2009 年度卒業研究レポート

ギターの音の Fourier 解析

明治大学理工学部数学科
山田　祐二

2010 年 3 月 1 日

目 次

第1章　はじめに

今回私は「音の解析」をテーマに研究をした。楽器の多くは1次元波動方程式でモデル化できる。今までに熱方程式、波動方程式の数値解析を学んだので、このテーマに興味を持った。

この研究では、ギターの音について解析を行う。録音したギターの音をコンピューターで解析し、音の周波数解析や音名、和音の判別をすることを目標に行った。

第2章　Mathematicaで使用する機能

録音した音のWAVEファイルを、Mathematicaという数式処理ソフトを使用して解析を行った。

Mathematicaでは音をSoundという形式で扱える。
今回使用した主な機能は次の通りである。

WAVEファイルの入出力

`a=Import["WAVEファイル名"]`

WAVEファイルのデータを変数aに入力する。

`Export["WAVEファイル名",a]`

Soundデータaを WAVEファイルに出力する。

離散Fourier変換

`Fourier[数値リスト]`

長さnの数値リスト $\{u_r\}$ の離散Fourier変換 $\{v_s\}$ を求める。ただし $v_s = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{r=1}^{n} u_r \exp(2\pi i(r-1)(s-1)/n)$

`InverseFourier[数値リスト]`

長さnの数値リスト $\{v_s\}$ の逆離散Fourier変換 $\{u_r\}$ を求める。ただし $u_r = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n} v_s \exp(-2\pi i(r-1)(s-1)/n)$

リスト内の要素の位置を求める

`Ordering[数値リスト,-n]`

数値リストから値の大きい n 個の要素の位置を表示する。

棒グラフを表示

`BarChart[数値リスト,BarLabels->{a,b,c, … }]`

数値リストを棒グラフで表示する。BarLabels でグラフの名前を変更できる。

リストから条件を満たす要素の選択

`Select[リスト, 評価式 &]`

リストから評価式を満たす要素を表示する。

例えば、`Select[{1,2,3,4,5},#>3 &]`
とするとリストから 3 より大きい`{4,5}`を返す。

第3章　Fourier級数展開による周波数の求め方

周波数を求めるために、十分長い周期（ここでは1とする[1]）の周期関数のFourier級数変換が利用できる。なぜ周波数が求まるのか、基本周波数 f の正弦波 $u(t) = \exp(2\pi ift)$ の Fourier 係数を考えてみる。

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 u(t)\exp(-2\pi int)dt \\ &= \int_0^1 \exp(2\pi ift)\exp(-2\pi int)dt \\ &= \int_0^1 \exp\{2\pi it(f-n)\}dt. \end{aligned}$$

$A_n = 2\pi(f-n)$ として

$$c_n = \int_0^1 \exp(iA_nt)dt = \frac{1}{iA_n}[\exp(iA_nt)]_0^1 = \frac{1}{iA_n}\{\exp(iA_nt)-1\}.$$

絶対値をとって

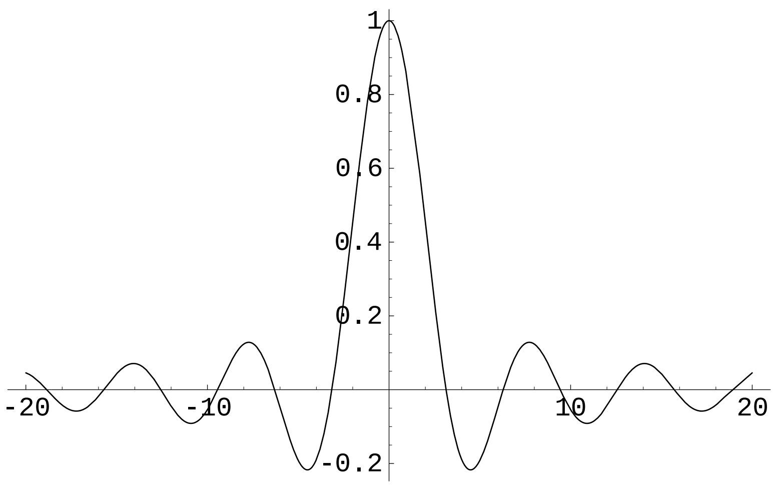
$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{|A_n|}\left|\exp(iA_nt)-1\right| = \frac{1}{|A_n|}\left|\sin A_n + i\cos A_n - 1\right| \\ &= \frac{1}{|A_n|}\sqrt{(1-\cos A_n)^2+\sin^2 A_n} = \frac{1}{|A_n|}\sqrt{2(1-\cos A_n)}. \end{aligned}$$

$$= \left|\frac{\sin\,(A_n/2)}{A_n/2}\right|.$$

[1] ギターの周波数は数百 Hz 程度なので 1 秒でも十分長い。

ここで $\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフを考えると

$\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ



したがって $\left|\dfrac{A_n}{2}\right| = \pi\,|f - n|$ が最小のとき、つまり $n \fallingdotseq f$ のとき値が最大になる。

よってピークが現れる位置 n が周波数 f の推定値となる（松山 [1]）。

ここでは周期を 1 にしたが、この周期を変えることで解析の精度が変わってくる。周期 1 では周波数は 1Hz 刻みで表示されるが、例えば、周期 10 にすれば周波数は 0.1Hz 刻みで知ることができる（リストの番号を $\frac{1}{10}$ すれば周波数になる）。そのためには WAVE ファイルから 10 秒分を取り出す必要があるが、ギターの音などは減衰して 10 秒分とることは難しいので 1 秒が妥当である。

第4章　解析する音と手順

4.1　解析する音について

Windows パソコンにマイクを接続し、Windows サウンドレコーダーを使用して録音した、ギターの音 1 オクターブ分と和音・不協和音を解析する。録音の形式は、サンプリング周波数 44.1kHz、量子化ビット数 16 ビット、ステレオである。

解析する音のデータとして次のものを用意した。

(a) 単音:ド（5 弦 3 フレット）, レ（5 弦 5 フレット）, ミ（5 弦 7 フレット）,
ファ（5 弦 8 フレット）, ソ（5 弦 10 フレット）, ラ（4 弦 7 フレット）,
シ（3 弦 4 フレット）, ド（3 弦 5 フレット）

(b) 和音：ソドミ（2 弦 1 フレット,1・3 弦開放）
ドミソ（1 弦 3 フレット,2・3 弦 5 フレット）
ミソド（1・2 弦 8 フレット,3 弦 9 フレット）

(c) 不協和音：シドファ（1・2 弦 1 フレット,3 弦 4 フレット）
シレファ（1 弦 1 フレット,2 弦 3 フレット,3 弦 4 フレット）

4.2　解析の流れ

次の流れでギターの音の解析を行う。

1．ファイル入力のために WAVE ファイルがあるフォルダに移動する。

⇓

2．解析する WAVE ファイルをインポートする。

⇓

3．Sound データから音声信号の入ったリストを取り出す。

⇓

4．リストの信号１秒分を離散 Fourier 変換し、絶対値をとる。

⇓

5．グラフに表示する。

⇓

6．グラフのピークの値を調べる（ピークの位置が周波数に対応する)。

⇓

7．この音の基本周波数と音名を調べる。

4.3 解析の具体例

それでは Mathematica を使って解析をしてみよう。

例：ギターの音ド（5 弦 3 フレット）

ファイル名:guitar1.wav

(サンプリング周波数 44.1kHz, 量子化ビット数 16 ビット, ステレオ)

手順１：フォルダの移動

解析したい WAVE ファイルがあるフォルダに移動する。

```
SetDirectry["c:\cygwin\home\yamada\sotsuken\oto"]
```

BarChart に必要なパッケージの宣言もしておく。

```
Needs["Graphics'Graphics'"]
```

手順２：WAVE ファイルの取り込み

WAVE ファイル「guitar.wav」を取り込む。

```
a=Import["guitar1.wav"];
```

guitar.wav をインポートし変数 a に代入する。

手順３：Sound データから音声信号 1 秒分のリストを取り出す

サンプリング周波数が 44.1kHz のため、1 秒分の個数は 44100 個である。

guitar1.wav は録音を開始してから弦をはじいたので、音の鳴り始めまで間がある。そのため guitar1.wav のデータを 62800 番目から 1 秒分取り出した。

```
b=Take[a[[1,1,1]],{62800,62800+44100-1}];
```

guitar.wav の内容を変数 b に代入する。b は guitar.wav の Sound データ、62800 番目から 1 秒分が入る。a[[x]] はリスト a の x 番目の要素を抽出する。a[[1,1,1]] は a[[1]][[1]][[1]] のことである。

手順４：離散 Fourier 変換し絶対値をとる

取り出したデータ 1 秒分を離散 Fourier 変換するし絶対値をとる。

```
c=Abs[Fourier[b]];
```

変数 c に b の離散 Fourier 変換の絶対値が入る。

〇次のような関数を定義すれば、手順 2〜4 をまとめて実行することができる。

```
wav[c_,c1_]:=
Abs[Fourier[Take[c[[1,1,1]],{c1,c1+44100-1}]]];
```

c に Import[”ファイル名”] など Sound を表わす式、c1 にリストから取り出す最初の番号を入力する。

```
aft=wav[Import["guitar1.wav"],62800];
```

aft には、guitar.wav の 62800 番目から 1 秒分を離散 Fourier 変換した絶対値が入る。

ギターの周波数は数百 Hz であるから、リストの 1600 番目までを調べれば十分である。aft のはじめの 1600 個をグラフに表示してみよう。

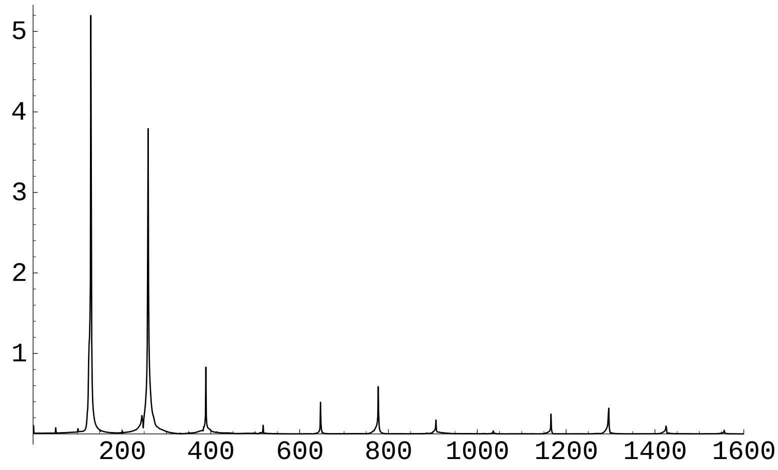
手順５：グラフに表示する

aft をグラフに表示する。

```
spec[c_]:=
ListPlot[c,PlotJoined->true,PlotRange->{{1,1600},All}];
```

と定義し、aft の値をグラフに表示する。

```
spec[aft]
```



aft の周波数スペクトル

グラフにいくつかピークがあらわれている。このピークの点の位置を見てみよう。

手順６：ピークを調べる

使用する関数に何度もでてくるため定義をしておく。

```
half[c_]:=IntegerPart[Length[c]/2];
```

リストの半分の長さを求める。

```
max1[c_]:=
Table[Ordering[Take[c,{1,half[c]}],-1]-7+i,{i,1,13}];
```

第 1 ピークと前後 6 点のリストを作る。

ピーク前後の点は、ピークにつられて大きくなっていると思われる。そのためピーク前後の点は無視して、値の大きい 5 つ取り出す。

ReplacePart を使って、aft のピーク前後 6 点に 0 を代入していく。

```
ReplacePart[aft,0,Drop[max1,{7}]]
```

この作業を繰り返してピークを 5 つ取り出す。

次のような関数を定義し、ピークの値が大きい点の番号を５つ表示する。

```
freq[c_]:=
Sort[Ordering[Take[ReplacePart[ReplacePart[ReplacePart[
ReplacePart[c,0,Drop[max1[c],{7}]],0,
Drop[Table[Ordering[Take[
ReplacePart[c,0,max1[c]],{1,half[c]}],-1]+i,{i,-6,6}],{7}]],0,
Drop[Table[Ordering[Take[
ReplacePart[c,0,
Table[Ordering[Take[ReplacePart[c,0,max1[c]],{1,half[c]}],-1]+i,
{i,-6,6}]],{1,half[c]}],-1]+i,{i,-6,6}],{7}]],0,
Drop[Table[Ordering[Take[
ReplacePart[c,0,Table[Ordering[Take[
ReplacePart[c,0,Table[Ordering[Take[
ReplacePart[c,0,m1[c]],
{1,half[c]}],-1]+i,{i,-6,6}]],{1,half[c]}],-1]+i,{i,-6,6}]],
{1,half[c]}],-1]+i,{i,-6,6}],{7}]],{1,half[c]}],-5]];
```

```
a=freq[aft]
```

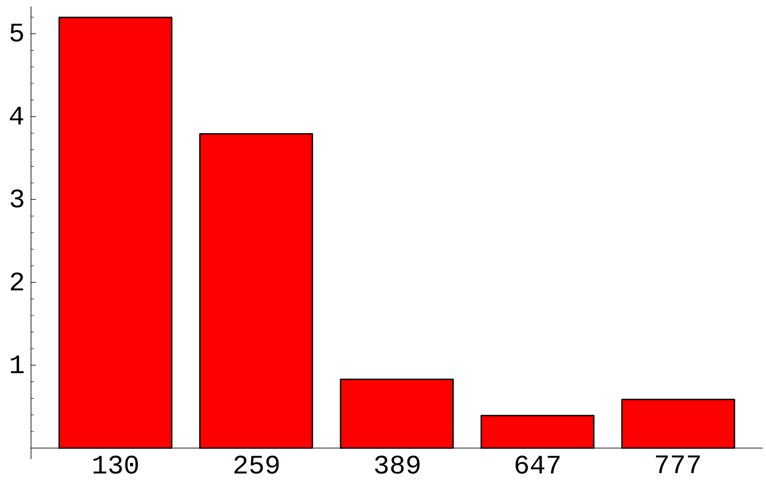
```
{130, 259, 389, 647, 777}
```

ピークの値を棒グラフで表示して、それぞれの大きさを比べてみよう。

```
bgh[c_,c1_]:=BarChart[c[[c1]]];
```

と定義し、上で求めたピークの値を棒グラフで表示する。

```
bgh[aft,a]
```



ピークの比較

130、259 が特に大きな値をとっている。

Mathemateca の離散 Fourier 変換は、番号を 1 ではなく 0 から数えているため、番号が 1 ずれる。

したがってこの音にあらわれる周波数は、基本周波数・129Hz、2 倍音・258Hz、3 倍音・388Hz である。

基本周波数は、グラフの第 1 ピークと対応しているはずである。しかし基本周波数の倍音が、第 1 ピークとなる場合があった。そこで値の大きい 2 つのうち低い周波数を基本周波数とした。

手順 7：音名を調べる

周波数と音名のリストを作り、求めた周波数と比較し音名を調べる。

平均律を用いて、既知の周波数 65.406Hz・ド（小橋 [2]）を基準に、周波数と音名のリストを 5 オクターブ分作成する。

```
on={si,do,do',re,re',mi,fa,fa',so,so',ra,ra'};
```

♯を' で表した。

```
onkai:=
Table[{65.406 * 2^((i-1)/12),on[[Mod[i,12]+1]]},{i,1,60}];
```

平均律を用いているため、各周波数の差は $2^{1/12}$ である。{{65.406,do}} のように周波数と音名のリストが作成される。

このリストの周波数と、解析した音の周波数を比べてみよう。
誤差を考慮して解析した音の周波数に幅を持たせて、リストの周波数と比べる。周波数の幅にリストの周波数が入れば、その周波数と音名が表示される。

```
oto[c_]:=
Table[Select[onkai,c[[i]]+3>#[[1]]>c[[i]]-3 &],{i,1,5}]
```

と定義し、求めた 5 つの周波数の音名を表示する。

```
oto[a]
```

```
{{{130.812, do}}, {{261.624, do}}, {{391.993, so}}, {}, {}}
```

求めた周波数の音名は、基音 130.81Hz のド・倍音 261.62Hz のド・3 倍音 391.987Hz のソであり、この音はド（130.81Hz）である。

基本周波数 f_1 の 2^n 倍、$f_2, f_4, f_8 \cdots$ は f_1 と同じ音名になるが、それ以外では別の音名が現れる。この音の場合、基音は「ド」なので $f_2, f_4, f_8 \cdots$ は「ド」である。では 2^n 倍以外の音名は何だろうか。

f_3 は上にある通り「ソ」であるから、f_6 も「ソ」である。これは、$2^{\frac{7}{12}} * 2 = 2.996$、$2^{\frac{7}{12}} * 4 = 5.993$ であるからかなりの精度で正しい。

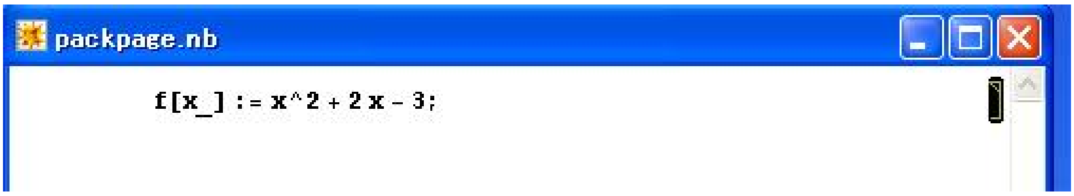
f_5 は周波数 654.05Hz なので、近いものは「ミ」（659.25Hz）である。

f_7 は周波数 915.67Hz だが、これに近い周波数は 932.32Hz・ラ $\sharp$ だが、約 20Hz 差があるため「ラ $\sharp$」とは言えず、音名はわからない。

第5章　パッケージの作成

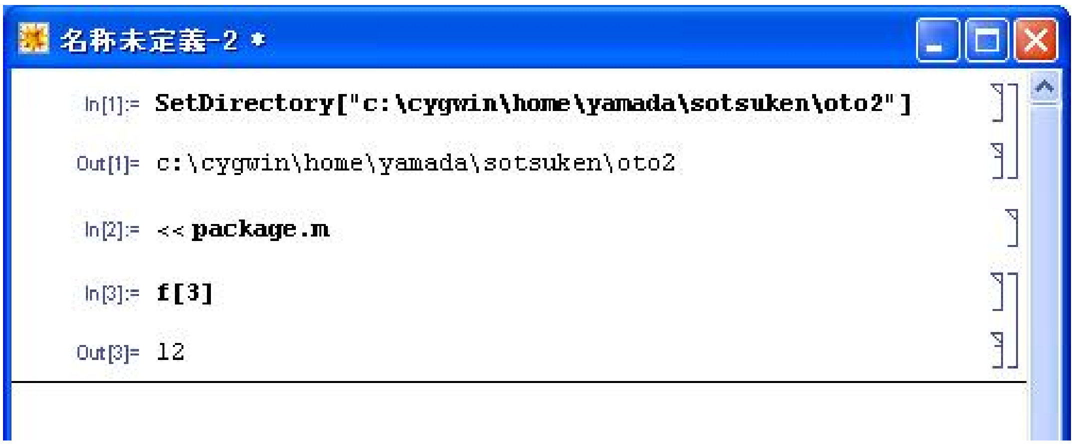
今回のようにMathematicaで解析を行う場合、同じ作業の繰り返しが多いため、よく使う関数をパッケージ作っておくと便利である。
まずMathematicaを開き、定義したい関数を入力する。

名前を付けて保存をする。ここでは「package.nb」で保存する。
パッケージで使用したい関数を選択し、ツールバーの
「セル」→「セルのプロパティ」→「初期化セル」を選択する。



すると右にある] に縦棒が入るので、この状態で保存をする。自動保存パッケージを作成するか質問されるので、「作成する」を選択する。
これでフォルダに「package.m」というパッケージが作られた。

使い方は、パッケージがあるフォルダに移動し「<<package.m」を実行する。

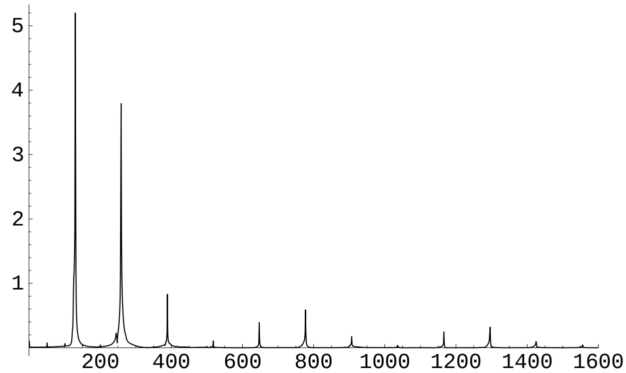


パッケージを使用することで関数の定義部分がなくなり、実行結果が見やすくなる。

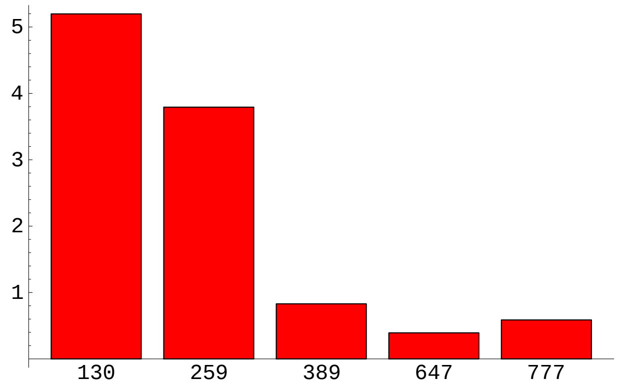
第6章　解析結果

ギターの音1オクターブ分と和音・不協和音と、ピアノの和音、音叉、鈴(りん)の解析結果をまとめる。

ギター　ド（5弦3フレット）



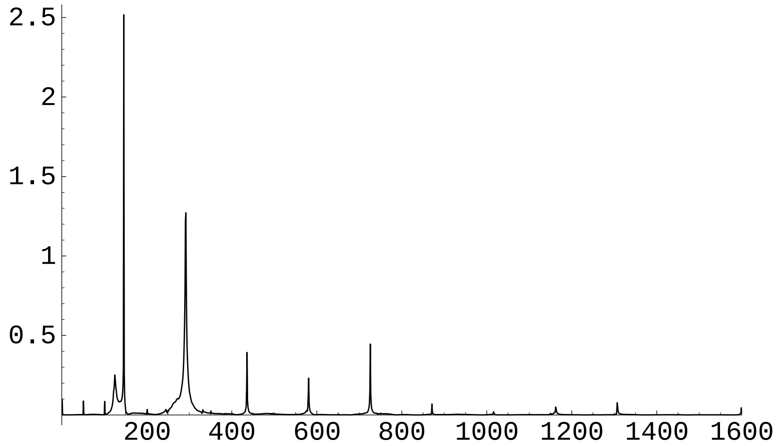
スペクトル



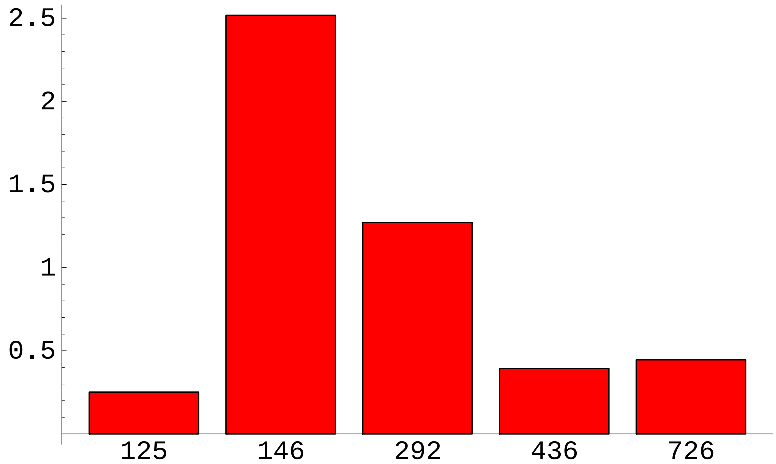
ピークの値

ピークの位置：{130, 259, 389, 647, 777}
音階：
{{{130.812, do}}, {{261.624, do}}, {{391.993, so}}, {}, {}}

ギター　レ（5弦5フレット）



スペクトル



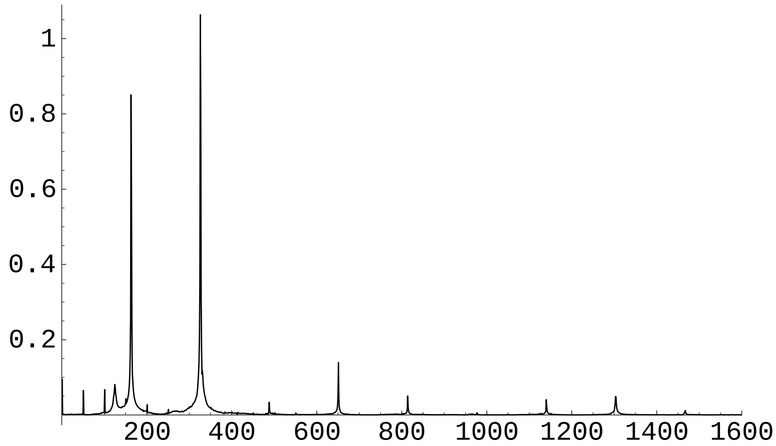
ピークの値

ピークの位置：{125, 146, 292, 436, 726}

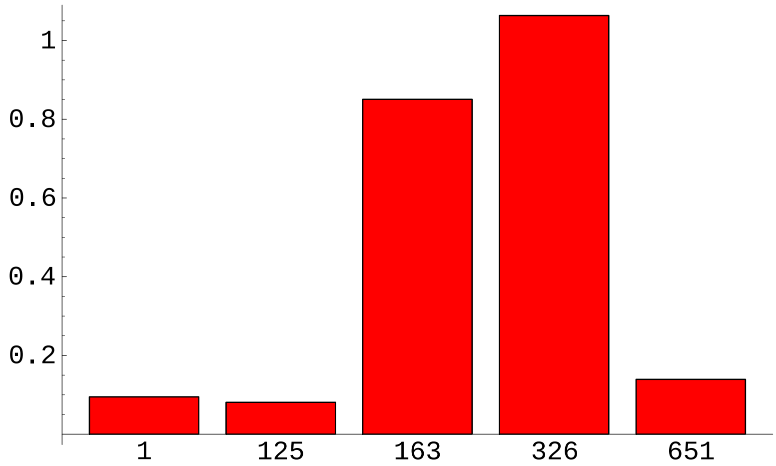
音階：
{{{123.47, si}}, {{146.832, re}}, {{293.663, re}}, {}, {}}

123.47Hz・シは値が小さいため、基本周波数は146.832Hz・レである。

ギター　ミ（5弦7フレット）



スペクトル



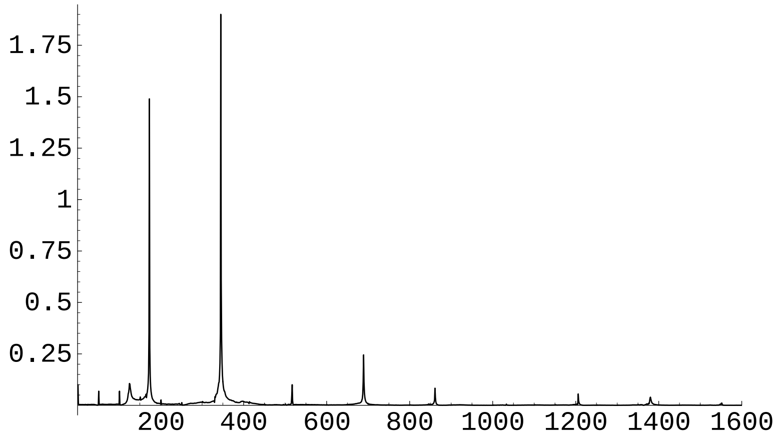
ピークの値

ピークの位置：{1, 125, 163, 326, 651}

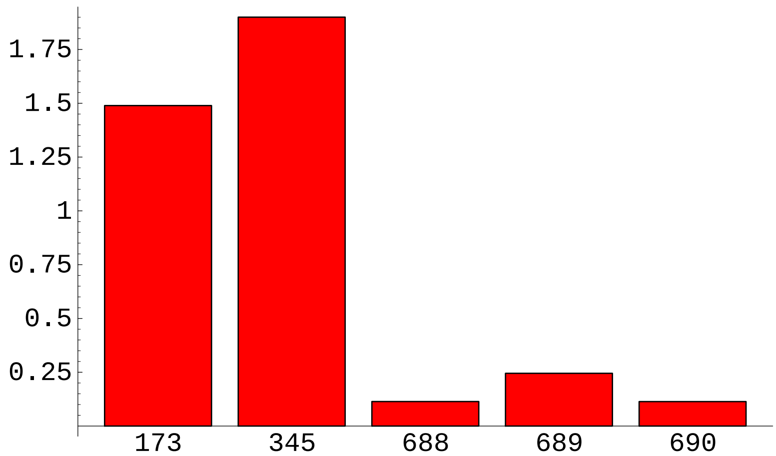
音階：
{{}, {{123.47, si}}, {{164.813, mi}}, {}, {}}

基本周波数は164.813Hz･ミである。{326} はここに表示されないが、2倍音329.626Hz･ミと言える。

ギター　ファ（5 弦 8 フレット）



スペクトル



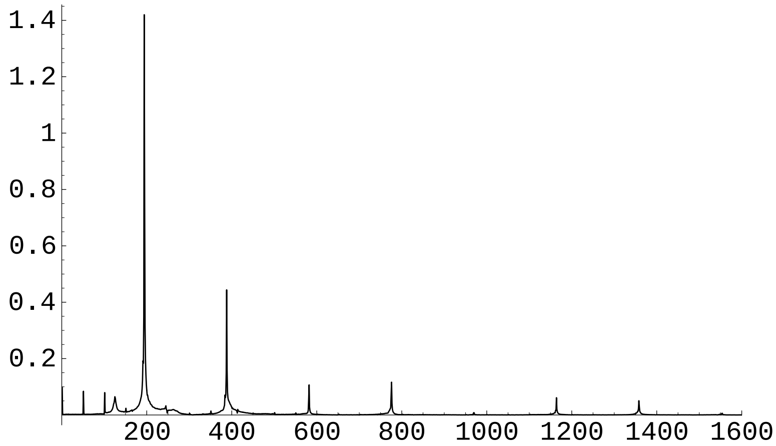
ピークの値

ピークの位置：{173, 345, 688, 689, 690}

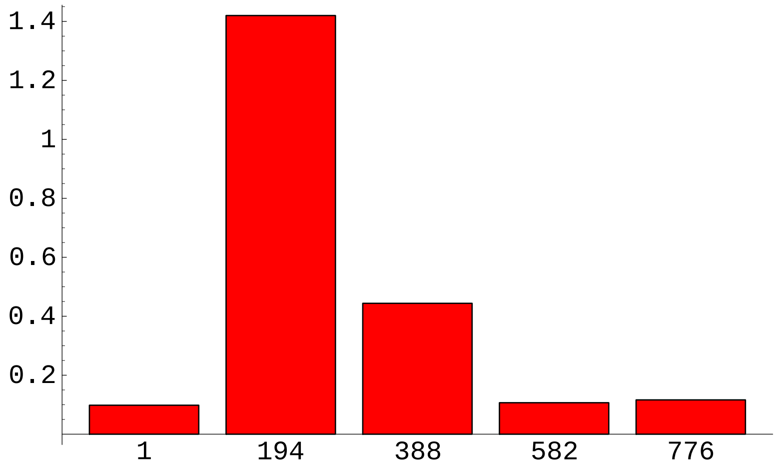
音階：
{{{174.613, fa}}, {}, {}, {}, {}}

基本周波数は 174.613Hz・ファである。{346} は 2 倍音 349.226Hz・ファにかなり近い。

ギター　ソ（5 弦 10 フレット）



スペクトル



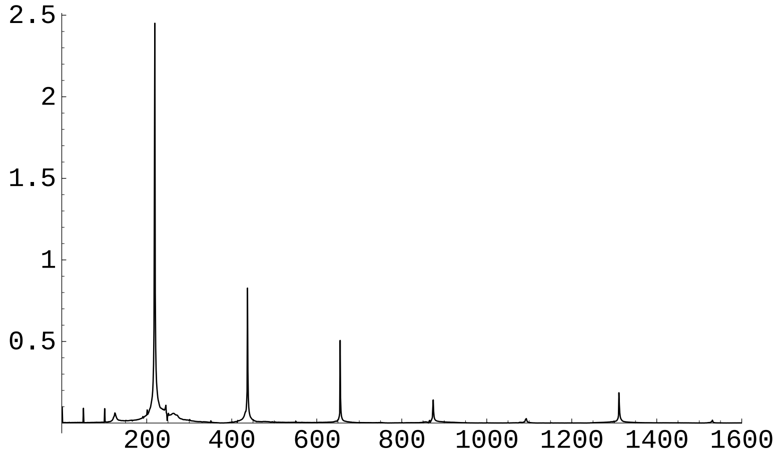
ピークの値

ピークの位置：{1, 194, 388, 582, 776}

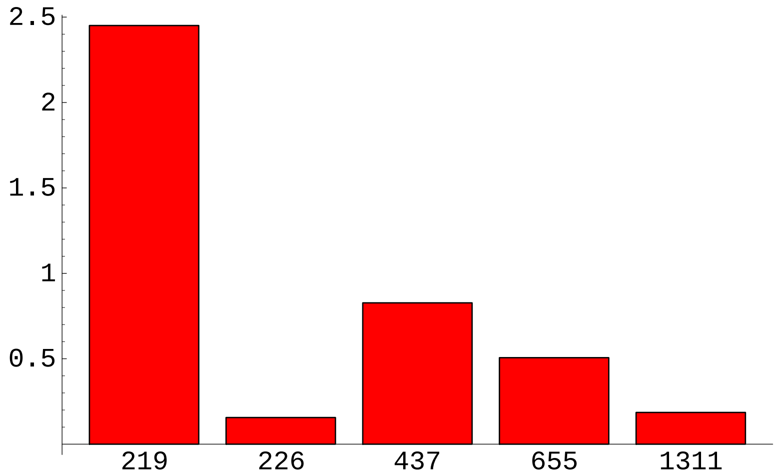
音階：
{{}, {{195.997, so}}, {}, {}, {}}

基本周波数は 195.997Hz・ソである。{388} は 2 倍音 391.994Hz・ソに近い。

ギター　ラ（4 弦 7 フレット）



スペクトル



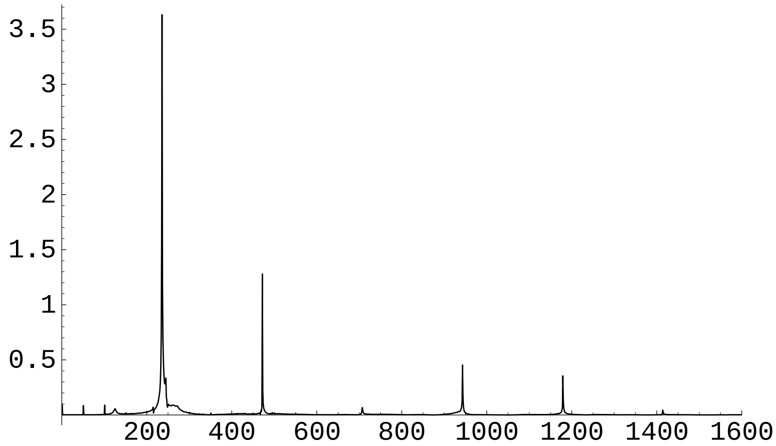
ピークの値

ピークの位置：{219, 226, 437, 655, 1311}

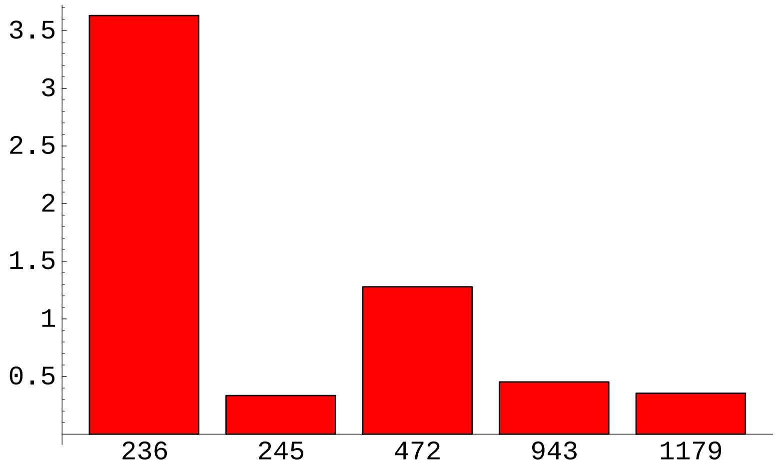
音階：
{{{219.999, ra}}, {}, {{439.997, ra}}, {}, {}}

基本周波数は 219.999Hz・ラ、2 倍音は 439.997Hz・ラである。

ギター　シ（3 弦 4 フレット）



スペクトル



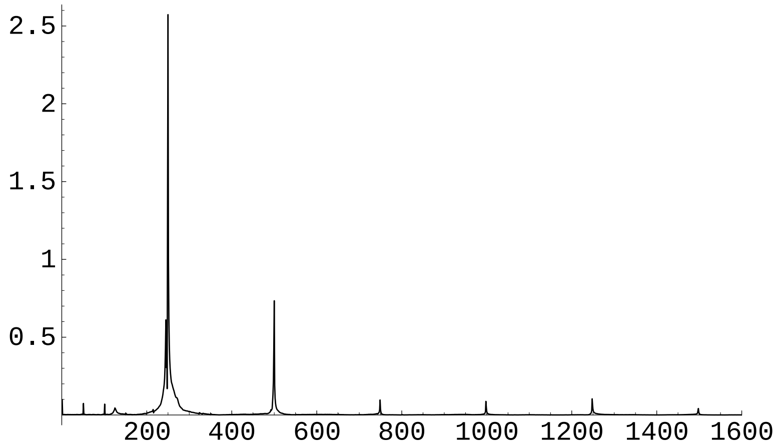
ピークの値

ピークの位置：{236, 245, 472, 943, 1179}

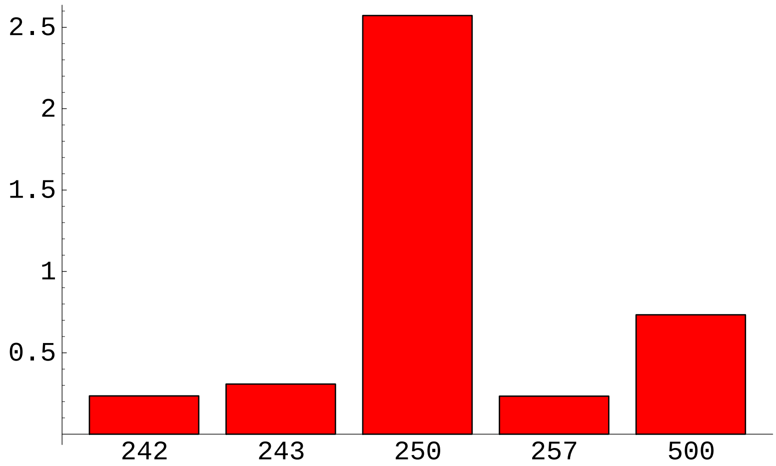
音階：
{{{233.08, ra′}}, {{246.94, si}}, {}, {}, {}}

ギターコードからは周波数 246.94Hz・シのはずだが、周波数 233.08Hz・ラ♯が大きく出ている。弾き方の問題か、フレットの押さえ間違えが原因と考えられる。

ギター　高いド（3 弦 5 フレット）



スペクトル



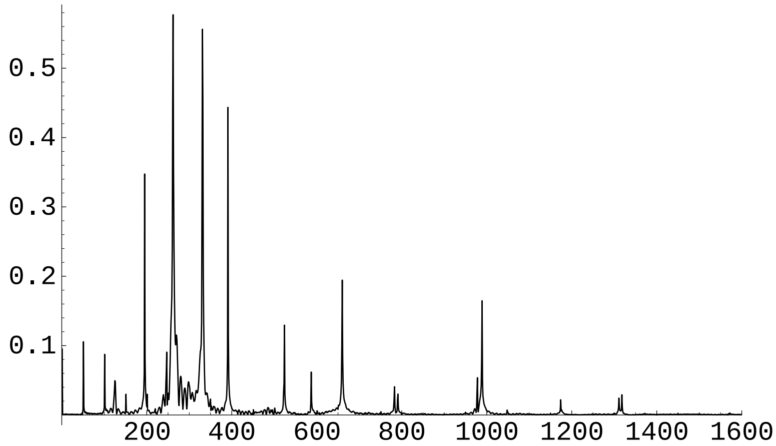
ピークの値

ピークの位置：{242, 243, 250, 257, 500}

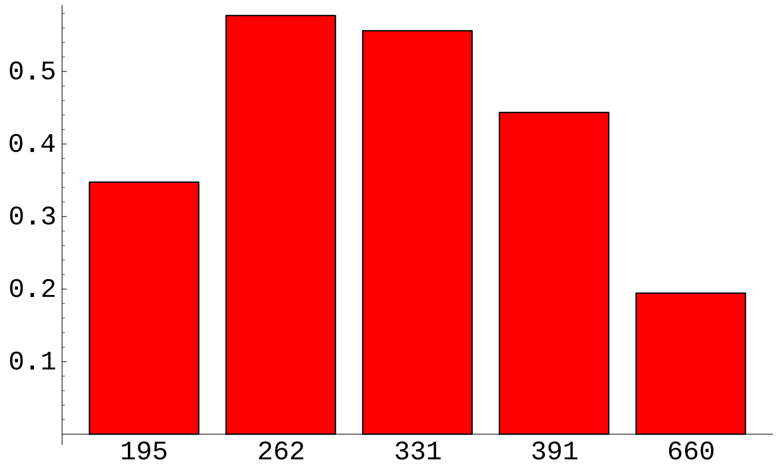
音階：
{{}, {}, {}, {}, {}}

261.624Hz・ドと予想できるが、差が大きいため音名は表示されなかった。

ギター　ソ（弦フレット）ド（弦フレット）ミ（弦フレット）



スペクトル



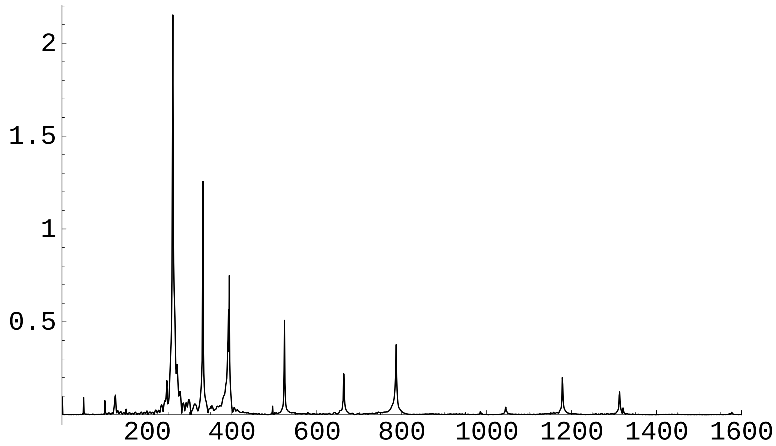
ピークの値

ピークの位置：{195, 262, 331, 391, 660}

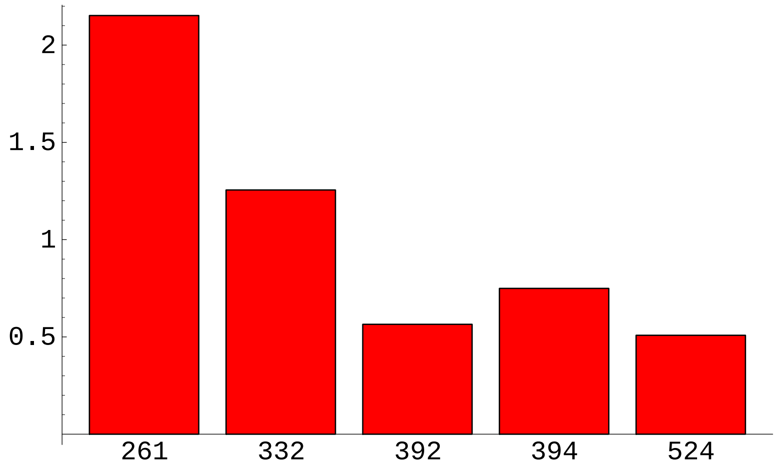
音階：
{{{195.997, so}}, {{261.624, do}},
{{329.626, mi}}, {{391.993, so}}, {{659.251, mi}}}

周波数391.993Hz・ソが強くなっているが、基本周波数195.997Hz・ソ、261.624Hz・ド、329.626Hz・ミの和音である。

ギター　ド（弦フレット）ミ（弦フレット）ソ（弦フレット）



スペクトル



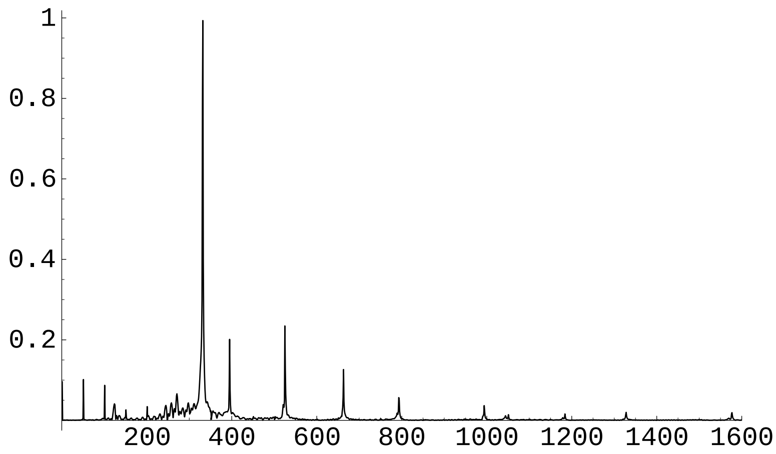
ピークの値

ピークの位置：{261, 332, 392, 394, 524}

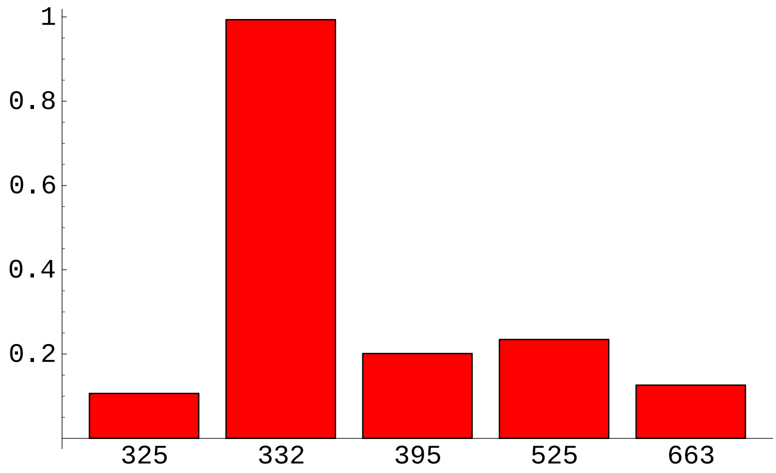
音階：
{{{261.624, do}}, {{329.626, mi}},
{{391.993, so}}, {{391.993, so}}, {{523.248, do}}}

基本周波数 261.624Hz・ド、329.626Hz・ミ、391.993Hz・ソの和音である。{392}{394} と近いものがでてきてしまった。

ギター　ミ（弦フレット）ソ（弦フレット）ド（弦フレット）



スペクトル



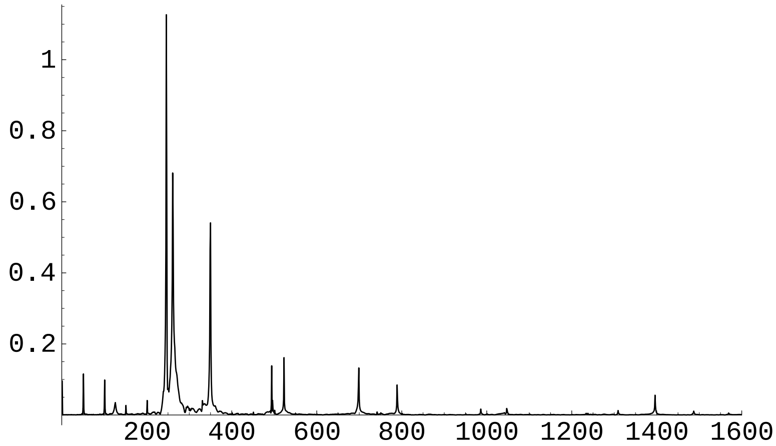
ピークの値

ピークの位置：{325, 332, 395, 525, 663}

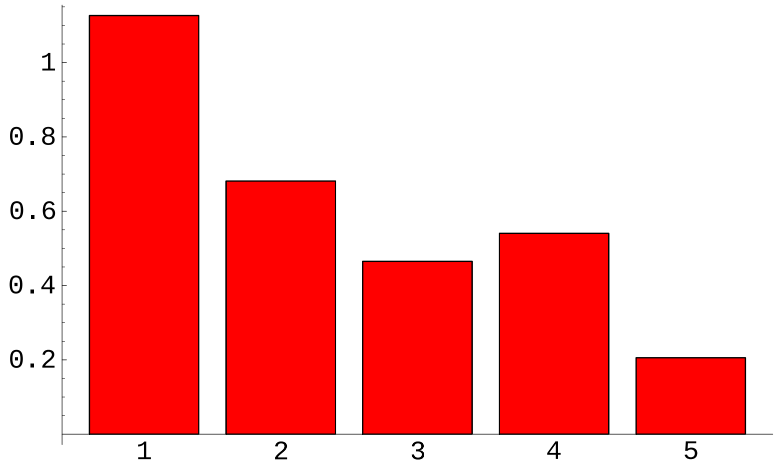
音階：
{{}, {{329.626, mi}}, {}, {{523.248, do}}, {}}

基本周波数 329.626Hz・ミ、523.248Hz・ドは表示されたが、391.993Hz・ソが表示されなかった。

ギター　シ（3 弦 4 フレット）ド（1 弦 1 フレット）ファ（1 弦 2 フレット）



スペクトル



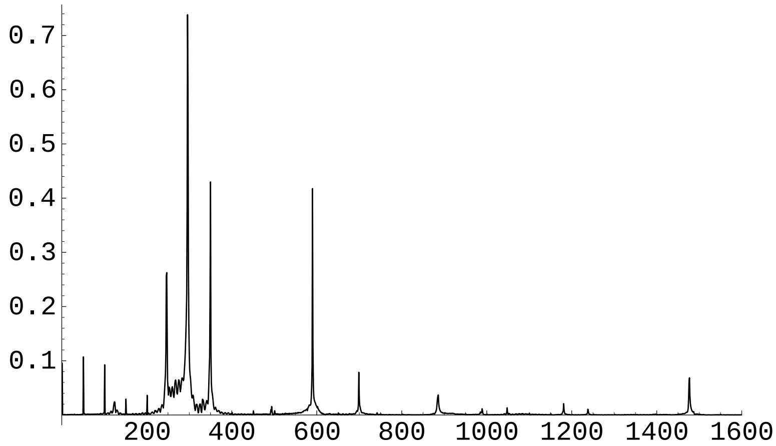
ピークの値

ピークの位置：{246, 261, 349, 350, 351}

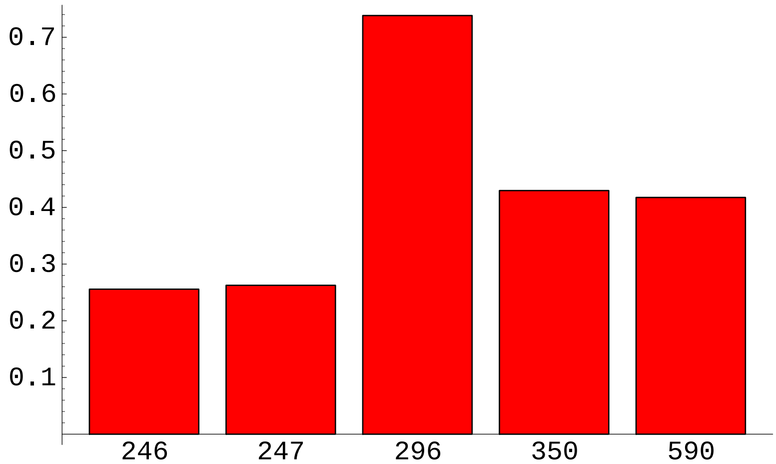
音階：
{{{246.94, si}}, {{261.624, do}},
{{349.226, fa}}, {{349.226, fa}}, {{349.226, fa}}}

基本周波数 246.94Hz・シ、261.624Hz・ド、349.226Hz・ファの不協和音である。{349} {350} {351} というピーク周辺が連続してでてきてしまった。

ギター　シ（3弦4フレット）レ（2弦3フレット）ファ（1弦1フレット）



スペクトル



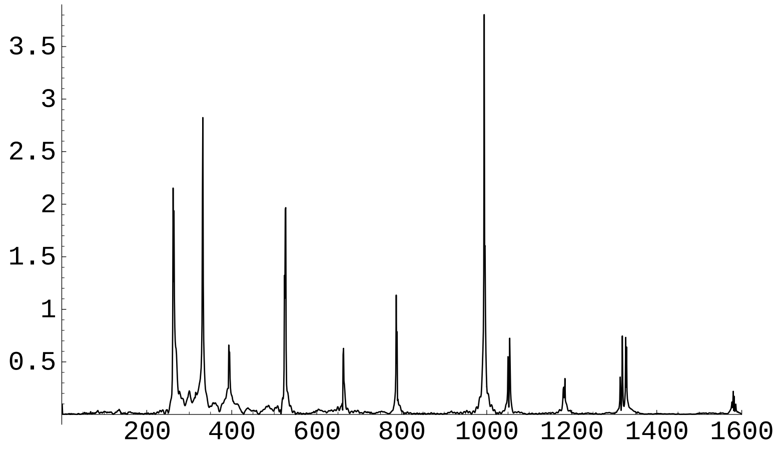
ピークの値

ピークの位置：{246, 247, 296, 350, 590}

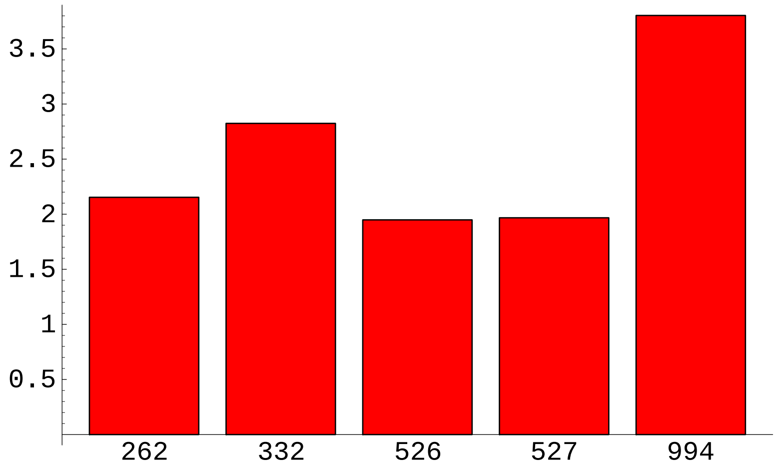
音階：
{{{246.94, si}}, {{246.94, si}},
{{293.663, re}}, {{349.226, fa}}, {{587.326, re}}}

基本周波数 246.94Hz・シ、293.663Hz・レ、349.226Hz・ファの不協和音である。

ピアノ　ドミソ



スペクトル



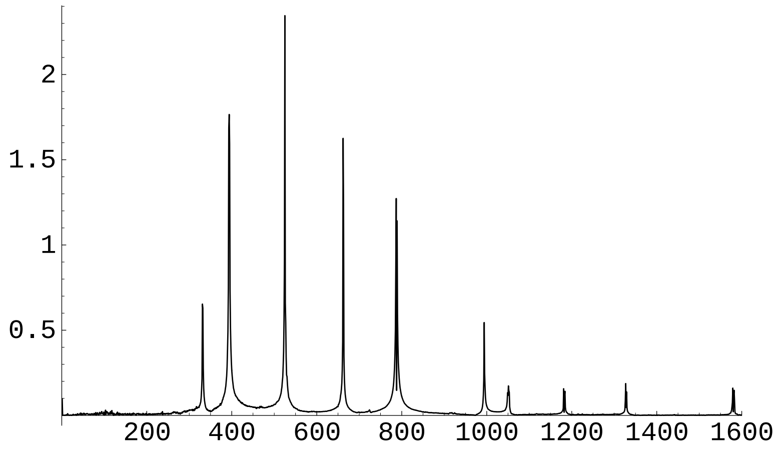
ピークの値

ピークの位置：{262, 332, 526, 527, 994}

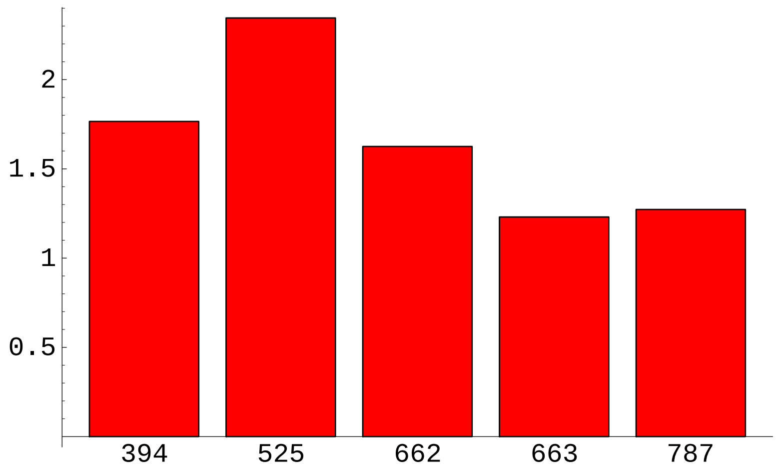
音階：
{{{261.624, do}}, {{329.626, mi}}, {{523.248, do}}, {}, {}}

基本周波数 261.624Hz・ドの 2 倍音 523.248Hz・ドが強くでてきている。ソの音はそれほど強く含まれていない。

ピアノ　ミソド



スペクトル



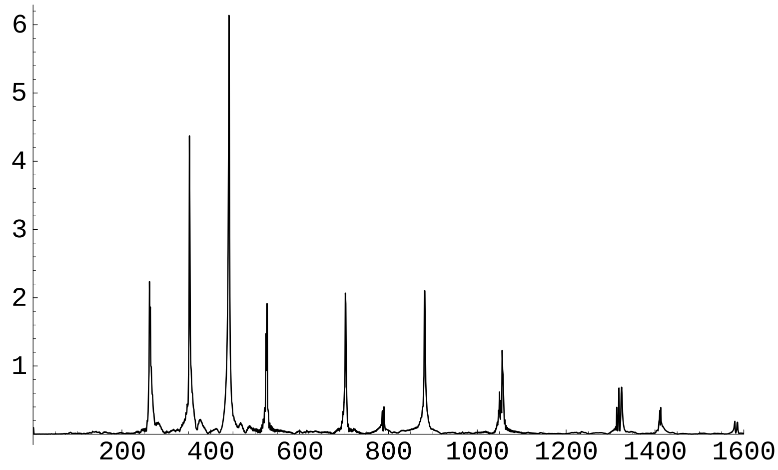
ピークの値

ピークの位置：{394, 525, 662, 663, 787}

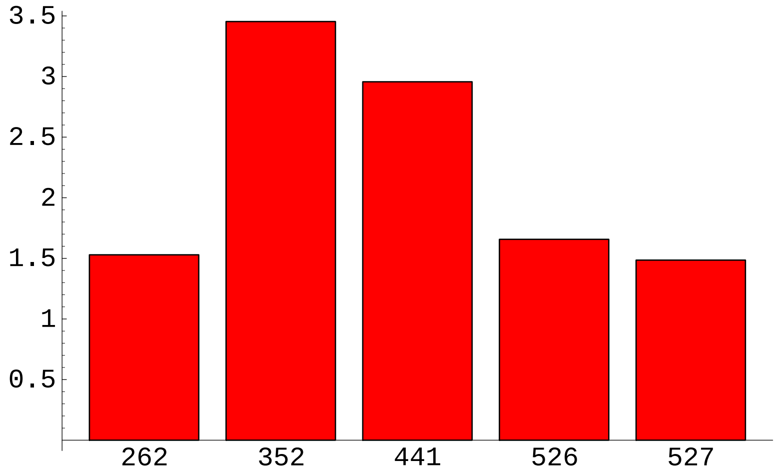
音階：
{{{391.993, so}}, {{523.248, do}}, {{659.251, mi}}, {}, {}}

基本周波数 391.993Hz・ソ、523.248Hz・ド、659.251Hz・ミの和音と判別したが、おそらく 329.626Hz・ミを弾いたと考えられる。

ピアノ　ドファラ



スペクトル



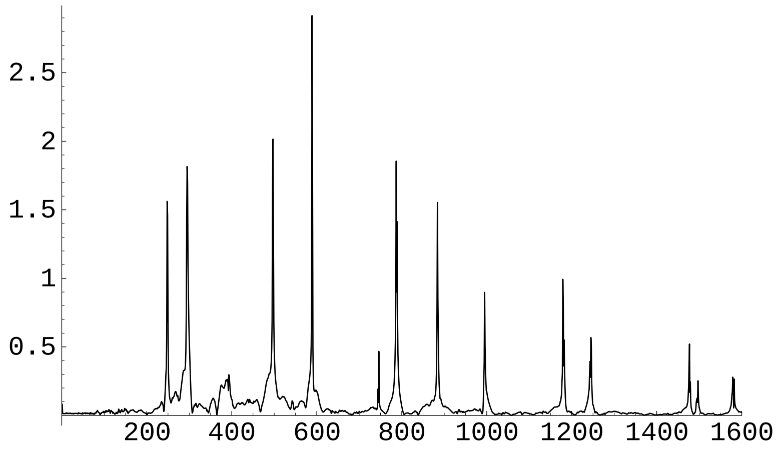
ピークの値

ピークの位置：{262, 352, 441, 526, 527}

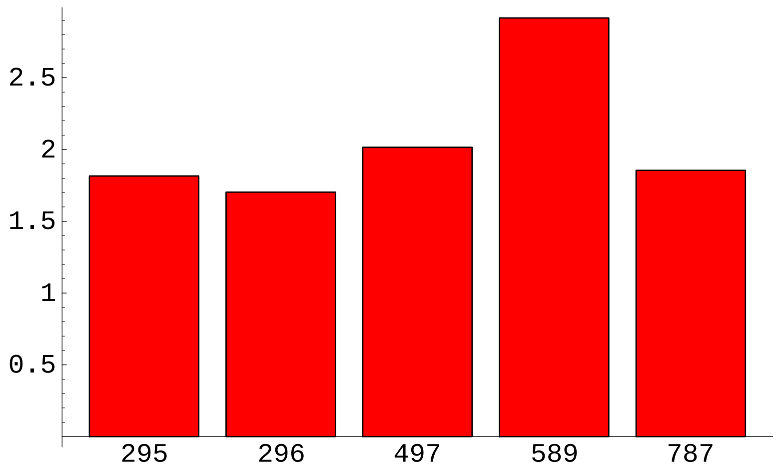
音階：
{{{261.624, do}}, {{349.226, fa}},
{{439.997, ra}}, {{523.248, do}}, {}}

基本周波数 261.624Hz・ド、349.226Hz・ファ、439.997Hz・ラの和音である。

ピアノ　シレソ



スペクトル



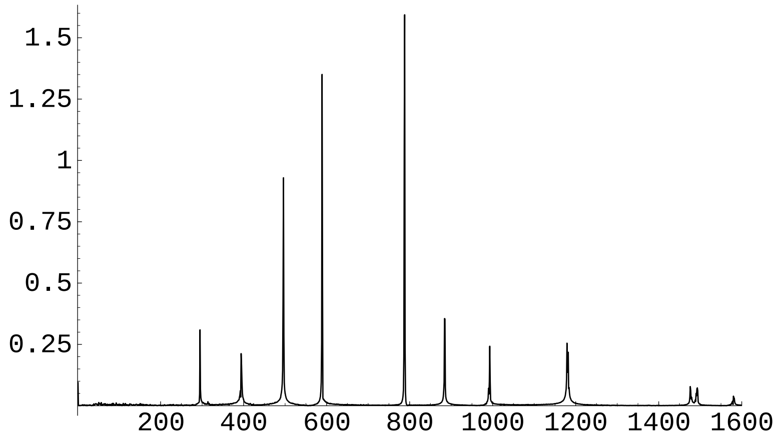
ピークの値

ピークの位置：{295, 296, 497, 589, 787}

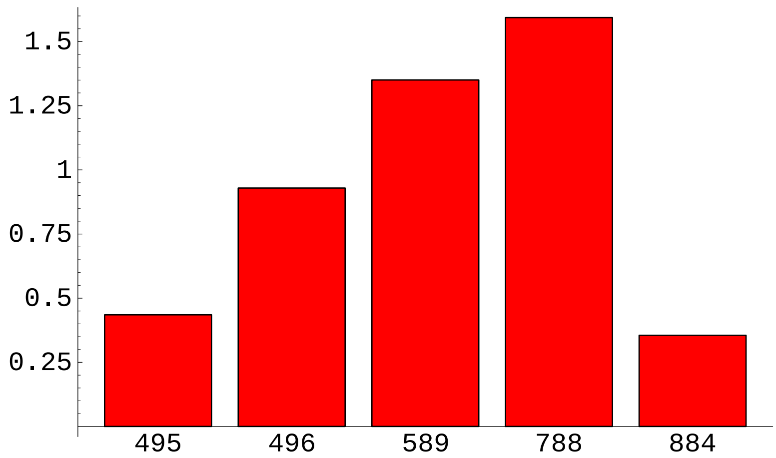
音階：
{{{293.663, re}}, {{293.663, re}}, {}, {{587.326, re}}, {}}

シレソの和音のはずだがピーク前後が含まれてしまい、正しい判別ができていない。

ピアノ　レソシ



スペクトル

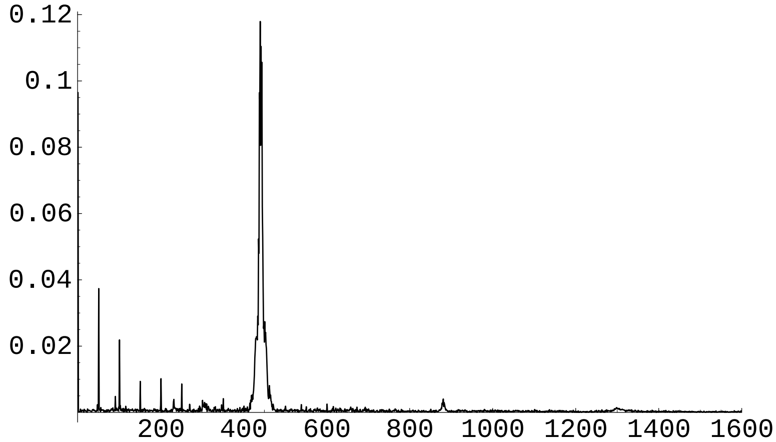


ピークの値

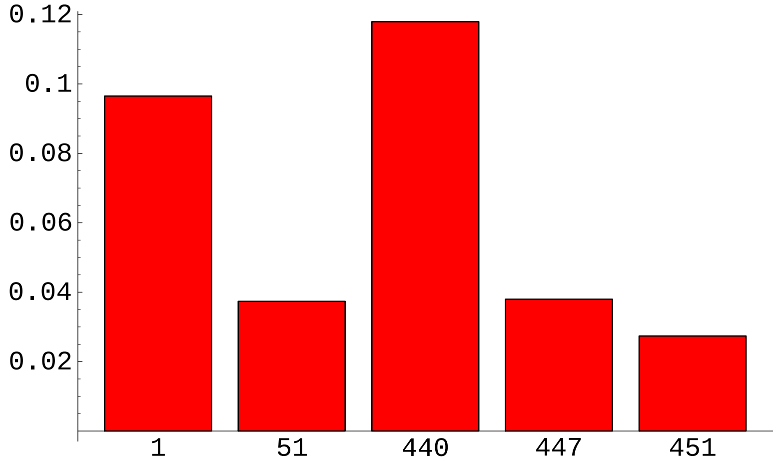
ピークの位置：{495, 496, 589, 788, 884}

音階：
{{{493.88, si}}, {{493.88, si}}, {{587.326, re}}, {}, {}}

音叉



スペクトル



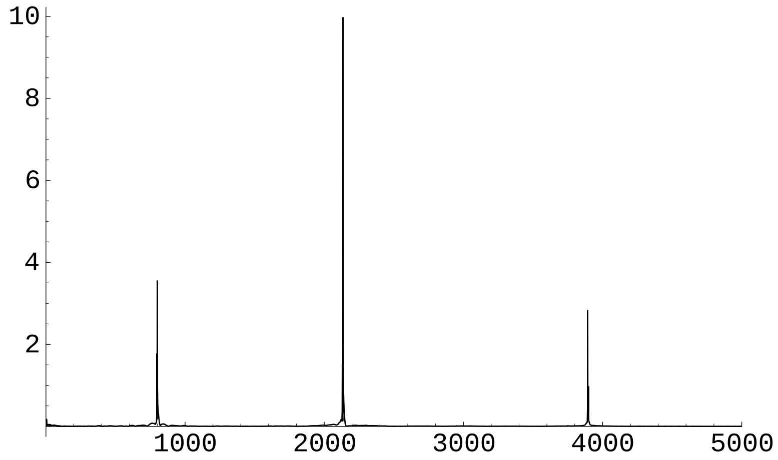
ピークの値

ピークの位置：{1, 51, 440, 447, 451}

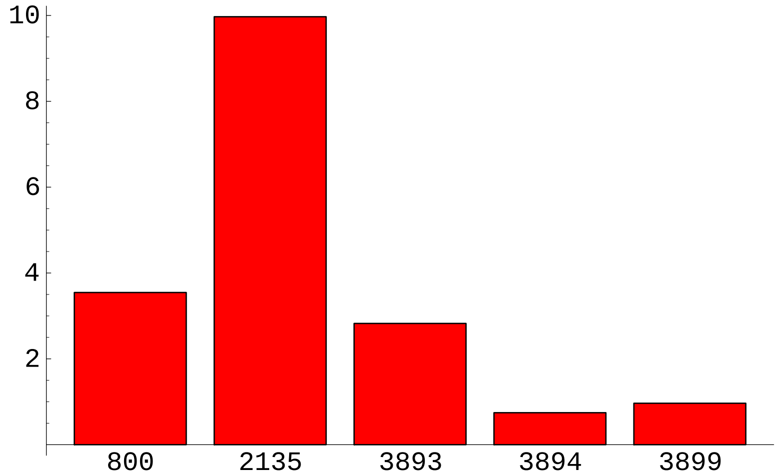
音階：
{{}, {}, {{439.997, ra}}, {}, {}}

ギターのチューニング用 440Hz の音叉である。倍音は全くでてこない。

鈴（りん）



スペクトル



ピークの値

ピークの位置：{800, 2135, 3893, 3894, 3899}

音階：
{{}, {}, {}, {}, {}}

仏壇などにある鈴（りん）である。ピーク以外にはほとんど数値がでてこない。

第7章　まとめ

単音の周波数解析では、弾いた音とは違った音名の周波数が含まれていることがわかった。基本周波数の定数倍の周波数が含まれるため、3倍の周波数に別の音名が現れた。

基本周波数は、グラフの第1ピークに現れることがほとんどであったが、2倍音が第1ピークとなている音もあった。しかし差が小さく、他の周波数が無視してもよいほど小さいため、大きい2つのうち低い周波数を基本周波数とした。

和音の場合は、和音に含まれている音の基本周波数がほぼ同じ大きさで出てくる。

単音に別の音名が出てくるが、3倍音以降に出てくるため普通の和音を考える分には見分けられるだろう。

音叉（おんさ）や鈴（りん）では倍音の出方が全く異なっていた。これらは弦とは異なり、立体の振動であるため結果が異なったと考えられる。

立体の振動や他の楽器の音の解析は、これから研究をする人に期待したい。

謝辞

今回の卒業研究は、松山周五郎さんの卒業研究『音の Fourier 解析』を元にして、中村君と共同で行った。
ギターの扱いには不慣れなため、チューニングや音を鳴らすまでに時間がかかった。音を採取してからは、Mathematica で解析するためのプログラム作成が主になった。ピークを調べる関数にはまだまだ改良すべき点がある。機会があれば考えてみてほしい。また、このレポートを読んで楽器や音に興味を持ってくれればと思う。

最後に、桂田先生にはギターを貸していただいたり、Mathematica や TEX の使い方に加え、研究の方法や考え方など多くの助言をいただき、大変お世話になりました。ありがとうございました。

参考文献

[1] 松山周五郎, 音の Fourier 解析, 2003 年度卒業研究レポート （2004 年）

[2] 小橋豊, 基礎物理学選書 4　音と音波, 裳華房 （1969 年）