \sin \nu x + \nu^2 C_3 \cosh \nu x + \nu^2 C_4 \sinh \nu x.$$

$$v_{xxx}(x) = \nu^3 C_1 \sin \nu x - \nu^3 C_2 \cos \nu x + \nu^3 C_3 \sinh \nu x + \nu^3 C_4 \cosh \nu x.$$

$x = 0$ のとき、

$$v_{xx}(0) = -C_1\nu^2 + C_3\nu^2 = 0.$$

$$v_{xxx}(0) = -C_2\nu^3 + C_4\nu^3 = 0.$$

$\nu \neq 0$ より

$$C_1 = C_3, \quad C_2 = C_4. \tag{2.16}$$

$x = \pi$ のとき、(2.16) より

$$v_{xx}(\pi) = -\nu^2 C_1 \cos \nu\pi - \nu^2 C_2 \sin \nu\pi + \nu^2 C_1 \cosh \nu\pi + \nu^2 C_2 \sinh \nu\pi = 0,$$

$$\nu^2(C_1(\cosh \nu\pi - \cos \nu\pi) + C_2(\sinh \nu\pi - \sin \nu\pi)) = 0. \tag{2.17}$$

$$v_{xxx}(x) = \nu^3 C_1 \sin \nu\pi - \nu^3 C_2 \cos \nu\pi + \nu^3 C_1 \sinh \nu\pi + \nu^3 C_2 \cosh \nu\pi = 0,$$

$$\nu^3(C_1(\sin \nu\pi + \sinh \nu\pi) + C_2(\cosh \nu\pi - \cos \nu\pi)) = 0. \tag{2.18}$$

(2.4)、(2.5) より、

$$\begin{pmatrix} \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi & \sinh \nu\pi - \sin \nu\pi \\ \sin \nu\pi + \sinh \nu\pi & \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi & \sinh \nu\pi - \sin \nu\pi \\ \sin \nu\pi + \sinh \nu\pi & \cosh \nu\pi - \cos \nu\pi \end{pmatrix}$$

とすると、$\det A \neq 0$ のとき　$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり、$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ で $v \equiv 0$ となる。

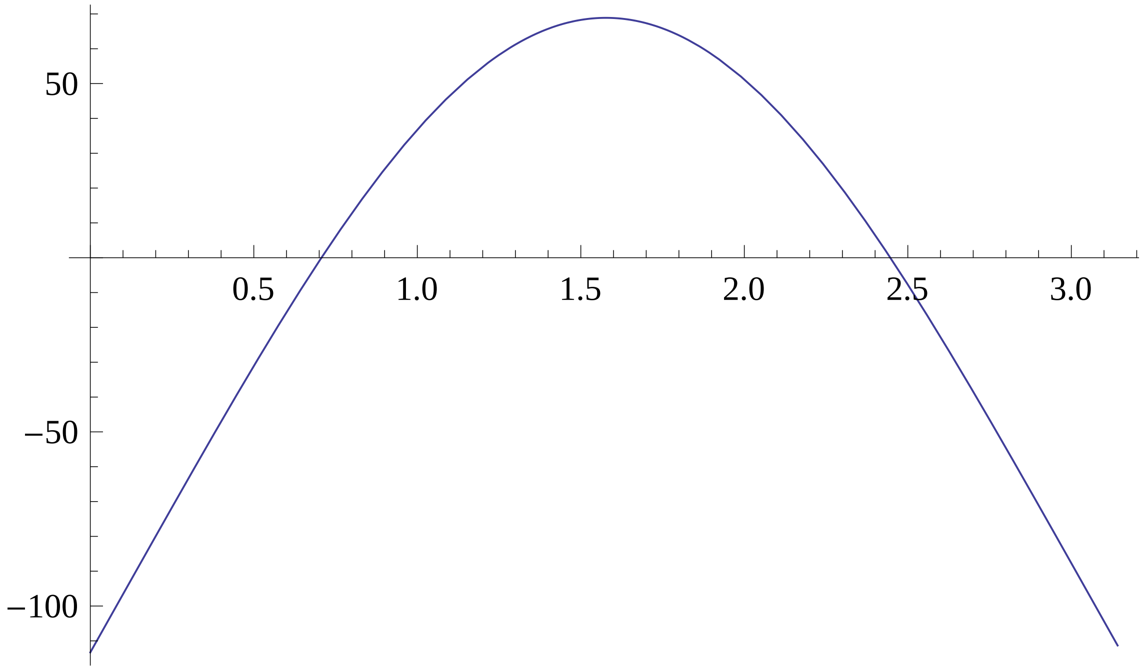

図 2.5: 両端自由の固有関数

$\det A = 0$ を考える。

$$\det A = (\cosh \nu\pi - \cos \nu\pi)^2 - (\sinh \nu\pi + \sin \nu\pi)(\sinh \nu\pi - \sin \nu\pi) = 0,$$

$$((\cosh^2 \nu\pi - \sin^2 \nu\pi) + (\sin^2 \nu\pi + \cos^2 \nu\pi) - 2\cosh \nu\pi \cos \nu\pi) = 0,$$

$$1 + 1 - 2\cosh \nu\pi \cos \nu\pi = 0,$$

$$\cosh \nu\pi \cos \nu\pi = 1.$$

よって、超越方程式　$\cosh \nu\pi \cos \nu\pi = 1$ を得る。これは、両端固定の場合と同じなので、同様に考えて、

$\nu > 0$ の範囲に無限個存在して、小さい順に $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$ とおくと

$$\lim_{x\to\infty} \nu_n = \infty, \quad \nu_n \fallingdotseq n + \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(2.17) より、

$$C_2 = -\frac{\cosh \nu\pi - \cos \nu\pi}{\sinh \nu\pi - \sin \nu\pi} C_1.$$

以上より、固有関数

$$V_n(x) = (\sin \nu_n\pi - \sinh \nu_n\pi)(\cos \nu_n x + \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n\pi - \cosh \nu_n\pi)(\sin \nu_n x + \sinh \nu_n x). \tag{2.19}$$

を得る。そのグラフは次である。よって、$\lambda > 0$ のとき解の公式は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)(A_n \cos(\nu_n^2 t) + B_n \sin(\nu_n^2 t)).$$

初期条件より、

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(x).$$

$$\begin{aligned}(\phi, V_m) = (\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n, V_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n (V_n, V_m) \\ &= A_m (V_m, V_m).\end{aligned}$$

以上より、

$$A_m = \frac{(\phi, V_m)}{(V_m, V_m)} = \frac{1}{(V_m, V_m)} \int_0^{\pi} \phi(x) V_m(x) dx$$

B_n に関しても同様に考えると、初期条件より

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 V_n(x).$$

$$\begin{aligned}(\psi, V_m) = (\sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 V_n(x), V_m(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nu_n^2 (V_n, V_m) \\ &= B_m \nu_m^2 (V_m, V_m)\end{aligned}$$

以上より、

$$B_m = \frac{(\psi, V_m)}{(V_m, V_m)} = \frac{1}{(V_m, V_m)\nu_m^2} \int_0^{\pi} \psi(x) V_m(x) dx.$$

これらをまとめると、両端自由で $\lambda > 0$ の解の公式は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)(A_n \cos(\nu_n^2 t) + B_n \sin(\nu_n^2 t)).$$

$$\begin{cases} V_n(x) = (\sin \nu_n \pi - \sinh \nu_n \pi)(\cos \nu_n x + \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n \pi - \cosh \nu_n \pi)(\sin \nu_n x + \sinh \nu_n x). \\ A_n = \frac{1}{(V_m, V_m)} \int_0^{\pi} \phi(x) V_m(x) dx. \\ B_n = \frac{1}{(V_m, V_m)\nu_m^2} \int_0^{\pi} \psi(x) V_m(x) dx. \end{cases}$$

となる。

$\lambda = 0$ のとき、

$$v(x) = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3.$$

より、

$$v_{xx}(x) = 2D_3 + 6D_4 x.$$

$$v_{xxx}(x) = 6D_4.$$

$x = 0$ のとき、

$$v_{xx}(0) = 2D_3 = 0,$$

$$v_{xxx}(0) = 6D_4 = 0,$$

より、

$$D_3 = 0, \quad D_4 = 0.$$

よって、固有関数は

$$v(x) = D_1 + D_2 x \quad (D_1, D_2 : \text{任意定数}).$$

よって、$\lambda = 0$ のとき解の公式は

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (D_1 + D_2 x)(E + Ft) \\ &= D_1 E + D_2 Ex + (D_1 + D_2 F)t. \end{aligned}$$

初期条件より、

$$\phi(x) = u(x,0) = D_1 E + D_2 Ex.$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = D_1 + D_2 F.$$

よって、

$$u(x,t) = \phi(x) + \psi(x)t.$$

以上より、両端自由の解の公式は

$$u(x,t) = \begin{cases} \phi(x) + \psi(x)t \quad (\lambda = 0). \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)(A_n \cos(\nu_n^2 t) + B_n \sin(\nu_n^2 t)) \quad (\lambda > 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_n(x) = (\sin \nu_n \pi - \sinh \nu_n \pi)(\cos \nu_n x + \cosh \nu_n x) - (\cos \nu_n \pi - \cosh \nu_n \pi)(\sin \nu_n x + \sinh \nu_n x) \\ A_n = \frac{1}{(V_m, V_m)} \int_0^{\pi} \phi(x) V_m(x) dx \\ B_n = \frac{1}{(V_m, V_m)\nu_m^2} \int_0^{\pi} \psi(x) V_m(x) dx. \end{cases}$$

第3章　差分法方程式

3.1　両端固定境界条件

3.1.1　問題の設定

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

x…棒の位置（$0 < x < \pi$）、t…時刻（$0 < t$）、u…x、t における変位

初期条件

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

境界条件

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0.$$

「空間変数」、x については、区間 $[0、\pi]$ を N 等分します：

$$h = \frac{\pi}{N}, \quad x_i = ih(i = 1, 2, \ldots, N).$$

「時間空間」、t については、刻み幅（間隔）を$\tau > 0$ とします。

$$t_n = n\tau(n = 0, 1, \ldots)$$

で定めます。

3.1.2　差分方程式

方程式 (3.1) に現れる２つの微分、ｔに関する２階偏微分$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ と、ｘに関する４階偏微分 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)$ の双方を、「２階中心差分商」「４階中心差分商」で近似すると、次の近似方程式が得られます。

$$\frac{u(x+2h,t) - 4u(x+h,t) + 6u(x,t) - 4u(x-h,t) + u(x-2h,t)}{h^4} + \frac{u(x,t+\tau) - 2u(x,t) + u(x,t-\tau)}{\tau^2} = 0.$$

そこで格子点上 (x_i, t_n) での u の近似値 U_i^n を決定する方程式として次のものが考えられる。

$$\frac{U_{i+2}^n - 4U_{i+1}^n + 6U_i^n - 4U_{i-1}^n + U_{i-2}^n}{h^4} + \frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} = 0.$$
$$(i = 2, 3, \ldots, N-2; n = 1, 2, \ldots)$$

これを変形すると、

$$U_i^{n+1} = 2(1 - \frac{3\tau^2}{h^4})U_i^n - U_i^{n-1} - \frac{\tau^2}{h^4}(U_{i+2}^n - 4U_{i+1}^n - 4U_{i-1}^n + U_{i-2}^n),$$

ここで、$\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ とおくと、

$$U_i^{n+1} = 2(1 - 3\lambda^2)U_i^n - U_i^{n-1} - \lambda^2(U_{i+2}^n - 4U_{i+1}^n - 4U_{i-1}^n + U_{i-2}^n).$$
$$(i = 2, 3, \ldots, N-2; n = 1, 2, \ldots) \quad (3.2)$$

初期条件より

$$U_i^0 = \phi(x_i). \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x_i). \quad (3.4)$$

(3.4) より、

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &\fallingdotseq u(x,0) + u_t(x,0)\tau + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}(x,0), \\ &\fallingdotseq u(x,0) + u_t(x,0)\tau + \frac{\tau^2}{2}u_{xxxx}(x,0), \end{aligned}$$

(3.3)、(3.4) より

$$\begin{aligned} &= \phi(x) + \tau\psi(x) - \frac{\tau^2}{2}\phi''''(x), \\ &= \phi(x) + \tau\psi(x) - \frac{\tau^2}{2h^4}(\phi(x+2h) - 4\phi(x+h) + 6\phi(x) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h)), \\ &= (1 - \frac{3\tau^2}{h^4})\phi(x) - \frac{\tau^2}{2h^4}(\phi(x+2h) - 4\phi(x+h) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h)) + \tau\psi(x), \end{aligned}$$

よって

$$U_i^1 = (1 - 3\lambda^2)\phi(x) - \frac{\lambda^2}{2}(\phi(x+2h) - 4\phi(x+h) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h)) + \tau\psi(x). \quad (3.5)$$

3.1.3　仮想格子点

前進差分近似や後退差分近似よりも、１階中心差分近似の方が近似のオーダーが高い。これを利用するため、「仮想格子点」を導入して、

$u_x(0,t), u_x(\pi,t)$ を共に１階中心差分近似する。

$$u_x(0,t) = u_x(x_0,t_n) \fallingdotseq \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h}.$$
$$u_x(\pi,t) = u_x(x_N,t_n) \fallingdotseq \frac{u_{N+1}^n - u_{N-1}^n}{2h}.$$

のように近似すると、境界条件より

$$\frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} = 0.$$

$$\frac{U_{N+1}^n - U_{N-1}^n}{2h} = 0.$$

よって

$$U_1^n = U_{-1}^n, \quad U_{N+1}^n = U_{N-1}^n, \quad U_0^n = U_N^n = 0. \tag{3.6}$$

(3.2) に　$i=1$　を代入すると、

$$U_1^{n+1} = 2(1-3\lambda^2)U_1^n - U_1^{n-1} - \lambda^2(U_3^n - 4U_2^n - 4U_0^n + U_{-1}^n),$$

(3.6) より

$$= 2(1-3\lambda^2)U_1^n - U_1^{n-1} - \lambda^2(U_3^n - 4U_2^n + U_1^n),$$

よって

$$U_1^{n+1} = (2-7\lambda^2)U_1^n + 4\lambda^2 U_2^n - \lambda^2 U_3^n - U_1^{n-1}. \tag{3.7}$$

(3.2) に　$i=N-1$　を代入すると、

$$U_{N-1}^{n+1} = 2(1-3\lambda^2)U_{N-1}^n - U_{N-1}^{n-1} - \lambda^2(U_{N+1}^n - 4U_N^n - 4U_{N-2}^n + U_{N-3}^n),$$

(3.6) より

$$= 2(1-3\lambda^2)U_{N-1}^n - U_{N-1}^{n-1} - \lambda^2(U_{N-1}^n - 4U_{N-2}^n + U_{N-3}^n),$$

よって

$$U_{N-1}^{n+1} = (2-7\lambda^2)U_{N-1}^n + 4\lambda^2 U_{N-2}^n - \lambda^2 U_{N-3}^n - U_{N-1}^{n-1}. \tag{3.8}$$

こうして、$N-1$ 個の未知数 $\{U_i^{n+1}\}_{i=1,2,\dots,N-1}$ に関する $N-1$ 個の連立１次方程式を得る。
　ベクトルと行列を用いると、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}.$$

ただし、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n+1} \\ U_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix}, \mathbf{U}^{n} = \begin{pmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_i^{n} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n} \\ U_{N-1}^{n} \end{pmatrix}, \mathbf{U}^{n-1} = \begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \\ \vdots \\ U_i^{n-1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n-1} \\ U_{N-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (2-7\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & & \\ 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & \\ -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 \\ & & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 \\ & & & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-7\lambda^2) \end{pmatrix}$$

3.2　両端支持境界条件

3.2.1　問題の設定

両端固定と同様に考えるが、境界条件を

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0.$$

とする。

3.2.2　仮想格子点

$u_{xx}(0,t), u_{xx}(\pi,t)$ を共に二階中心差分近似すると、

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(x_0,t_n) \fallingdotseq \frac{u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n}{h^2}.$$
$$u_{xx}(\pi,t) = u_{xx}(x_N,t_n) \fallingdotseq \frac{u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n}{h^2}.$$

のように近似すると、境界条件より、U_i^n に関する方程式より

$$\frac{U_1^n - 2U_0^n + U_{-1}^n}{h^2} = 0, \quad \frac{U_{N+1}^n - 2U_N^n + U_{N-1}^n}{h^2} = 0.$$

また、$U_0^n = U_N^n = 0$ より、

$$U_1^n = -U_{-1}^n, \quad U_{N+1}^n = -U_{N-1}^n, \quad U_0^n = U_N^n = 0. \tag{3.9}$$

(3.2) に、$i = 1$ を代入すると

$$U_1^{n+1} = 2(1-3\lambda^2)U_1^n - U_1^{n-1} - \lambda^2(U_3^n - 4U_2^n - 4U_0^n + U_{-1}^n),$$

(3.9) より

$$= (2-6\lambda^2)U_1^n - U_1^{n-1} - \lambda^2(U_3^n - 4U_2^n - U_1^n),$$

よって

$$U_1^{n+1} = (2-5\lambda^2)U_1^n + 4\lambda^2 U_2^n - \lambda^2 U_3^n - U_1^{n-1}. \tag{3.10}$$

(3.2) に　$i = N-1$　を代入すると、

$$U_{N-1}^{n+1} = 2(1-3\lambda^2)U_{N-1}^n - U_{N-1}^{n-1} - \lambda^2(U_{N+1}^n - 4U_N^n - 4U_{N-2}^n + U_{N-3}^n),$$

(3.9) より

$$= (2-6\lambda^2)U_{N-1}^n - U_{N-1}^{n-1} - \lambda^2(-U_{N-1}^n - 4U_{N-2}^n + U_{N-3}^n),$$

よって

$$U_{N-1}^{n+1} = (2-5\lambda^2)U_{N-1}^n + 4\lambda^2 U_{N-2}^n - \lambda^2 U_{N-3}^n - U_{N-1}^{n-1}. \tag{3.11}$$

こうして、$N-1$ 個の未知数 $\{U_i^{n+1}\}_{i=1,2,\ldots,N-1}$ に関する $N-1$ 個の連立 1 次方程式を得る。
　ベクトルと行列を用いると、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}.$$

ただし、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n+1} \\ U_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix}, \mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_i^n \\ \vdots \\ U_{N-2}^n \\ U_{N-1}^n \end{pmatrix}, \mathbf{U}^{n-1} = \begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \\ \vdots \\ U_i^{n-1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n-1} \\ U_{N-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
(2-5\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & & & \\
4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & & \\
-\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 \\
 & & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 \\
 & & & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-5\lambda^2)
\end{pmatrix}$$

3.3　両端自由境界条件

3.3.1　問題の設定

両端固定と同様に考えるが、境界条件を

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(\pi,t) = 0.$$

とする。

3.3.2　仮想格子点

$u_{xx}(0,t), u_{xx}(\pi,t)$ を共に二階中心差分近似すると、両端支持より

$$\begin{aligned} u_{xx}(0,t) = u_{xx}(x_0,t_n) &\fallingdotseq \frac{u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n}{h^2}. \\ u_{xx}(\pi,t) = u_{xx}(x_N,t_n) &\fallingdotseq \frac{u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

$u_{xxx}(0,t), u_{xxx}(\pi,t)$ を共に三階中心差分近似すると、

$$\begin{aligned} u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(x_0,t_n) &\fallingdotseq \frac{u_2^n - 2u_1^n + 2u_{-1}^n - u_{-2}^n}{2h^3}, \\ &= \frac{U_2^n - 2U_1^n + 2U_{-1}^n - U_{-2}^n}{2h^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xxx}(\pi,t) = u_{xxx}(x_N,t_n) &\fallingdotseq \frac{u_{N+2}^n - 2u_{N+1}^n + 2u_{N-1}^n - u_{N-2}^n}{2h^3}, \\ &= \frac{U_{N+2}^n - 2U_{N+1}^n + 2U_{N-1}^n - U_{N-2}^n}{2h^3}. \end{aligned}$$

境界条件より、

$$\begin{aligned} \frac{U_1^n - 2U_0^n + U_{-1}^n}{h^2} &= 0, \\ U_{-1}^n &= 2U_0^n - U_1^n. \qquad (3.12) \\ \frac{U_{N+1}^n - 2U_N^n + U_{N-1}^n}{h^2} &= 0, \\ U_{N+1}^n &= 2U_N^n - U_{N-1}^n. \qquad (3.13) \end{aligned}$$

$$\frac{U_2^n - 2U_1^n + 2U_{-1}^n - U_{-2}^n}{2h^3} = 0,$$

(3.12) より、

$$\begin{aligned} U_{-2}^n &= U_2^n - 2U_1^n + 4U_0^n - 2U_1^n, \\ &= 4U_0^n - 4U_1^n + U_2^n. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

$$\frac{U_{N+2}^n - 2U_{N+1}^n + 2U_{N-1}^n - U_{N-2}^n}{2h^3} = 0,$$

(3.13) より、

$$\begin{aligned} U_{N+2}^n &= 4U_N^n - 2U_{N-1}^n - 2U_{N-1}^n + U_{N-2}^n, \\ &= 4U_N^n - 4U_{N-1}^n + U_{N-2}^n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.2) に $i = 0$ を代入すると、

$$U_0^{n+1} = -\lambda^2 U_{-2}^n + 4\lambda^2 U_{-1}^n + (2 - 6\lambda^2)U_0^n + 4\lambda^2 U_1^n - \lambda^2 U_2^n - U_0^{n-1},$$

(3.12)(3.14) より

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} = -\lambda^2(4U_0^n - 4U_1^n + U_2 - n) + 4\lambda^2(2U_0^n - U_1^n) + (2 - 6\lambda^2)U_0^n \\ + 4\lambda^2 U_1^n - \lambda^2 U_2^n - U_0^{n-1}, \end{aligned}$$

よって、

$$U_0^{n+1} = (2 - 2\lambda^2)U_0^n + 4\lambda^2 U_1^n - 2\lambda^2 U_2^n - U_0^{n-1}. \tag{3.16}$$

(3.2) に $i = 1$ を代入すると、

$$U_1^{n+1} = -\lambda^2 U_{-1}^n + 4\lambda^2 U_0^n + (2 - 6\lambda^2)U_1^n + 4\lambda^2 U_2^n - \lambda^2 U_3^n - U_1^{n-1},$$

(3.12) より

$$= -\lambda^2(2U_0^n - U_1^n) + 4\lambda^2 U_0^n + (2 - 6\lambda^2)U_1^n + 4\lambda^2 U_2^n - \lambda^2 U_3^n - U_1^{n-1},$$

よって、

$$U_1^{n+1} = 2\lambda^2 U_0^n + (2 - 5\lambda^2)U_1^n + 4\lambda^2 U_2^n - \lambda^2 U_3^n - U_1^{n-1}. \tag{3.17}$$

(3.2) に $i = N - 1$ を代入すると、

$$U_{N-1}^{n+1} = -\lambda^2 U_{N-3}^n + 4\lambda^2 U_{N-2}^n + (2 - 6\lambda^2)U_{N-1}^n + 4\lambda^2 U_N^n - \lambda^2 U_{N+1}^n - U_{N-1}^{n-1},$$

(3.13) より

$$= -\lambda^2 U_{N-3}^n + 4\lambda^2 U_{N-2}^n + (2 - 6\lambda^2)U_{N-1}^n + 4\lambda^2 U_N^n - \lambda^2(2U_N^n - U_{N-1}^n) - U_1^{n-1},$$

よって、

$$U_{N-1}^{n+1} = -\lambda^2 U_{N-3}^n + 4\lambda^2 U_{N-2}^n + (2 - 5\lambda^2)U_{N-1}^n + 2\lambda^2 U_N^n - -U_{N-1}^{n-1}. \tag{3.18}$$

(3.2) に $i = N$ を代入すると、

$$U_N^{n+1} = -\lambda^2 U_{N-2}^n + 4\lambda^2 U_{N-1}^n + (2 - 6\lambda^2)U_N^n + 4\lambda^2 U_{N+1}^n - \lambda^2 U_{N+2}^n - U_N^{n-1},$$

(3.13)(3.15) より

$$\begin{aligned}U_N^{n+1} &= -\lambda^2 U_{N-2}^n + 4\lambda^2 U_{N-1}^n + (2-6\lambda^2)U_N^n + 4\lambda^2(2U_N^n - U_{N-1}^n) \\ &\quad - \lambda^2(4U_N^n - 4U_{N-1}^n + U_{N-2}^n) - U_N^{n-1},\end{aligned}$$

よって、

$$U_N^{n+1} = -2\lambda^2 U_{N-2}^n + 4\lambda^2 U_{N-1}^n + (2-2\lambda^2)U_N^n - U_N^{n-1}. \tag{3.19}$$

こうして、$N+1$ 個の未知数 $\{U_i^{n+1}\}_{i=0,1,2,\ldots,N}$ に関する $N+1$ 個の連立 1 次方程式を得る。ベクトルと行列を用いると、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}.$$

ただし、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n+1} \\ U_{N-1}^{n+1} \\ U_N^{n+1} \end{pmatrix}, \mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_i^n \\ \vdots \\ U_{N-2}^n \\ U_{N-1}^n \\ U_N^n \end{pmatrix}, \mathbf{U}^{n-1} = \begin{pmatrix} U_0^{n-1} \\ U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \\ \vdots \\ U_i^{n-1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n-1} \\ U_{N-1}^{n-1} \\ U_N^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (2-2\lambda^2) & 4\lambda^2 & -2\lambda^2 & & & & & & \\ 2\lambda^2 & (2-5\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & & \\ -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-6\lambda^2) & 4\lambda^2 & -\lambda^2 \\ & & & & & -\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-5\lambda^2) & 2\lambda^2 \\ & & & & & & -2\lambda^2 & 4\lambda^2 & (2-2\lambda^2) \end{pmatrix}$$

第4章　プログラム（両端固定境界条件）

```
/*
 * 棒の振動のシュミレーション---両端固定の場合 (仮想格子点)
 *
 *
 *入力の目安：
 *n は適度に大きめ（1000 とか 10000）
 *λは 0.5
 *Tmax は適当に 100000 とか大きめに
 *Δ t は 0.001 くらい
 *固有値の近似値は 10.5（0.5+n(n は正の整数)）
 *
*/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define G_DOUBLE
#include <glsc.h>
#include <matrix.h>

void copy_vector(int,vector,vector);
int msleep(int);
/* nu は ν */
/* newton 法によりνを求める。*/
int i;
double pi, nu ,du;

double F(double nu)
{
 return  cos(nu*pi) - 1/cosh(nu*pi);
}

double dF(double nu)
{
  return -pi*sin(nu*pi)+pi*sinh(nu*pi)/(cosh(nu*pi)*cosh(nu*pi));
}

double ev_near(double nu)
{
  for (i = 0; i < 10; i++) {
    du = -F(nu) / dF(nu);
    nu += du;
    printf("F(%24.15e)=%9.2e\n",nu,F(nu));
    if (fabs(du/nu) < 1e-14)
      break;
  }
  return nu;
}
```

```
int main(void)
{
  /* N は区間の分割数 */
  int N;
  int i,nfunc;
  long long int n, nmax;
  /* lambda は λ tau は τ */
  double lambda,Tmax,h,tau,lambda2;
  /* u1[i]=u_{i,j-1}
   * u2[i]=u_{i,j}
   * u3[i]=u_{i,j+1}
   */
  vector u1,u2,u3;
  double phi(double,int),psi(double,int);
  double win_width,win_height,w_margin,h_margin;
  char message[100];
  double maxphi;
  double dt;
  int skip;

  pi = 4.0 * atan(1.0);

  /* n は 1000 とか 10000 とか */
  printf("N=");
  scanf("%d",&N);
  u1 = new_vector(N+1);
  u2 = new_vector(N+1);
  u3 = new_vector(N+1);
  /* λについてはλ= 0.5 が良い結果を出す */
  printf("λ=");
  scanf("%lf", &lambda);
  /* Tmax は最終時刻なので、長く計算したい場合は大きな値をいれる */
  printf("Tmax=");
  scanf("%lf", &Tmax);

  lambda2 = lambda*lambda;
  h = pi / N;
  tau = lambda*h*h;
  printf("τ=%g\n", tau);
  printf("Δt="); scanf("%lf", &dt);
  skip = rint(dt / tau);

  /* 初期値を選ぶ */
  printf("0:固有関数,1:定常波,2:割れる山,3:滑らかな山,4:ホイヘンスの原理反例,\n");
  printf("nfunc(初期値の種類 0..5)=");
  scanf("%d", &nfunc);
  if (nfunc == 0) {
    printf("固有値の近似値を入力してください");
    scanf("%lf", &nu);
    nu = ev_near(nu);
    printf("固有値=%20.15f\n", nu);
  }
  /* 初期値 */
  /* u_{i,0}=φi */
  maxphi = 0.0;
```

```
for(i = 0;i <= N;i++) {
  u1[i] = phi(i*h,nfunc);
  if (fabs(u1[i]) > maxphi)
    maxphi = fabs(u1[i]);
  printf("%d %f\n", i, u1[i]);
}
if (maxphi == 0)
  maxphi = 1;
/* u_{i,1}=(1-3 λ)... */
for(i = 2;i <= N - 2; i++)
  u2[i] = (1-3*lambda2)*u1[i]-lambda2/2*(u1[i+2]-4*u1[i-1]-4*u1[i+1]+u1[i-2])+tau*psi(i*h,nfunc);
u2[1]= (2-7*lambda2)*u1[1]+4*lambda2*u1[2]-lambda2*u1[3]-tau*psi(h,nfunc);
u2[N-1] = (2-7*lambda2)*u1[N-1]+4*lambda2*u1[N-2]-lambda2*u1[N-3]-tau*psi(h,nfunc);
u2[0] = u2[N] = 0.0;

/* ********** グラフィックスの準備 ********** */
/* メタファイル名は  "WAVE" ,
 * ウインドウのサイズは、
   横 win_width  + 2 * w_margin, 縦 win_height + 2 * h_margin */

win_width = 200.0; win_height = 200.0; w_margin = 10.0; h_margin = 10.0;
g_init("WAVE", win_width + 2 * w_margin, win_height + 2 * h_margin);

/* 画面とメタファイルの両方に記録する */

g_device(G_BOTH);

/* 座標系の定義：[-0.1,1.1] × [-1.1,1.1]  という閉領域を表示する */
g_def_scale(0,
    -0.1, pi+0.1, -1.1*maxphi, 1.1*maxphi,
    w_margin,h_margin,win_width,win_height);

/* 線を二種類用意する */

g_def_line(0,G_BLACK, 0, G_LINE_SOLID);
g_def_line(1,G_BLACK, 0, G_LINE_DOTS);

/* 表示するための文字列の属性を定義する  */

g_def_text(0,G_BLACK,3);

/* 定義したものを選択する */
g_sel_scale(0);g_sel_line(0);g_sel_text(0);

/* タイトルと入力パラメーターを表示する */
g_text(30.0,30.0,
       "wave equation, homogeneous Dirichlet boundary condition ");
sprintf(message, "N=%d, lambda=%g, Tmax=%g", N, lambda,Tmax);
g_text(30.0,60.0,message);

/* 座標軸を表示する */
g_sel_line(1);
g_move(-0.1,0.0);g_plot(1.1,0.0);
g_move(0.0,-0.1);g_plot(0.0,1.1);
g_sel_line(0);
```

```
  /* t=0 でのグラフ */
  g_move(0.0,u1[0]);
  for(i = 1; i <= N; i++)
    g_plot(i * h,u1[i]);
  /* t=t1=τ でのグラフ */
  g_cls();
  g_move(0.0,u2[0]);
  for(i = 1; i <= N; i++)
    g_plot(i * h,u2[i]);

  nmax = rint(Tmax / tau);
  printf("nmax=%Ld\n", nmax);

  /* 時間に関するループ */
  for(n = 1; n <= nmax; n++){
    for(i = 2; i <= N - 2; i++)
      u3[i] = 2*(1.0-3*lambda2)*u2[i]-u1[i]-lambda2*(u2[i+2]-4*u2[i+1]-4*u2[i-1]+u2[i-2]);
    u3[0]=u3[N]=0.0;
    u3[1] = (2-7*lambda2)*u2[1]-u1[1]+4*lambda2*u2[2]-lambda2*u2[3];
    u3[N-1] = (2-7*lambda2)*u2[N-1]-u1[N-1]+4*lambda2*u2[N-2]-lambda2*u2[N-3];

    if (n % skip == 0) {
#ifdef USESLEEP
    /* ５倍の秒数待つ */
      msleep(5 * (int) (tau * 1000));
#endif
      /* t=t_{n+1}=(n+1) τ でのグラフ */
      g_cls();
      g_move(0.0,u3[0]);
      for(i = 1;i <= N; i++)
        g_plot(i*h, u3[i]);
    }
    /* u1 <- u2, u2<- u3 */
    copy_vector(N + 1,u1,u2);
    copy_vector(N + 1,u2,u3);
  }
  printf("終りました。X の場合はウインドウをクリックしてください。\n");
  g_sleep(-1.0);

  /* ウインドウを閉じる */
  g_term();
  return(0);
}

/* 初期値 (nfunc=3,4) を作るための道具 */
double sqr(double x)
{
  return x * x;
}

double mountain(double x)
{
  double a = 0.4, b = 0.6;
  if (x <= a || x >= b)
    return 0;
  else {
```

```
    double c = sqr(sqr(2 / (b - a)));
    return c * sqr((x - a) * (x - b));
  }
}

/* 初期値 (nfunc=5) を作るための道具 */

/* これは初期値ではない！ */
double f(double x)
{
  if (x <= 0)
    return 0;
  else
    return exp(-1.0 / x);
}

/* これは初期値ではない！ */
double g(double x)
{
  return f(x) / (f(x) + f(1-x));
}

/*
 *            1   (|x|<a)
 * h_ab(x) = {
 *            0   (|x|>b)
 *
 */
double h_ab(double x, double a, double b)
{
  return g((x + a)/(a - b))* g((-x + a)/(a - b));
}

/* 初期値 φ=u(・,0) */
double phi(double x, int nfunc)
{
  switch (nfunc){
  case 0:
    return (sin(nu*pi)-sinh(nu*pi))*(cos(nu*x)-cosh(nu*x))
          -(cos(nu*pi)-cosh(nu*pi))*(sin(nu*x )-sinh(nu*x));
    break;
  case 1:
    return sin(x);
    break;
  case 2:
    x /= pi;
    if (x > 0.375 && x <= 0.5)
      return 8.0 * x - 3.0;
    else if (x > 0.5 && x < 0.625)
      return -8.0 * x + 5.0;
    else
      return 0.0;
    break;
  case 3:
    x /= pi;
    return mountain(x);
```

```
    break;
  case 4:
    x /= pi;
    return mountain(x);
    break;
  case 5:
    {
      double a = 0.3, b = 0.2;
      x /= pi;
      return h_ab(x - 0.5, a,b);
    }
    break;
  default:
    return 0.0;
  }
}

/* 初期値 Ψ=ut(・,0) */
double psi(double x, int nfunc)
{
  x /= pi;
  if (nfunc == 1)
    return 0.0;
  else if (nfunc == 2)
    return 0.0;
  else if (nfunc == 3)
    return 0.0;
  else if (nfunc == 4)
    return 5 * mountain(x);
  else if (nfunc == 5)
    return 0.0;
  else
    return 0.0;
}

/*
 * ベクトル b をベクトル a にコピー
 */
void copy_vector(int N, vector a, vector b)
{
  int i;
  for(i = 0; i < N; i++)
    a[i] = b[i];
  return;
}
```

関連図書

[1] クーラン・ヒルベルト　『数理物理学の方法１』　斎藤利弥　監訳　丸山滋弥　訳　（東京図書）

[2] クーラン・ヒルベルト　『数理物理学の方法２』　斎藤利弥　監訳　銀林浩　訳　（東京図書）

[3] 神保秀一　『偏微分方程式入門』　（共立出版）

[4] 桂田祐史　『波動方程式に対する差分法』

[5] 桂田祐史　『熱方程式に対する差分法　－区間における熱方程式－』