ギターの音のFourier解析

中村　優介
山田　祐二

2010年2月23日

はじめに

- 楽器 (弦楽器、管楽器) の多くは一次元波動方程式でモデル化できる
- 熱方程式、波動方程式の数値解析を学んだ立場として興味がある
- 実際の楽器の出す音はどんなものなのか、Fourier 解析してみる
- 実験しやすい弦楽器ということでギターを取り上げた

一次元波動方程式(両端を固定された弦の振動モデル)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (0 \le x \le l) \tag{1}$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0 \quad (t \ge 0) \qquad \text{(境界条件)} \tag{2}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x) \qquad \text{(初期条件)} \tag{3}$$

をFourierの変数分離法で解くとき現れる固有値は、

$$\lambda_n = \frac{n^2 c^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

これに対応する周波数 f_n は

$$f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{nc}{2l} \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad f_n = nf_1 \tag{5}$$

である。また、この初期値境界値問題の解は、

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}\right) t \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}\right) t \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x, \tag{6}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \ dx \ , \quad \beta_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l g(x) \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \ dx \tag{7}$$

であり、u は周期 $T := \dfrac{1}{f_1}$ の周期関数。

リニアPCM録音

PCM (pulse code modulation) とは、音声などのアナログ信号をデジタルデータに変換する方式の一つ。信号を一定時間ごとに測定し、測定値を定められたビット数の整数値に丸めて(量子化)して記録する。

記録されたデジタルデータの品質は、1秒間に何回数値化するか(サンプリング周波数)と、データを何ビットの数値で表現するか(量子化ビット数)で決まる。

今回使用した録音形式は音楽用CDと同じサンプリング周波数44.1kHz、量子化ビット数16ビット。

実験に使用したギター

・弦は６本あり、長さは635　。

・(基本周波数が)82.4Hz(E2)〜695.26Hz(E5)の範囲の高さの音を弾ける。

チューニング

弦の張力を調節することで、音の高さを調節した。

音叉の音 ($f_1 = 440\mathrm{Hz}$) と比較したり、SoftTuner というソフトで音の高さを調べてチューニングをした。

ギターは触ったこともなかったので弦の張り替えから音のチューニングなどいろいろと苦労しました。

Fourier級数

適度な滑らかさを持つ周期Tの関数$u:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は次のように級数展開できる。

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi int}{T}\right) \tag{8}$$

ただし、c_nはFourier係数とする。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp\left(-\frac{2\pi int}{T}\right)dt \tag{9}$$

離散Fourier変換(Discrete Fourier Transform)

u :周期Tの信号
N等分点 $t_j := j\dfrac{T}{N}$ $(j = 0, 1, \cdots, N-1)$ での値$u_j := u(t_j)$ を測定。

c_nの定義式の定積分を台形公式で近似したものを離散Fourier係数という

$$C_n \fallingdotseq \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} u(t_j)\exp\left(\frac{-2\pi i n}{T}t_j\right)\frac{T}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{-jn}u_j \qquad (10)$$

ただし、

$$\omega = \omega_N := \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \qquad (11)$$

$\{C_n\}$ は n について周期 N の数列である。

逆に

$$u_j = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \omega^{jn} \tag{12}$$

も成り立つ。

$(u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}) \longmapsto (C_0, C_1, \cdots, C_{N-1})$ を離散Fourier変換と呼ぶ。
$(C_0, C_1, \cdots, C_{N-1}) \longmapsto (u_0, u_1, \cdots, u_{N-1})$ を逆離散Fourier変換と呼ぶ。

N が小さな素因数の積に分解できるとき、離散Fourier変換、逆離散Fourier変換を高速に計算するアルゴリズムがある(高速Fourier変換, FFT)。

実験内容

・ギターの音をMathematicaを用いて解析する実験を行った

・目標としたのは次の2点である

1. ギターの弦を1本だけ鳴らし、その音の基本周波数と音名を調べる

2. 和音を判別する

周期１のFourier級数展開で周波数がわかる

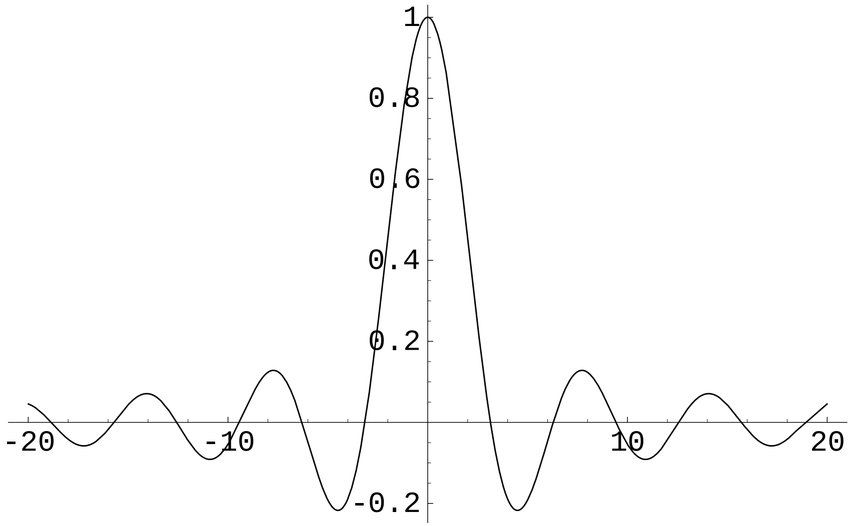
・基本周波数fの正弦波$u(t)=\exp(2\pi i f t)$のFourier係数を考える

$$c_n = \int_0^1 u(t)\exp(-2\pi i n t)dt = \cdots = \frac{1}{iA_n}\{\exp(iA_n t) - 1\}$$

ただし　　$A_n = 2\pi(f-n)$

$$|c_n| = \frac{1}{|A_n|}\left|\exp(iA_n t) - 1\right| = \left|\frac{\sin\left(A_n/2\right)}{A_n/2}\right|$$

- $\dfrac{\sin x}{x}$ のグラフは



- $\left|\dfrac{A_n}{2}\right| = \pi\,|f-n|$ が最小のとき、つまり $n \fallingdotseq f$ のとき値が最大になる
- よってピークが現れる位置 n が周波数 f の推定値となる

Mathematicaについて

Mathematica はサウンドも扱える

・WAVE ファイルの入出力
a=Import["ファイル名（拡張子.wav）"] で WAVE ファイルの内容を変数 a に入力
Export["ファイル名", a] でサウンドデータ a を WAVE ファイル形式で出力

・音を鳴らす
ListPlay[リスト] でリストで与えられる振幅で音を鳴らす

・離散 Fourier 変換
Fourier[リスト] で複素数のリストに対して離散 Fourier 変換を行う

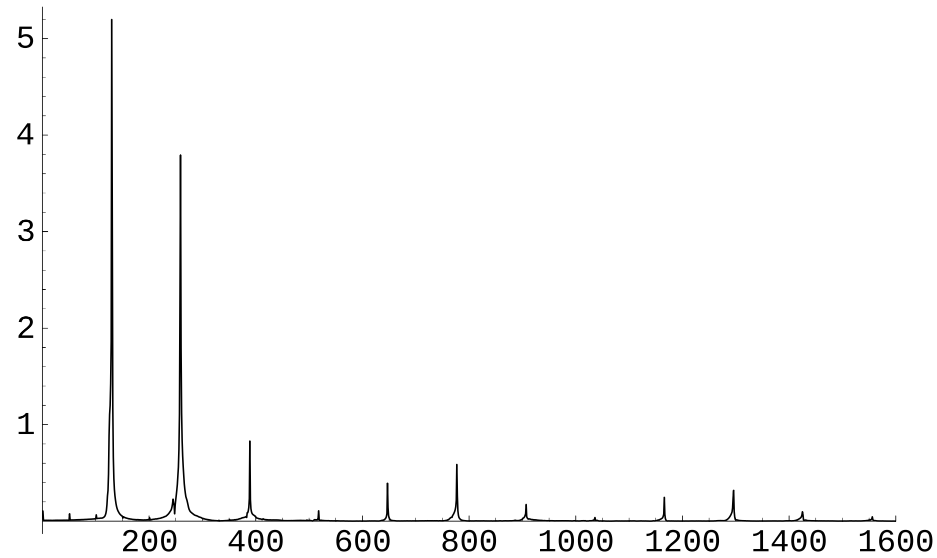
実験

・１本の弦だけを弾き、基本周波数と音名を調べる
例：ギター5弦3フレットを押さえた音

・WAVE ファイルをインポートする

・１秒分を取り出し離散 Fourier 変換する

・絶対値をとりグラフに表示する



横軸：周波数＋１（Hz）

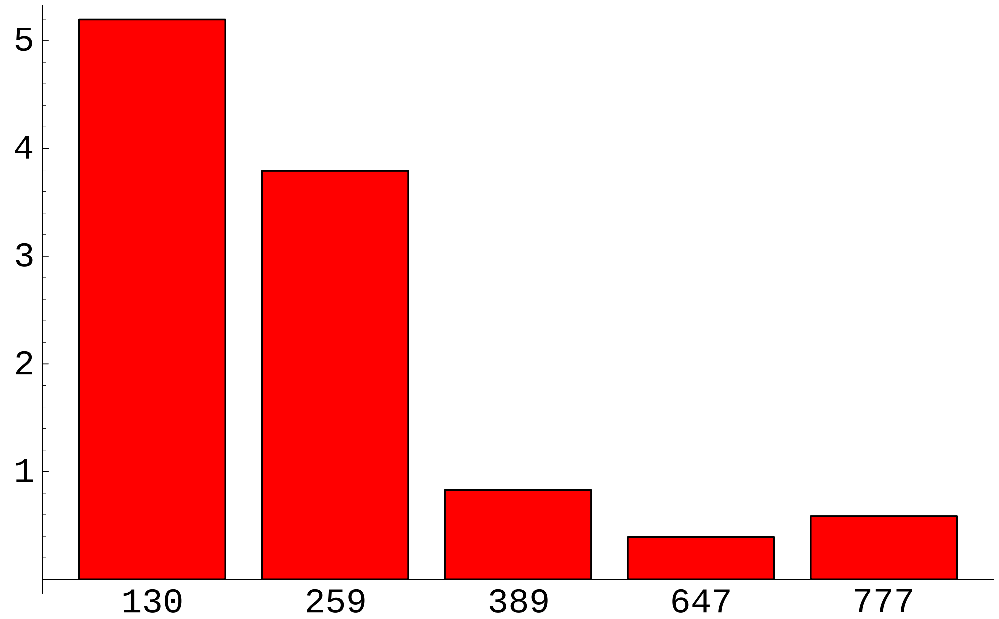
グラフのピークを調べる

- ピークが大きいほうから5つ取り出し周波数の順に並べた

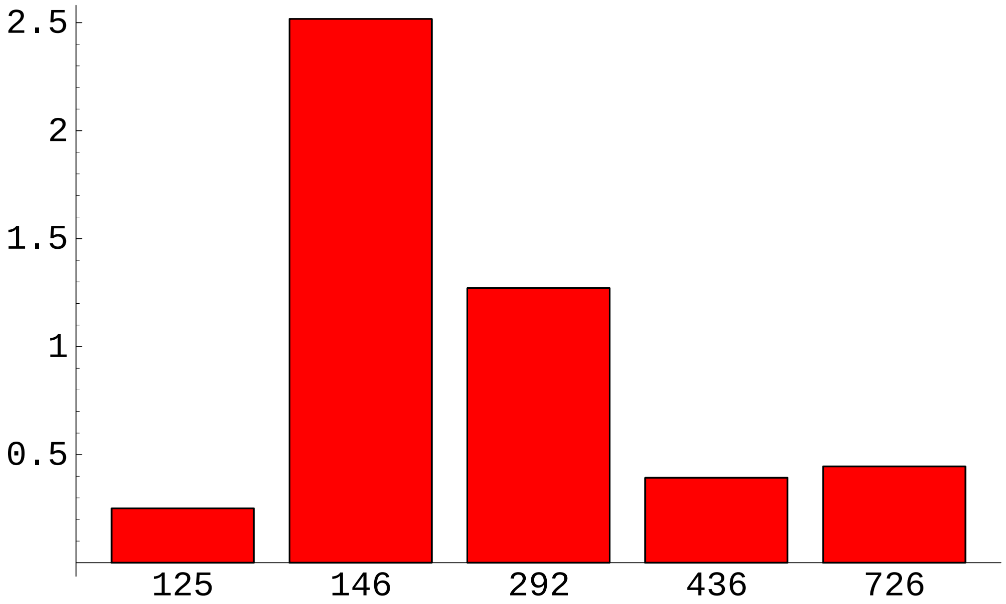
  ｛130, 259, 389, 647, 777｝

- 基本周波数（基音）は129Hzで、その2倍音・3倍音も現れている

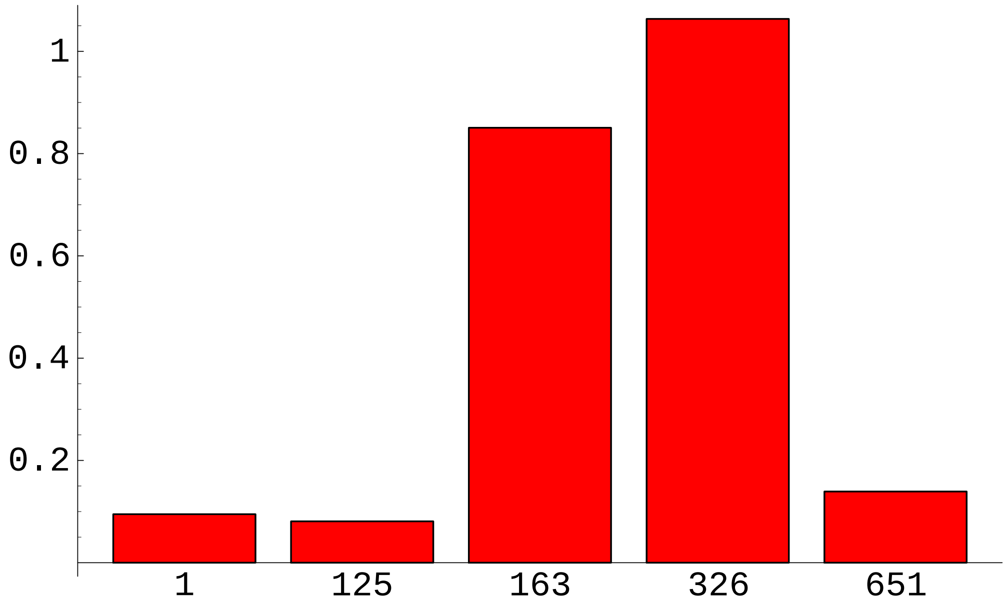
- ピークの大きさを比較する



• 基本周波数は第１ピークの周波数と考えられるが、そうでない場合もある



ギター５弦５フレット（146）



ギター５弦７フレット（163）

• しかし他のピークに比べ値がかなり小さいため、値が大きい2つのうち低い周波数を基本周波数とすればよい

音名を調べる

・周波数と音名のリストを作る
既知の周波数65.406Hzのドを基準に、5オクターブ分のリストを作成する

・リストの周波数と比べ、音名を調べる

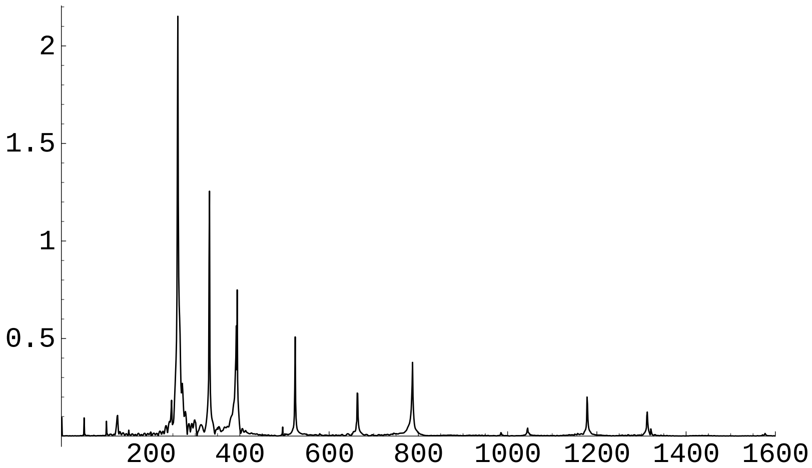
```
{{{130.812, do}}, {{261.624, do}}, {{391.993, so}}, {}, {}}
```

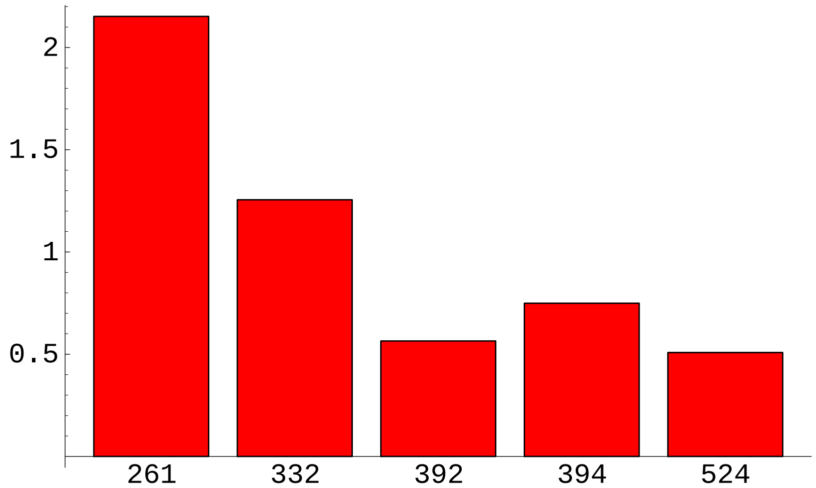
・調べた音の音名は

基音・ド（130.812Hz）,2倍音・ド（261.624Hz）,3倍音・ソ（391.993Hz）

であり、この音はド（130.812Hz）であることがわかる

和音の判別





ピーク

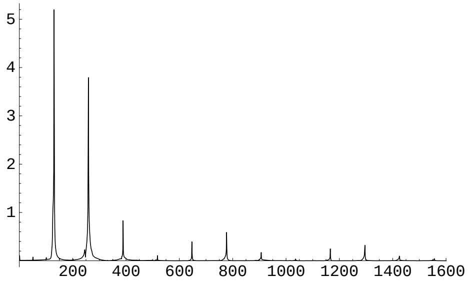
{261, 332, 392, 394, 524}

音名

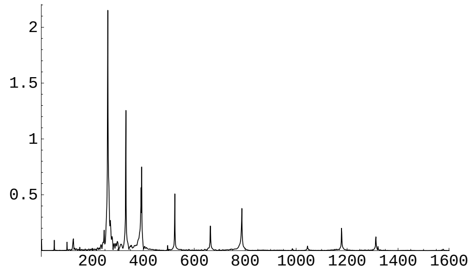
{{{261.624, do}}, {{329.626, mi}}, {{391.993, so}}, {{391.993, so}}, {{523.248, do}}}

・基本周波数が3つ現れていて、この和音はドミソであることがわかる

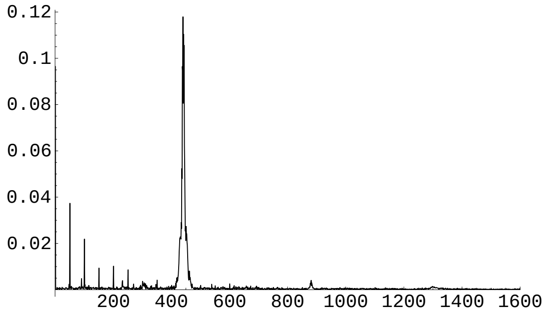
他の音との比較



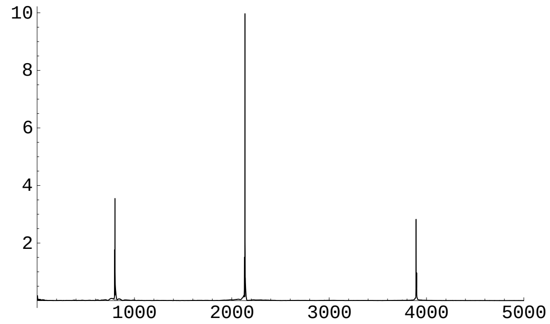
ギター5弦3フレット



ギター和音（ドミソ）



音叉（440）



鈴（800,2135,3893）

- 音叉や鈴（りん）はギターと違い、倍音がほとんどない

まとめ

- 一つの音の場合、基本周波数はピークの値が大きい2つのうち、低い周波数である
- 和音の場合、それぞれの音の基本周波数がピークとして現れる
- 一つの音でも、倍音に別の音名の音がピークとして現れているため、和音との判別は難しい
- 楽器によって倍音の現れ方が異なり、単純に整数倍が現れるということではない