

2009年度卒業研究レポート

クラドニ図形

明治大学理工学部数学科

岡田 卓 平野 裕輝

2010年3月1日

目次

第1章	概要	2
1.1	クラドニ図形とは	2
1.2	目標	2
第2章	2次元正方領域における波動方程式	3
2.1	初期値 Neumann 境界値問題	3
2.2	固有値の重複度	5
2.3	検証結果	5
第3章	2次元の円盤領域における波動方程式	11
3.1	初期値 Neumann 境界値問題	11
3.2	固有関数の節・グラフ	15
第4章	まとめ	20
4.1	正方形領域	20
4.2	円盤領域	20
第5章	プログラム	21
第6章	あとがき	23

第1章 概要

1.1 クラドニ図形とは

振動している膜や板の上に砂を撒くと、振動の節の部分に砂が集まりパターンを描く。これはドイツの物理学者エルンスト・クラドニ^{ふし} (1756~1827) によって発見されたもので、クラドニ図形と呼ばれる。特に共振によって振動している場合、ラプラシアン^{ふし}の固有関数 ($-\Delta U = \lambda U, \frac{\partial U}{\partial n} = 0, U \neq 0$) の節であると考えられる。

クラドニ図形 1



クラドニ図形 2



1.2 目標

今回私たちは2次元の正方領域と円盤領域の固有関数を求めることでそれぞれの節線を求めた。そこで Mathematica を使い固有関数の節線を描き、実際のクラドニ図形と比較し一致するか調べた。正方領域で固有値 λ が単純な場合、固有関数の節線は格子線となるので、明らかに格子線でないクラドニ図形は重複固有値の固有関数の節線と考えられる。そこで今回は二重固有値について調べてみた。また YouTube に載っていた実際の実験動画 (<http://www.youtube.com/watch?v=s9GBf8y01Y0>) を見た限り端が固定されていないため Neumann 境界条件で調べた。

第2章 2次元正方領域における波動方程式

2.1 初期値 Neumann 境界値問題

2次元正方形領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ において

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & ((x, y) \in \Omega, 0 < t), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = 0 & ((x, y) \in \partial\Omega, 0 < t), \\ u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) & ((x, y) \in \Omega). \end{cases}$$

ただし n は $\partial\Omega$ 上の点 (x, y) における、 Ω の外向き単位法線ベクトルである。
これを Fourier の方法で解くと解は

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{4}(a_{00} + b_{00}t) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\pi x \cos n\pi y \\ &\quad \times [a_{mn} \cos(c\sqrt{m^2 + n^2}\pi t) + \frac{b_{mn}}{c\sqrt{m^2 + n^2}\pi} \sin(c\sqrt{m^2 + n^2}\pi t)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi y [a_{0n} \cos(cn\pi t) + \frac{b_{0n}}{cn\pi} \sin(cn\pi t)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\pi x [a_{m0} \cos(cm\pi t) + \frac{b_{m0}}{cm\pi} \sin(cm\pi t)], \end{aligned}$$

$$a_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos m\pi x \cos n\pi y dx dy,$$

$$b_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos m\pi x \cos n\pi y dx dy.$$

この固有値問題は

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\lambda U & ((x, y) \in \Omega), \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & ((x, y) \in \partial\Omega) \\ U \neq 0 \end{cases}$$

となる。これを解くために

$$U(x, y) = X(x)Y(y)$$

として微分方程式に代入すると

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y).$$

ゆえに

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

この式の値は定数であることから、それを $-\mu$ とおくと、

$$X''(x) = -\mu X(x), \quad Y''(y) = -(\lambda - \mu)Y(y).$$

これと境界条件

$$X'(0) = X'(1) = Y'(0) = Y'(1) = 0.$$

より

$$\mu = -m^2\pi^2, \quad X(x) = A \cos m\pi x \quad (m = 0, 1, 2, \dots, A \text{ は任意定数})$$

$$\lambda - \mu = -n^2\pi^2, \quad Y(y) = B \cos n\pi y \quad (n = 0, 1, 2, \dots, B \text{ は任意定数})$$

よって

$$\lambda = -(m^2 + n^2)\pi^2, \quad U(x, y) = C \cos m\pi x \cos n\pi y \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。

2.2 固有値の重複度

前ページで求めた固有値の重複度は色々ある。例えば、

- $\lambda = 2\pi^2$ となるのは $(m, n) = (1, 1)$ のみ。固有関数は

$$U(x, y) = C \cos \pi x \cos \pi y \quad (C \text{ は任意定数})$$

このような λ は単純固有値であるといわれている。

- $\lambda = 5\pi^2$ となるのは $(m, n) = (2, 1), (1, 2)$ のみ。固有関数は

$$U(x, y) = C_1 \cos 2\pi x \cos \pi y + C_2 \cos \pi x \cos 2\pi y \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

このような λ は二重固有値であるといわれている。

- $\lambda = 50\pi^2$ となるのは $(m, n) = (1, 7), (5, 5), (7, 1)$ のみ。固有関数は

$$U(x, y) = C_3 \cos \pi x \cos 7\pi y + C_4 \cos 5\pi x \cos 5\pi y + C_5 \cos 7\pi x \cos \pi y \quad (C_3, C_4, C_5 \text{ は任意定数})$$

となる。この λ は最小の三重固有値である。

- もっと重複度の大きい固有値も存在する。

また単純固有値の固有関数は $\cos m\pi x \cos m\pi y$ の形であるから、その節線は、

$$\cos m\pi x \cos m\pi y = 0$$

の解で、

$$x = \frac{2k-1}{2m}, \quad y = \frac{2l-1}{2m} \quad (k, l = 1, 2, \dots, m)$$

となり、これは格子状となる。重複固有値の固有関数の節線のパターンは無限個あり、それは式を見るだけではよく分からない。実際の実験で現れるクラドニ図形は格子状でないものがほとんどである。そこで、まず重複度2の場合にコンピュータで節線を描いてみる。重複度2なので固有関数は

$$a \cos m\pi x \cos n\pi y + b \cos n\pi x \cos m\pi y \quad \dots (*)$$

の形の式となる。

2.3 検証結果

(*) の a, b, m, n に具体的な数字を代入して Mathematica で描いた節線とグラフを紹介する。

$m = 6, n = 4, a = 1, b = 1$ の場合

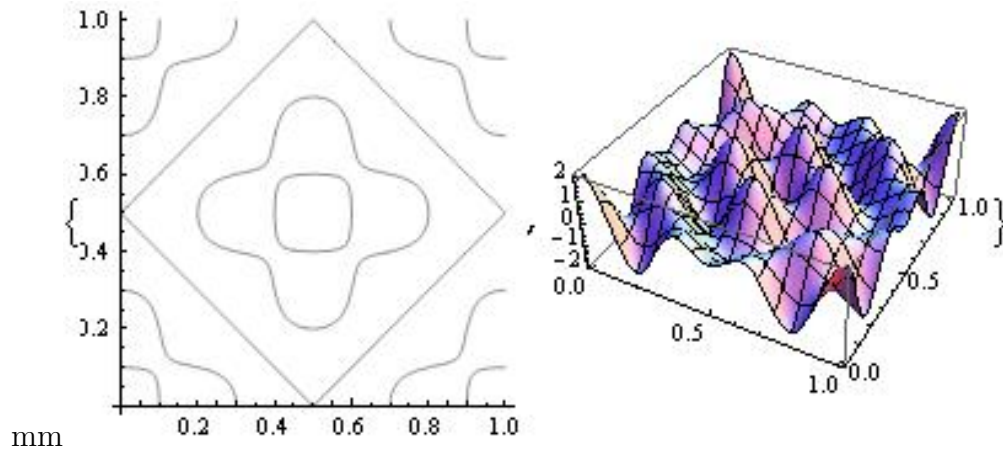


図 2.1: $\cos 6\pi x \cos 4\pi y + \cos 4\pi x \cos 6\pi y$

$m = 3, n = 5, a = b = 1$ の場合

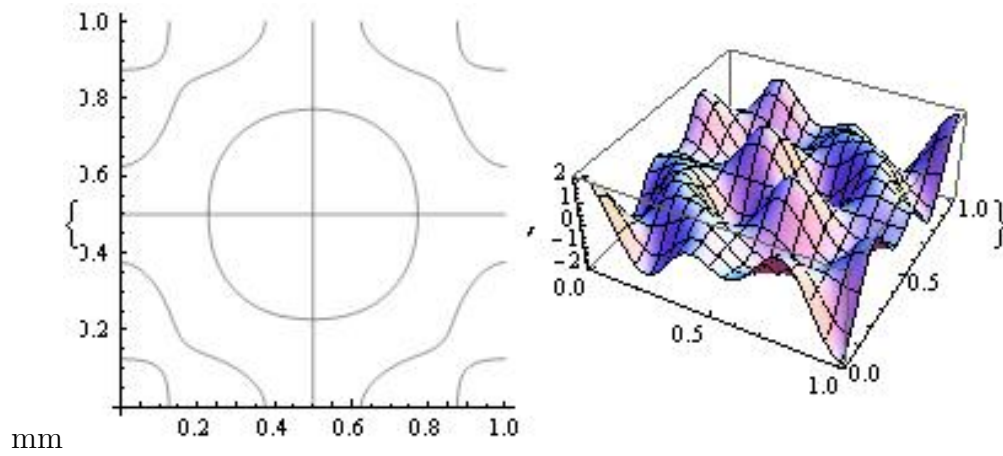


図 2.2: $\cos 3\pi x \cos 5\pi y + \cos 5\pi x \cos 3\pi y$

$m = 14, n = 24, a = b = 1$ の場合

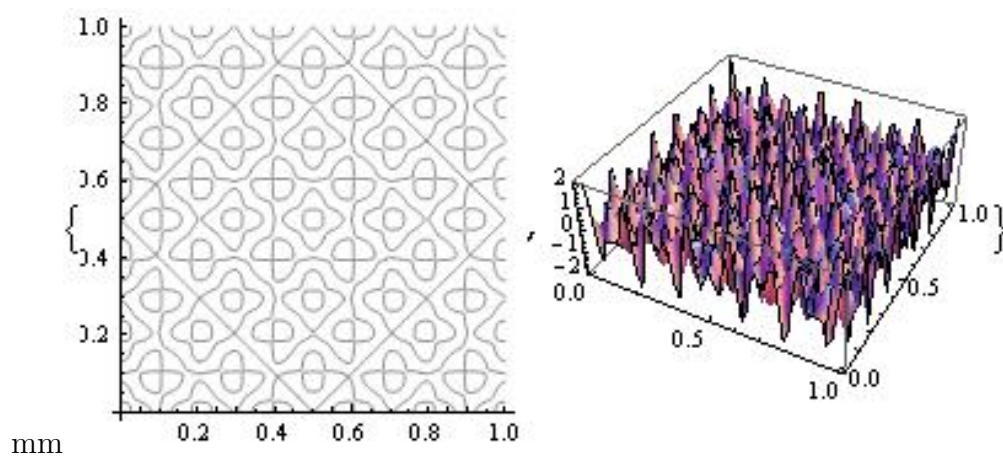


図 2.3: $\cos 14\pi x \cos 24\pi y + \cos 24\pi x \cos 14\pi y$

$m = 7, n = 11, a = b = 1$ の場合

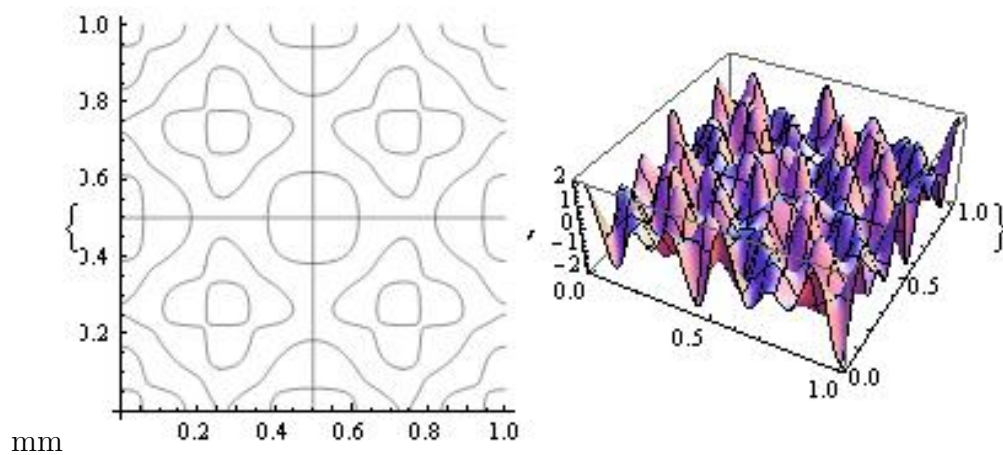


図 2.4: $\cos 7\pi x \cos 11\pi y + \cos 11\pi x \cos 7\pi y$

$m = 8, n = 4, a = b = 1$ の場合

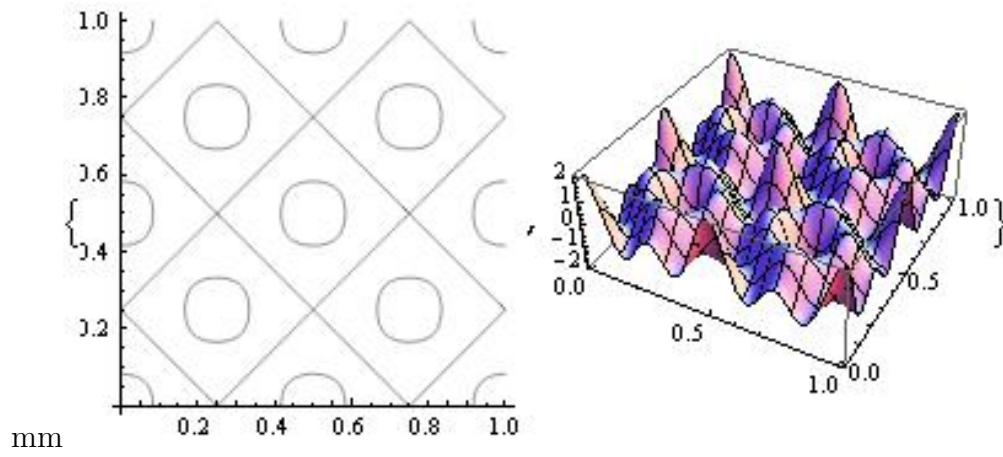


図 2.5: $\cos 8\pi x \cos 4\pi y + \cos 4\pi x \cos 8\pi y$

$m = 8, n = 4, a = 2, b = 3$ の場合

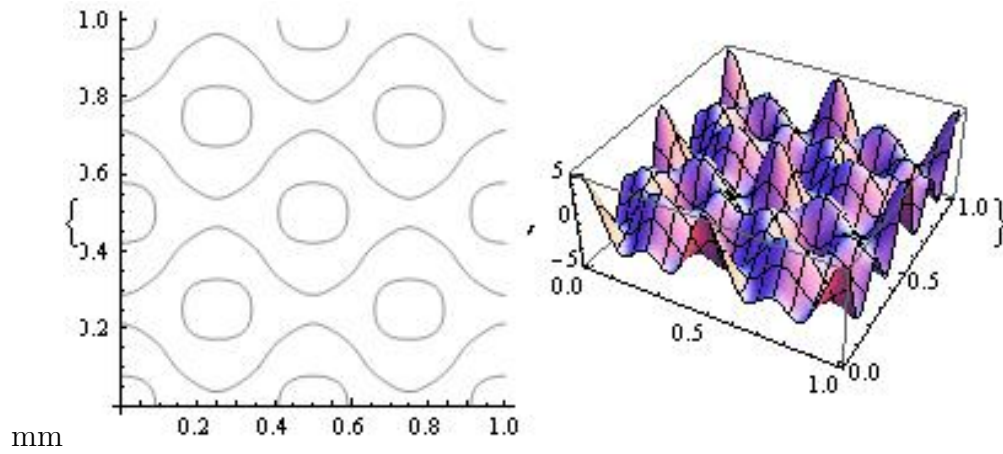


図 2.6: $2 \cos 8\pi x \cos 4\pi y + 3 \cos 4\pi x \cos 8\pi y$

以下に Mathematica で描いた節線と実際のクラドニ図形と一致した画像を紹介する。

$m = 6, n = 4, a = 1, b = 1$ の場合

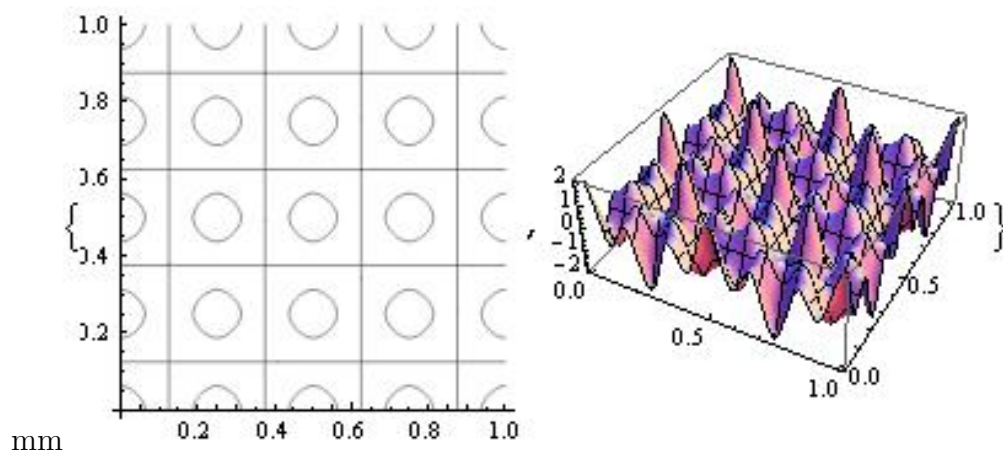


図 2.7: $\cos 6\pi x \cos 4\pi y + \cos 4\pi x \cos 6\pi y$



$m = 8, n = 6, a = 4, b = 1$ の場合

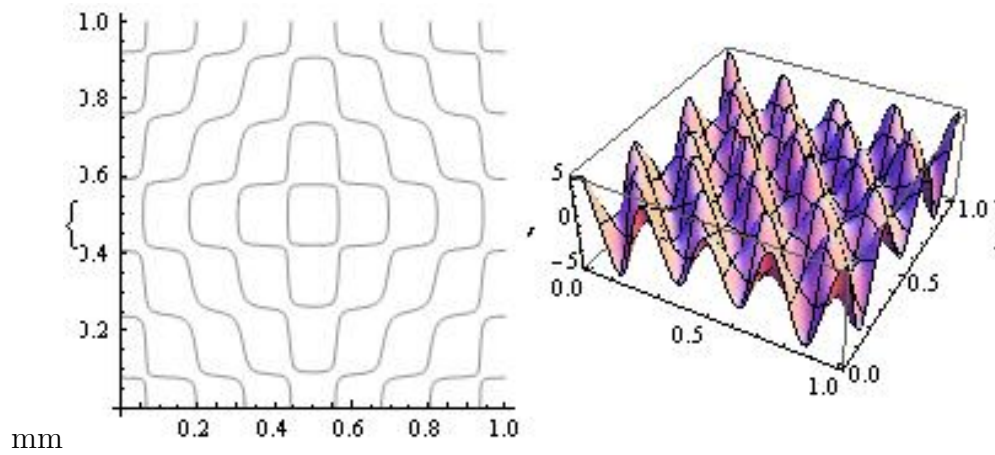


図 2.8: $4 \cos 8\pi x \cos 6\pi y + \cos 6\pi x \cos 8\pi y$

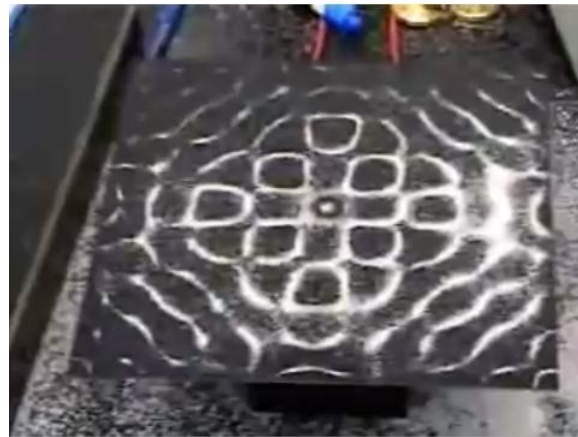


図 2.7 は実際の実験画像と一致したと言えるが、図 2.8 は完全一致とは言えない。

また、図 2.5 と図 2.6 は m, n の値が同じで a, b の値が違うものである。一見違うように見えるが、似たような図形になっている。今回の実験で a, b の値を 1 以外にすると節線は a, b の値が 1 のときの節線より少し崩れた形になることがわかった。この性質を使えば図 2.8 の節線はもう少し近づけることができるかもしれない。今回の実験では $a = b = 1$ として m, n の組をランダムに 30 通り選んだ。

第3章 2次元の円盤領域における波動方程式

3.1 初期値 Neumann 境界値問題

円盤領域 $\Omega = (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1$ において、波動方程式の初期値 Neumann 境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & ((x, y) \in \Omega, 0 < t), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & ((x, y) \in \partial\Omega, 0 < t), \\ u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) & ((x, y) \in \Omega). \end{cases}$$

ここで

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

である。極座標を用いると

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) & (0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < t < \infty). \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta, t) = 0 & (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < t). \\ u = f(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(r, \theta) & (0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, t = 0). \end{cases}$$

ここで

$$u(r, \theta, t) = U(r, \theta)T(t)$$

とおき、波動方程式に代入すると

$$\exists \lambda \in \text{ s.t. } \Delta U = -\lambda U, \quad T''(t) = -c^2 \lambda T(t)$$

境界条件より

$$\frac{\partial U}{\partial r}(1, \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

したがって固有値問題は

$$(3.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = -\lambda U. & ((x, y) \in \Omega) \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0. & ((x, y) \in \partial\Omega) \end{cases}$$

$\lambda = 0$ のときは $U \equiv$ 定数が解である。以下 $\lambda \neq 0$ とする。ここで

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

とおくと

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \lambda R\Theta = 0.$$

両辺を $R\Theta$ でわると

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta^2}{\Theta} = 0.$$

両辺に r^2 をかけて

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta^2}{\Theta}.$$

左辺は θ によらず右辺は r によらないので、この式の値は定数である。それを μ とおくと

$$\begin{cases} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda r^2 = \mu, \\ -\frac{\Theta^2}{\Theta} = \mu. \end{cases}$$

Θ は明らかに周期 2π の関数であるから、

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi),$$

$$\Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

これと $\Theta'' = -\mu\Theta$ より

$$\Theta = A \cos \sqrt{\mu}\theta + B \sin \sqrt{\mu}\theta, \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

$$\sqrt{\mu} = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ゆえに、

$$\mu = n^2.$$

よって

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda r^2 = n^2.$$

両辺に R をかけると

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0.$$

Bessel の微分方程式

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0$$

は Bessel の微分方程式と呼ばれ、一般解は

$$R(r) = AJ_n(\sqrt{\lambda}r) + BY_n(\sqrt{\lambda}r)$$

と表わされる。ここで、 $J_n(x)$ は第一種 Bessel 関数、 $Y_n(x)$ は第二種 Bessel 関数と呼ばれ、

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

で定義され、線形独立である。

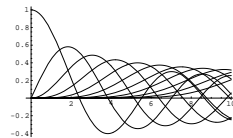


図 3.1: 第一種 Bessel 関数

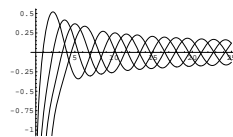


図 3.2: 第二種 Bessel 関数

$Y_n(\lambda r)$ は $r = 0$ で連続ではないから、 $R(r)$ が $r = 0$ で連続であるためには $B = 0$ ゆえに

$$R(r) = AJ_n(\sqrt{\lambda}r).$$

$R'(1) = 0$ より

$$R'(1) = J'_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

$R'(r)$ を $\partial\Omega$ で 0 にするには $\sqrt{\lambda}$ を $J'_n(r) = 0$ の根の一つであるように選ばなければならない。つまりこの固有値問題から求められる固有値 $\sqrt{\lambda}$ は 0 または l_{nm} に等しい。 l_{nm} を Bessel 関数の導関数 $J'_n(r)$ の正の零点を小さい順に並べたものとする:

$$J'_n(l_{nm}) = 0, \quad 0 < l_{n1} < l_{n2} < l_{n3} < \dots$$

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \sqrt{\lambda} = l_{nm}.$$

ゆえに

$$\lambda = l_{nm}^2.$$

l_{nm}^2 に属する固有関数は、

$$\begin{aligned} U_{nm}(r, \theta) &= J_n(l_{nm}r)[a \sin(n\theta) + b \cos(n\theta)] \\ &= J_n(l_{nm}r)C \cos(n\theta + D) \quad (A, B, C, D \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

である。まとめると、(3.1) の解は

$$\lambda = 0, l_{nm}^2$$

$\lambda = 0$ のとき $U(r, \theta)$ は定数。 $\lambda = l_{nm}^2$ のとき

$$U(r, \theta) = C J_n(l_{nm}r) \cos(n\theta + D)$$

この固有関数から $J_n(l_{nm}r) = 0$ をみると

$$l_{nm}r = \mu_{nk}$$

$$r = \frac{\mu_{nk}}{l_{nm}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

より節線は同心円になる。また $\cos(n\theta + D) = 0$ をみると

$$n\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$\theta = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots$$

より節線は一定角の放射線になる。以上より固有関数 U_{nm} の節線は同心円と一定角の放射線からなるものであるということが分かる。

例えば $m=3, n=4$ のものは半径 1 の円盤に同心円が 2 つ、放射線が 4 本あるものになる。また、正方形領域とは違い円盤領域の場合には重根が無いことが知られている (金子 [2])

3.2 固有関数の節・グラフ

以下にいくつか Mathematica で描いた節線とグラフを載せておく。

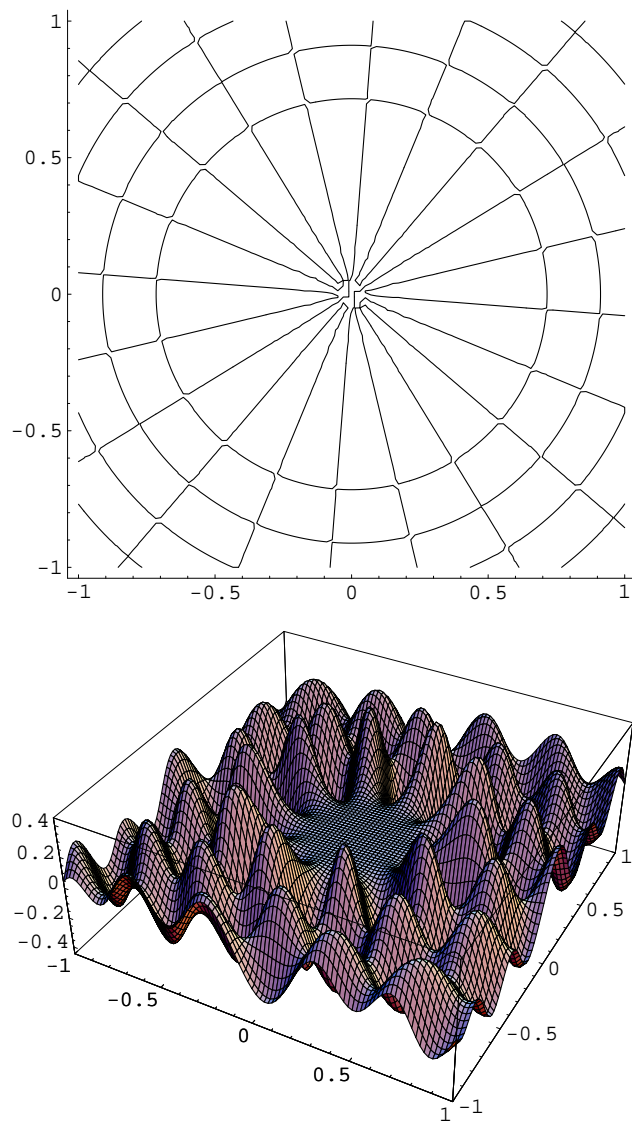


図 3.3: $(n=10, m=3, a=1, b=1)$ の場合

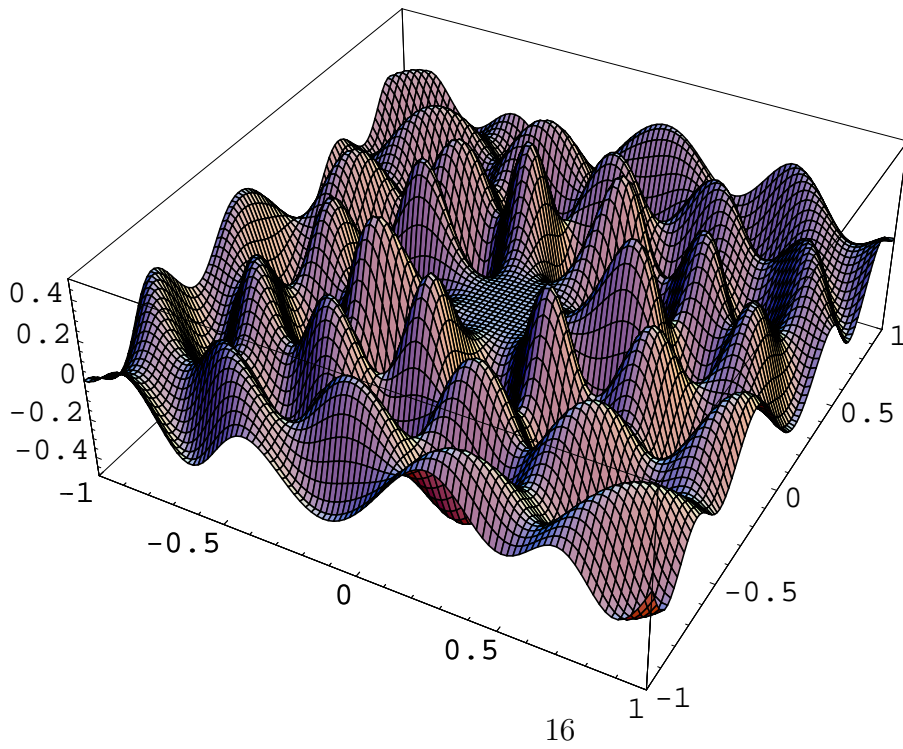
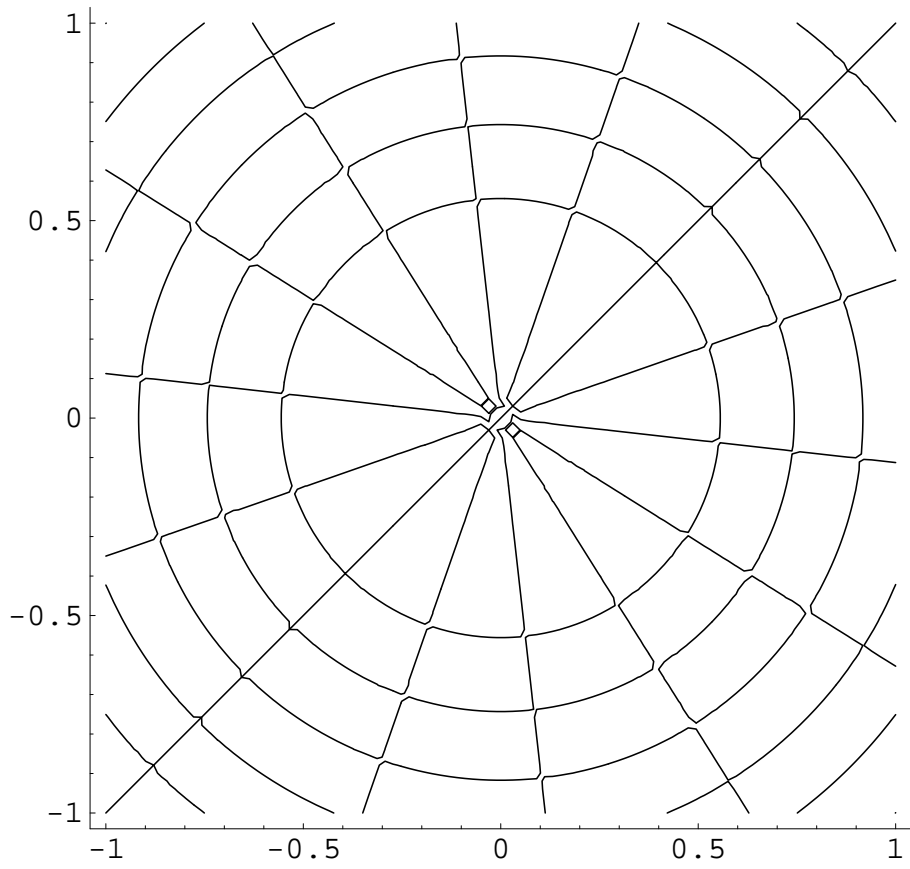


図 3.4: $(n=7, m=4, a=1, b=1)$ の場合

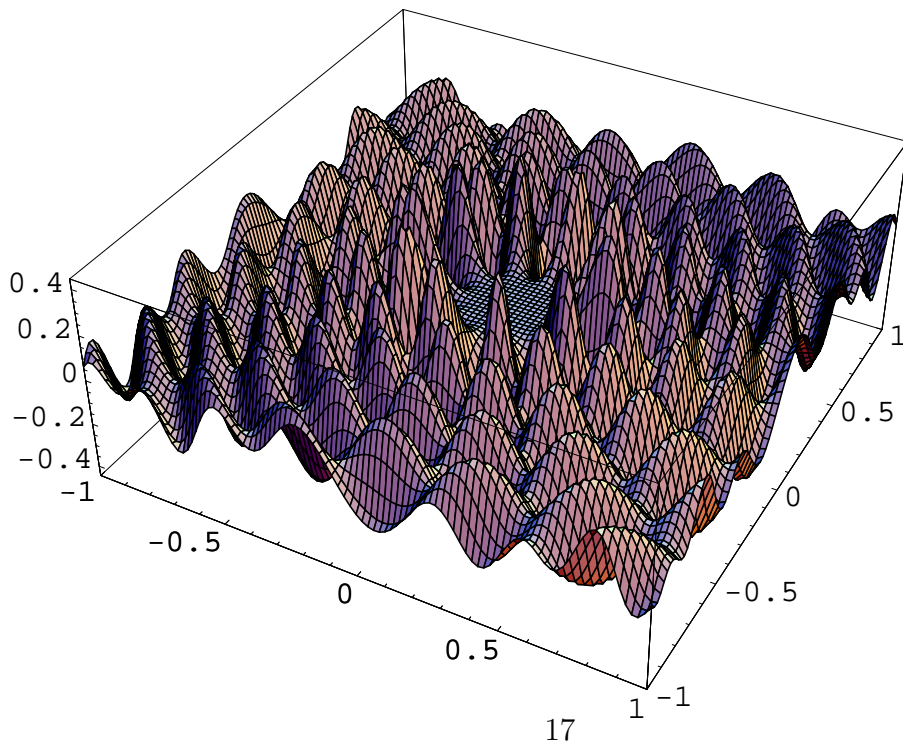
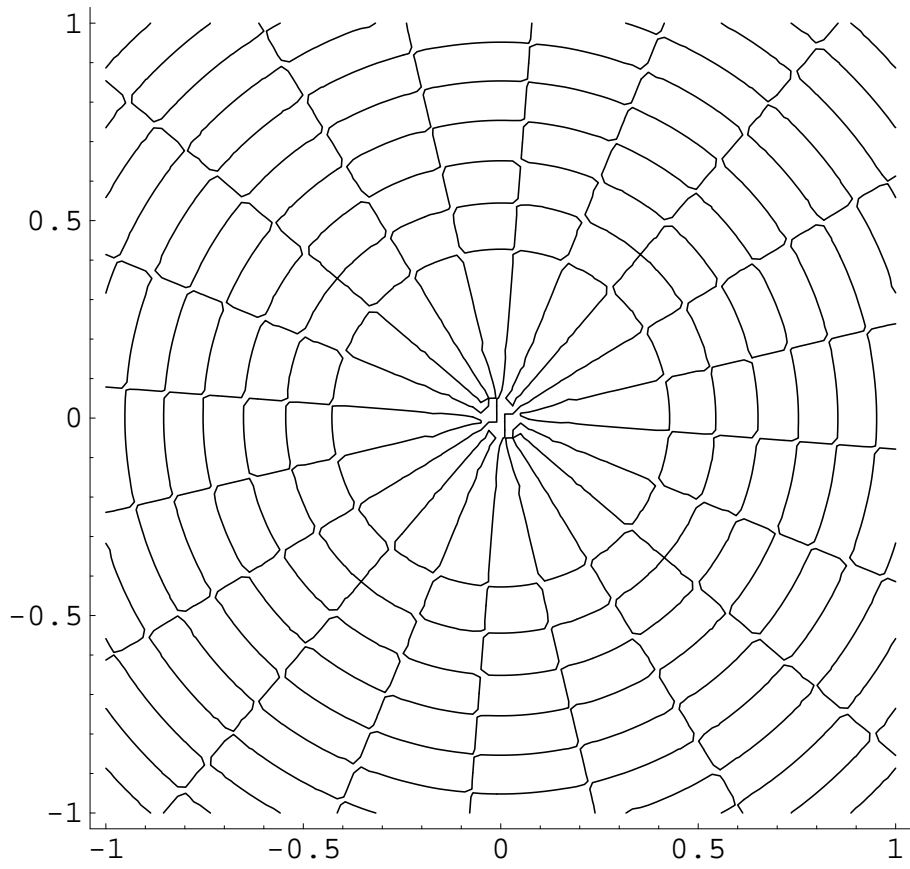


図 3.5: $(n=10, m=7, a=1, b=1)$ の場合

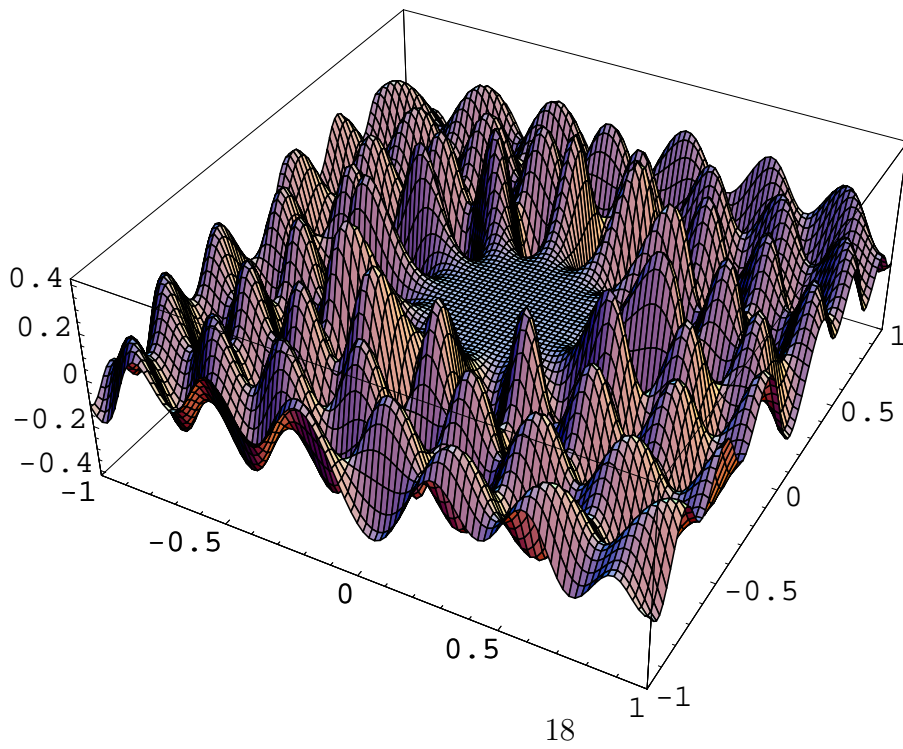
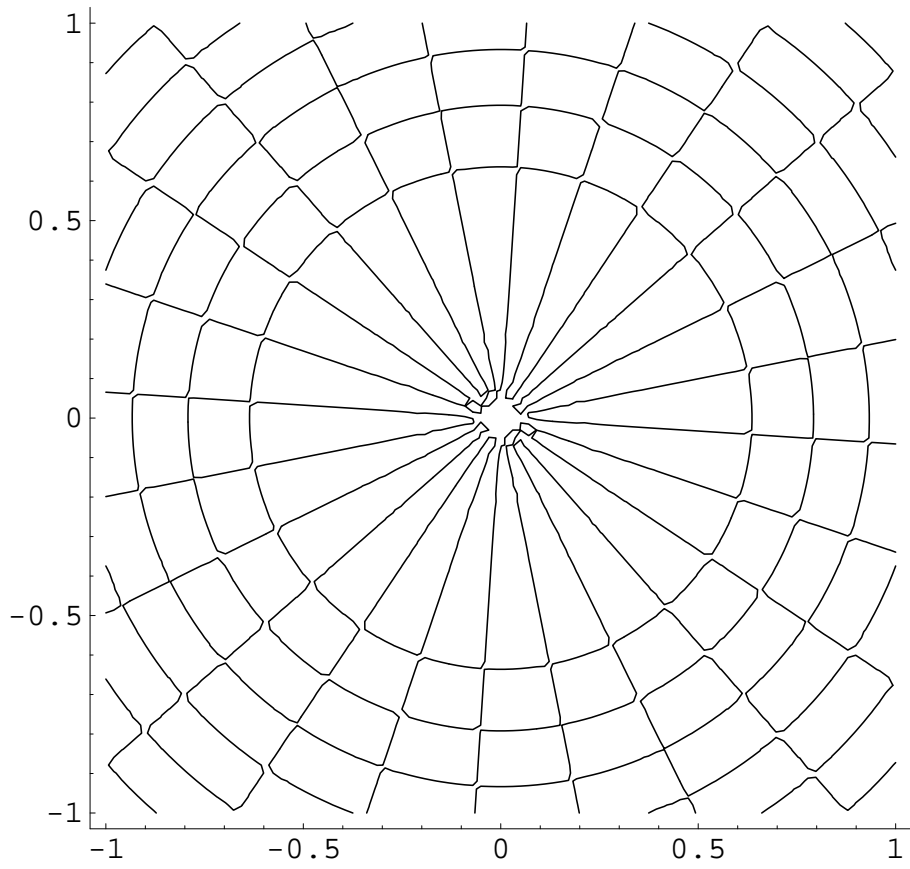


図 3.6: $(n=12, m=4, a=1, b=1)$ の場合

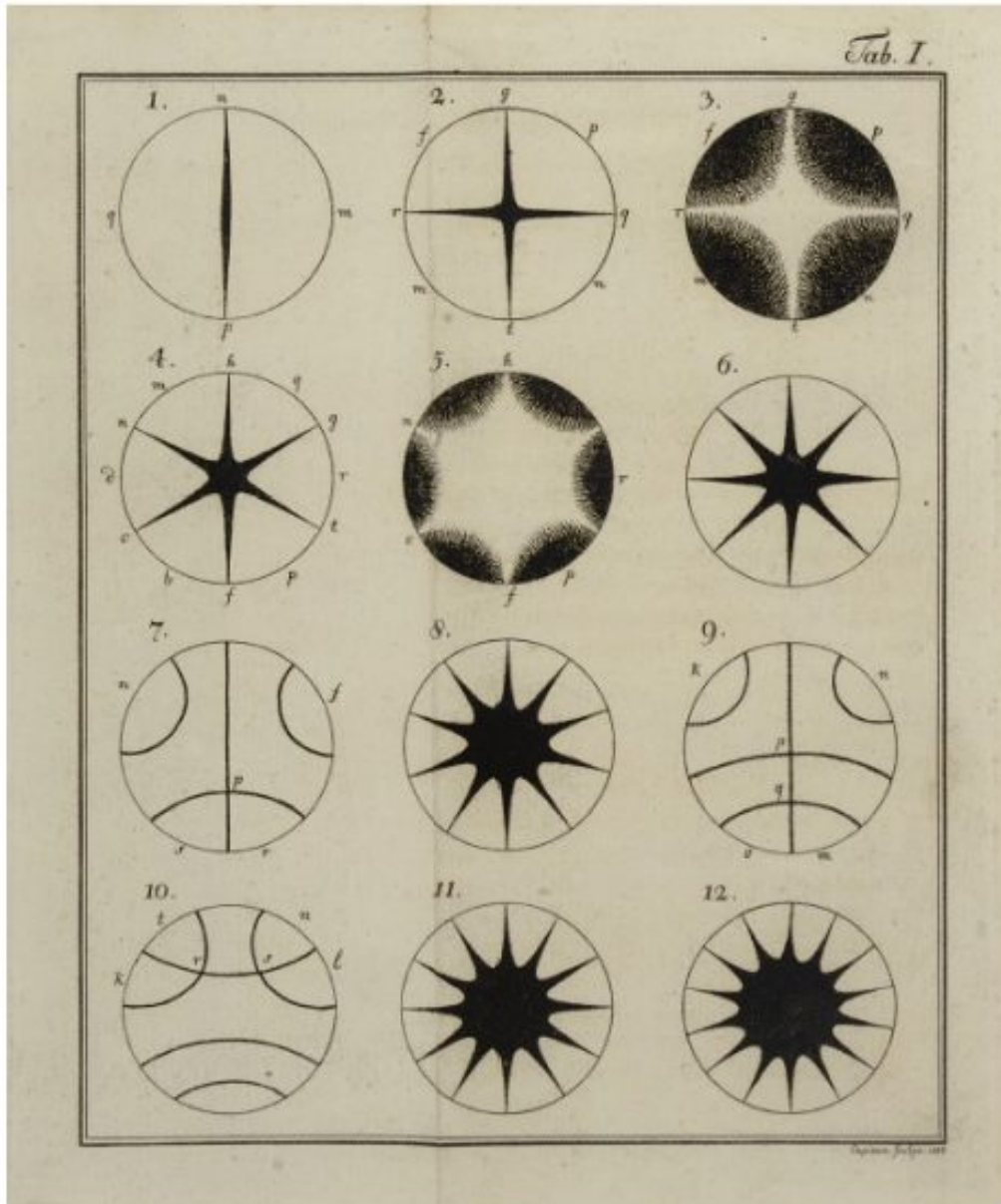


図 3.7: Chladni[3]

3.1 で示したように円盤における Δ の固有関数は $U(r, \theta) = C J_n(l_{nm} r) \cos(n\theta + D)$ の形をしていて、節線は同心円と放射線を混ぜたものである。図 3.3 ~ 図 3.6 ではだいたいそうなっている。また図 Cladni は Cladni 自身によるクラドニ図形の図である。この中で 1,2 は $(m, n=1, 1), (m, n=1, 2)$ だということが分かる。4, 6, 8, 11, 12 については放射線に似ている。ここで図 3.3 ~ 図 3.6 のグラフのほうに注目してほしい。原点の近くに平らに見える領域がある。ここでは振幅が小さく、節ではないが砂が集まる可能性がある。また、周りの¹⁹弾かれた砂もこの振幅が小さい箇所にとまる可能性がある。よって実際に実験すると 4, 6, 8, 11, 12 のような図ができるのかも知れない。3, 5, 9 については放射線があるようにもみえずよくわからなかった。

第4章 まとめ

4.1 正方形領域

今回 a, b を 1 にし、 m, n の組を 30 通り調べた結果、参考にした図形と一致したものは一つ、近いものが一つであった。今回は固有値が 2 重根のものしか調べていないので、3 重根以上の場合を調べることでさらに一致するものが出てくるかもしれない。

4.2 円盤領域

一致したものは無かったが、3.2 で書いたように実際の実験では振幅が非常に小さいところに砂が溜まり、クラドニの図形と同じものができる可能性がある。節は放射線と同心円を混ぜたものである。

第5章 プログラム

以下に今回使用したプログラムを紹介する。

正方形領域の固有関数 $a \cos(m\pi x) \cos(n\pi y) + b \cos(n\pi x) \cos(m\pi y)$ の節 (Neumann 境界条件) を描くプログラム

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]

eigenN[m_, n_, a_, b_] :=
{ImplicitPlot[a*Cos[m Pi x]Cos[n Pi y]+b*Cos[n Pi x]Cos[m Pi y]
== 0,{x,0,1}, {y, 0,1}, PlotPoints -> 100, AspectRatio -> 1],
Plot3D[a*Cos[m Pi x]Cos[n Pi y] + b*Cos[n Pi x]Cos[m Pi y],
{x, 0, 1}, {y, 0, 1}]}
```

円盤領域の固有関数 $U(r, \theta) = C J_n(l_{nm}r) \cos(n\theta + D)$ の節 (Neumann 境界条件) を描くプログラム

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
For[n = 0, n < 20, n++,
  bpz[n] = BesselJPrimeZeros[n, 10, WorkingPrecision ->20]]
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
eigenNc1[n_, m_, a_, b_] :=
  ImplicitPlot[BesselJ[n, bpz[n][[m]]*Sqrt[x^2 + y^2]]*
(a*Sin[n*Arg[x + I*y]]+b*Cos[n*Arg[x + I*y]]) == 0,
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotPoints -> 100]
eigenNc2[n_, m_, a_, b_] :=
  Plot3D[BesselJ[n, bpz[n][[m]]*Sqrt[x^2 + y^2]]*
(a*Sin[n*Arg[x + I*y]] + b*Cos[n*Arg[x + I*y]]),
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotPoints -> 100]
```

BesselJPrimeZeros[n,m]

で $J'_n(x)$ の最初の m 個の零点のリストを与える。

第6章 あとがき

今回私たちは正方形領域と円盤領域の波動方程式を解くことで固有関数を求め、実際のクラドニ図形と比較し一致するか調べたが、まとめにも書いたようにまだまだ課題は残っているので機会があれば研究したい。

また実際に自分達でクラドニ図形を作ることができれば、よりやりがいを感じて調べることができたかもしれないの。

最後に熱心に研究を手伝ってくださり、ふがない私たちを基礎から丁寧に指導して下さった桂田先生に深く感謝したい。

参考文献

- [1] 偏微分方程式：スタンリー・ファローウ著、伊理正夫・伊理由美訳:朝倉書店
(1983年9月10日初版)
- [2] 偏微分方程式入門：金子 晃著：東京大学出版会 (1998年初版)
- [3] Entdeckungen über die Theorie des Klanges : Chladni, Ernst Florens Friedrich
著