2009年度卒業研究レポート
クラドニ図形

明治大学理工学部数学科
岡田 卓
平野 裕輝

February 22, 2010

２次元円盤の方程式(Neumann)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (0 < r < 1, \quad 0 < t < \infty). \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (r = 1, \quad 0 < t < \infty). \\
u = f(r, \theta), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = g(r, \theta) \quad (t = 0).
\end{cases}
$$

固有値問題は

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\lambda U.
$$

$$
\frac{\partial U}{\partial n} = 0.
$$

この固有値問題から求められる固有値は0またはl_{nm}に等しい。l_{nm}は$J'_n(r)$の正の零点を小さい順に並べたものである。

$$J'_n(l_{nm}) = 0, \quad 0 < l_{n1} < l_{n2} < l_{n3} < \cdots$$

また、正方領域とは違い円盤領域の場合は重根はない。(金子晃先生の「偏微分方程式」参照)

l_{nm}に属する固有関数は、

$$U_{nm}(r,\theta) = J_n(l_{nm}r)[A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta)]$$

$$= J_n(l_{nm}r)C\cos(n\theta + D)$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots, m = 1, 2, 3, \cdots, A, B, C, D$は任意定数$)$

Besselの方程式

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0$$

はBesselの方程式と呼ばれ、一般解は

$$R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r)$$

と表わされる。ここで、$J_n(x)$は第一種Bessel関数、$Y_n(x)$は第二種Bessel関数と呼ばれ、

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

で定義され、線形独立である。

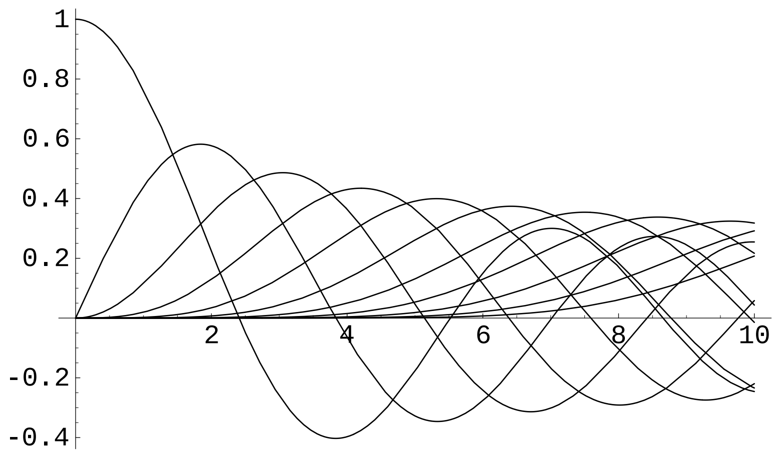


Figure 1: 第一種Bessel関数

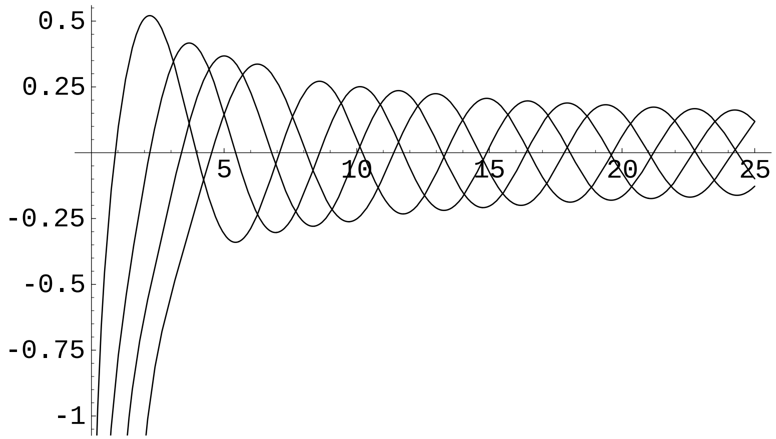


Figure 2: 第二種Bessel関数

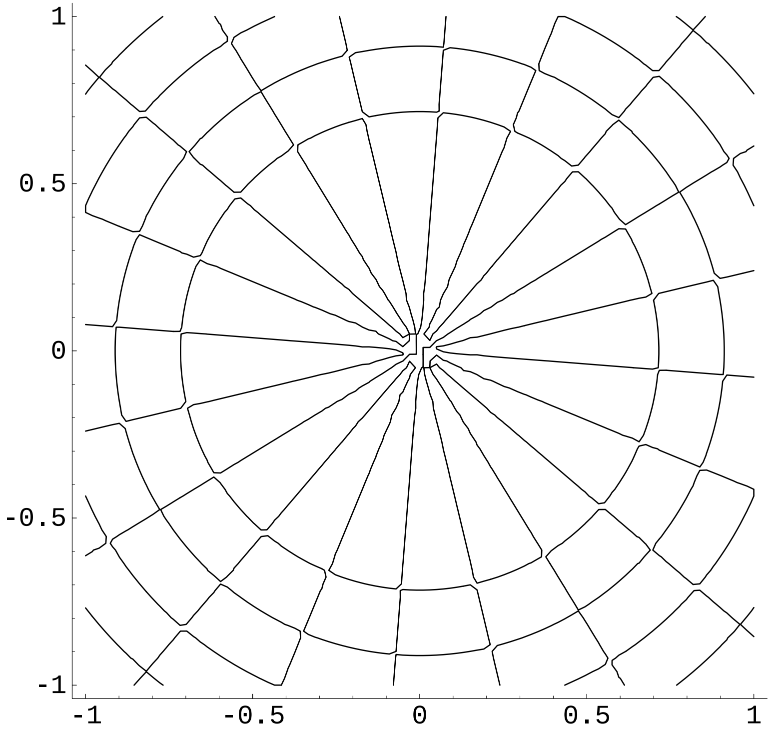
関数$Y_n(\lambda r)$は$r = 0$で有界でないから我々の解としては

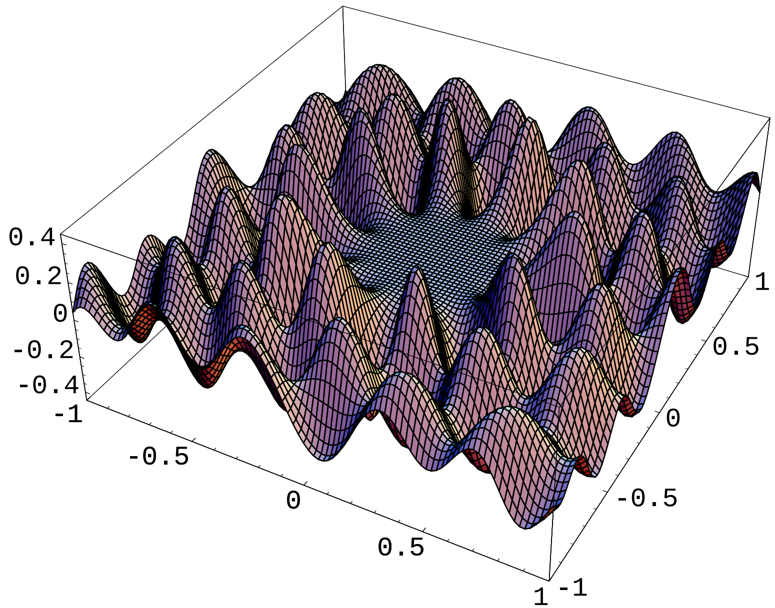
$$R(r) = AJ_n(\lambda r)$$

を選んだ。

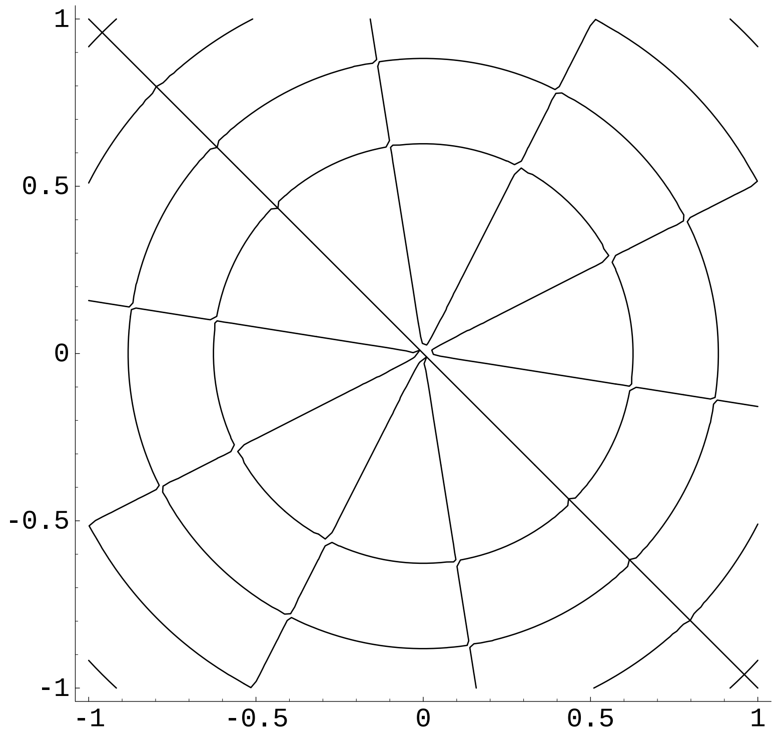
検証結果

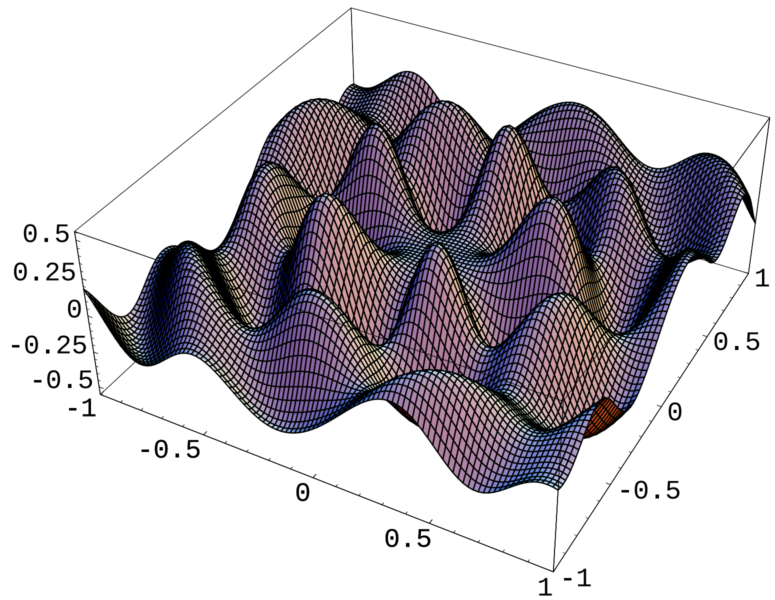
(n=10,m=3,a=1,b=1)の場合



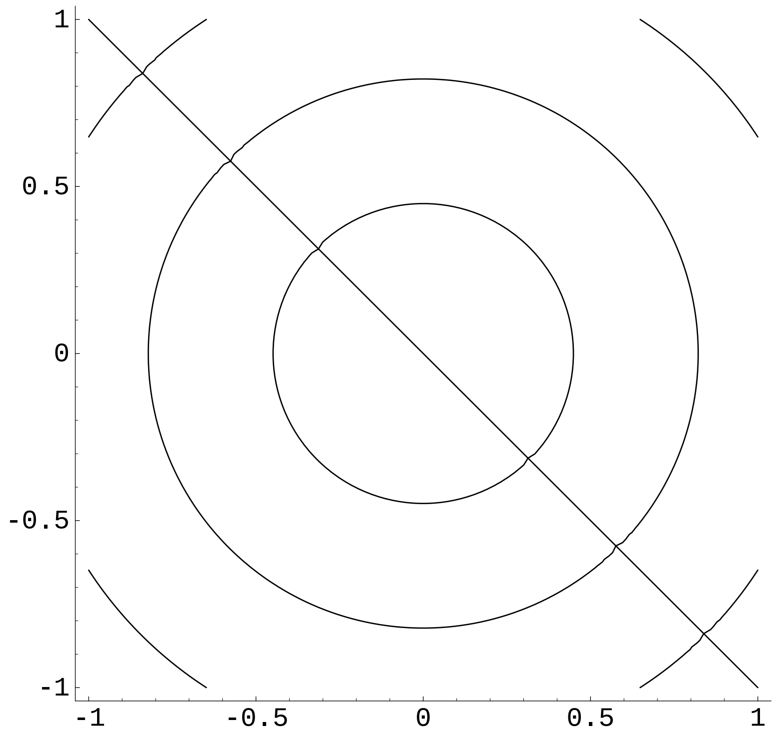


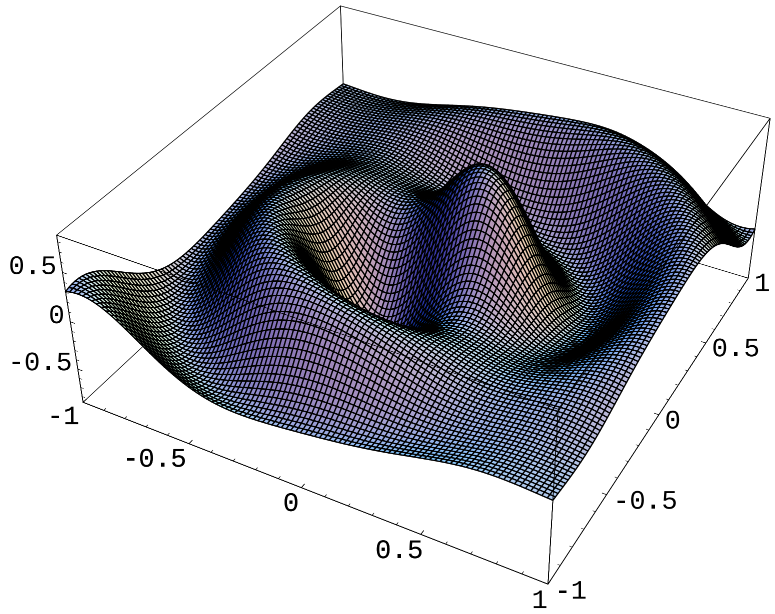
(n=5,m=3,a=1,b=1) の場合



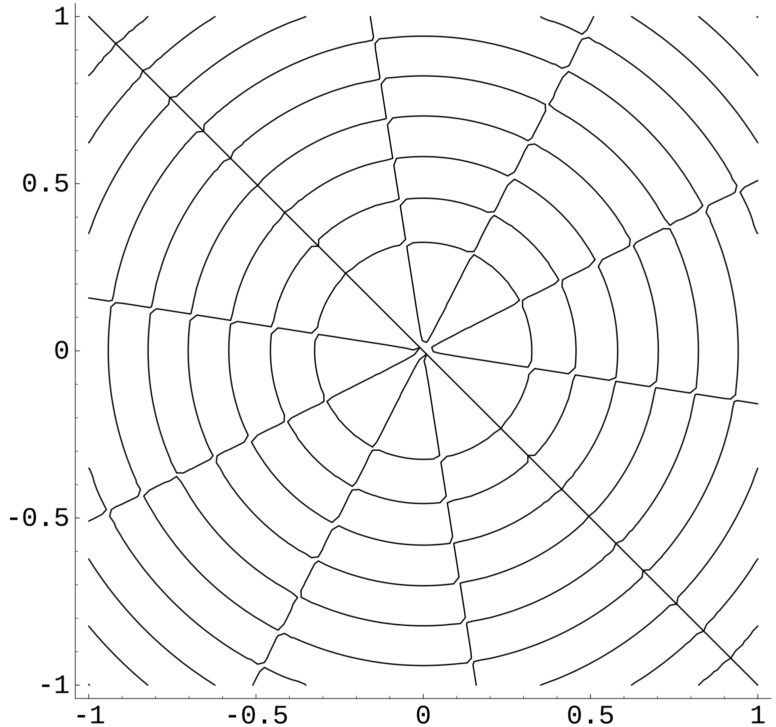


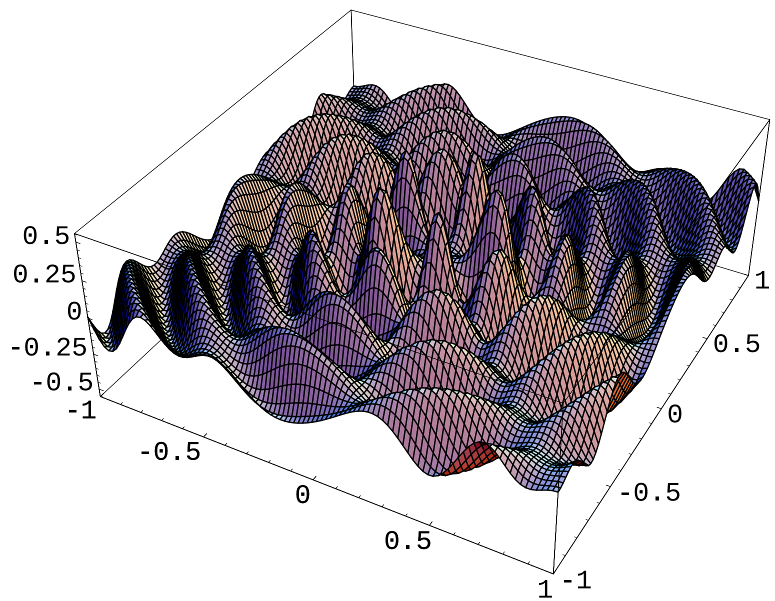
(n=1,m=3,a=1,b=1) の場合





(n=5,m=7,a=1,b=1) の場合





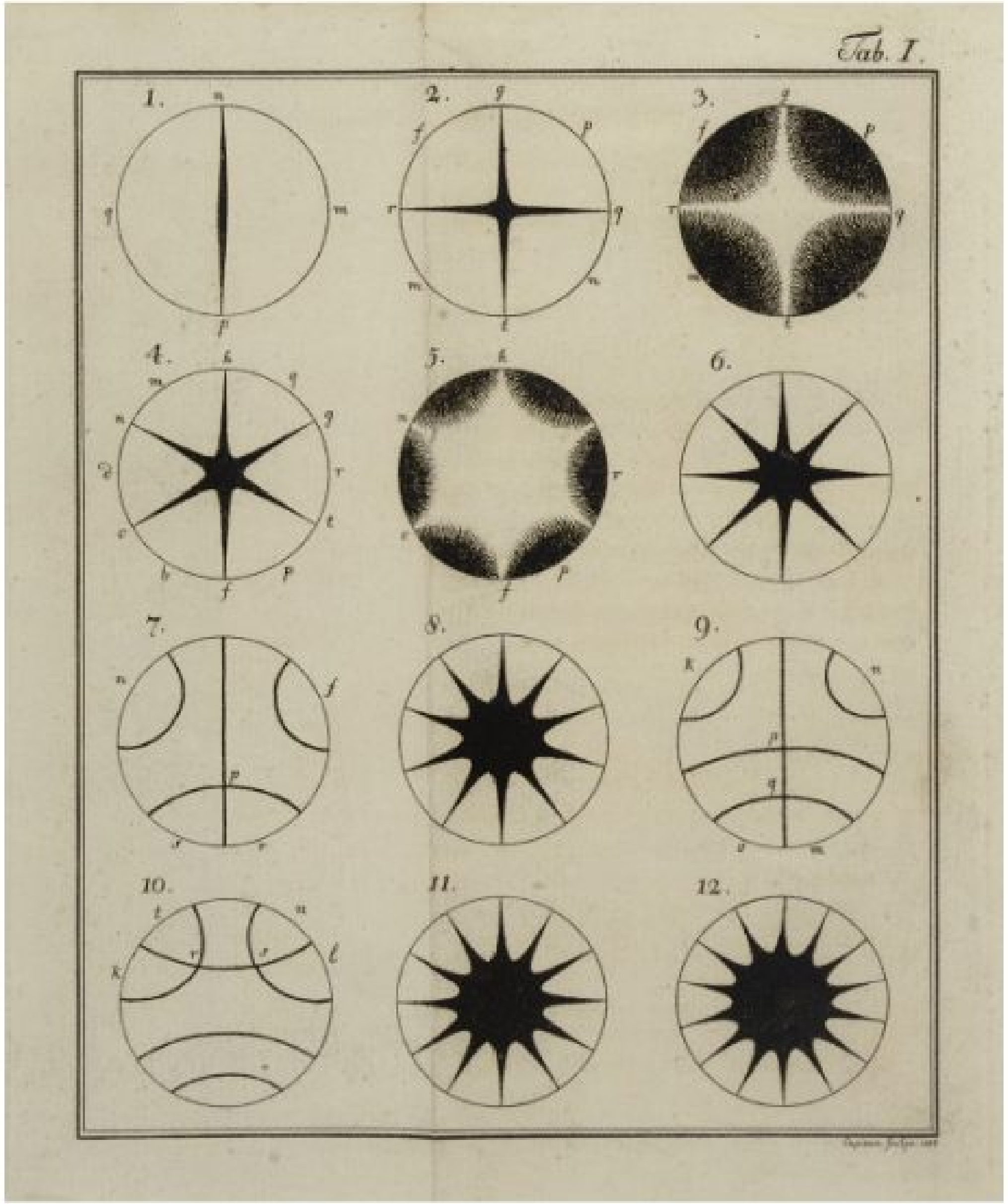


Figure 3: クラドニが実際に作った図形

まとめ

- 正方領域では数多くシミュレーションしたが、参考にした図形と一致したものは２つだった。固有値が３重根以上の場合はまだシミュレーションしていないので、その結果次第ではさらに参考にした図形と一致するものが出てくるかもしれない。また、近接している固有値の固有関数を混ぜることで近いものが出てくる可能性もある。

- 円盤領域ではクラドニの本にある図形と全く同じものは無かった。しかし、シミュレーションでは節しか表わされないので、実際に実験すると振動が非常に小さいところにも砂が溜まり、クラドニの図形と同じできる可能性がある。