卒業研究

Taylor 展開による平方根計算と建部の円周率計算の解析

明治大学理工学部数学科

椎名　信治

2006 年 2 月 25 日

目次

イントロ

ゼミで一年間かけて E.ハイラー、G.ワナーの「解析教程 上」で「指数と二項定理」について学んだ。卒業研究では、その中の「平方根近似」について十進 BASIC を用いて計算した。このことを第１章に書いた。また、第２章には小川 束、平野 葉一の「数学の歴史」で江戸時代の和算家 建部賢弘が円周率の近似値を小数第４１位まで求めた加速計算について書いた。この二つのことを、Taylor 展開を用いて検証した。

第１章　平方根の近似

1.1.1　イントロ

今回は E.ハイラー/G.ワナー（訳：蟹江幸博）が著した本「解析教程」にあるように $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\delta$ がよりよい近似式であるようにδを探すところから始め、より精度があがるように計算した。求めた近似式から $\sqrt{2}$ の値を十進 BASIC を用いて求め、その精度について解析した。

1.1.2　近似式①

$(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b}$ を考える。ここで b が小さいものと考えると、$\sqrt{a+b}\approx\sqrt{a}$ となり、$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\delta$ がよりよい近似であるようにδを探す。

$a+b=(\sqrt{a}+\delta)^2=a+2\sqrt{a}\delta+\delta^2$ となり、δ が小さいから、δ^2 を無視すれば

$\delta=\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ が得られ、したがって、

$$\boxed{\sqrt{a+b}\approx\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}}$$,（|b|≪|a|）　・・・①

が得られる。

①式に $a=v^2, b=2-a=2-v^2$ とおき代入する。すると近似式

$v+\dfrac{2-v^2}{2v}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{v}+v)$ が得られ、これを $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{a_n}+a_n)$ の数列と見て、数列で得た値の精度を見るために $\sqrt{2}$ との差をとる。

数列　$a_{n+1}=\frac{1}{2}(\frac{2}{a_n}+a_n), a_0=1.4$ から得られた値と$\sqrt{2}$との差をとるプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
INPUT a
FOR t=1 TO 9
    LET　a=1/2*(2/a+a)
    LET　b=a-SQR(2)
    PRINT USING "－%.####^^^^^":b
NEXT t
END
```

a=1.4 を代入。数列a_nででた値と$\sqrt{2}$との差を$b_n(=a_n-\sqrt{2})$とする。

b_1=7.2152E-005
b_2=1.8405E-009
b_3=1.1976E-018
b_4=5.0708E-037
b_5=9.0910E-074
b_6=2.9220E-147
b_7=3.0187E-294
b_8=3.2218E-588

上ででた値b_nを対数表記($\log_{10}$)するプログラム。
（$\log_{10}(b_n)$=a(n)とおく）

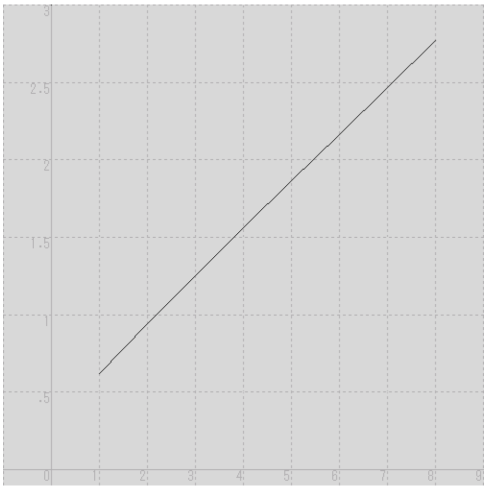
```
DIM a(10)
SET WINDOW －1, 9, －0.1, 3
DRAW grid(1,0.5)
LET　a(1)=5－LOG10(7.2152)
LET　a(2)=9－LOG10(1.8405)
LET　a(3)=18－LOG10(1.1976)
LET　a(4)=37－LOG10(5.0708)
LET　a(5)=74－LOG10(9.0910)
LET　a(6)=147－LOG10(2.9220)
LET　a(7)=294－LOG10(3.0187)
LET　a(8)=588－LOG10(3.2218)
```

```
PRINT "√ 2との差を対数(log10)で計算した値"
FOR x=1 TO 8
    PRINT x,a(x)
NEXT x
PRINT ""
PRINT "log10(a(x+1))－log10(a(x))の値"
FOR x=1 TO 7
    PRINT LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))
NEXT x
PLOT LINES
FOR x=1 TO 8
    PLOT LINES:x,LOG10(a(x));
NEXT x
END
```

$\sqrt{2}$ との差を対数($\log_{10}$)で計算した値

1	4.14175162608226
2	8.73506417821731
3	17.921688212665
4	36.2949235183437
5	73.0413883422351
6	146.534319788402
7	293.520180045247
8	587.491901422822

x	$\log_{10}(a(x+1))-\log_{10}(a(x))$の値
1	.324082048752185
2	.312112817365329
3	.306466968040941
4	.303723133921842
5	.30237033316577
6	.301698612473489
7	.301363919090469



<縦軸： $\log_{10}|\log_{10}(\text{誤差})|$　　横軸：回数 n>

グラフの傾きについて考える。計算精度が約 2 倍になっていることから、

$b_n = d \cdot 10^{-2^{n \cdot c}} = d' \cdot 10^{-2^n}$ とする。これを対数表記したので

$$
\begin{aligned}
\log_{10} b_n &= \log_{10}\left(d' \cdot 10^{-2^n}\right) \\
&= \log_{10} d' + \log_{10} 10^{-2^n} \\
&= \log_{10} d' - 2^n
\end{aligned}
$$

さらに対数をとったので

$$
\begin{aligned}
\log_{10}\left|\log_{10} b_n\right| &= d'' + \log_{10} 2^n \\
&= d'' + n \log_{10} 2
\end{aligned}
$$

となるので、グラフの傾きは $\log_{10} 2$　0.301 になる。

1.1.3　近似式②

① 式をより近似させるために、

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} + \delta$　　とし、平方を考えると、

$a+b = a+b+\dfrac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \dfrac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2$　が得られ最後の二項を無視すれば、$\delta = -\dfrac{b^2}{8\sqrt{a^3}}$ と

なり

$$
\boxed{\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}}
$$

・・・②

が得られる。この近似式に　$a=v^2, b=2-a=2-v^2$　とおき代入する。すると

$$v+\frac{2-v^2}{2v}-\frac{4-4v^2+v^4}{8v^3}=\frac{3v}{8}+\frac{3}{2v}-\frac{1}{2v^3}$$

が得られ、これを $a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{2a_n}-\frac{1}{2a_n^3}$ の数列と見て、数列で得た値の精度を見るために $\sqrt{2}$ との差をとる。

数列　$a_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{3}{2a_n}-\frac{1}{2a_n^3}$　, a_0=1.4 から得られた値と $\sqrt{2}$ との差をとるプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
INPUT a
FOR t=1 TO 6
    LET　a=3/8*a+3/(2*a)－1/(2*a^3)
    LET　b=SQR(2)－a
    PRINT USING "－%.####^^^^^":b
NEXT t
END
```

a= 1.4 を代入。数列 a_n ででた値と $\sqrt{2}$ との差を $b_n(=a_n-\sqrt{2})$ とする。

b_1= 7.3438E-007
b_2=9.9017E-020
b_3=2.4270E-058
b_4=3.5741E-174
b_5=1.1414E-521

上ででた値 b_n を対数表記($\log_{10}$)するプログラム

```
DIM a(10)
SET WINDOW －1, 9, －0.1, 3
DRAW grid(1,0.5)
LET　a(1)=7－LOG10(7.3438)
LET　a(2)=20－LOG10(9.9017)
LET　a(3)=58－LOG10(2.4270)
LET　a(4)=174－LOG10(3.5741)
LET　a(5)=521－LOG10(1.1414)
```

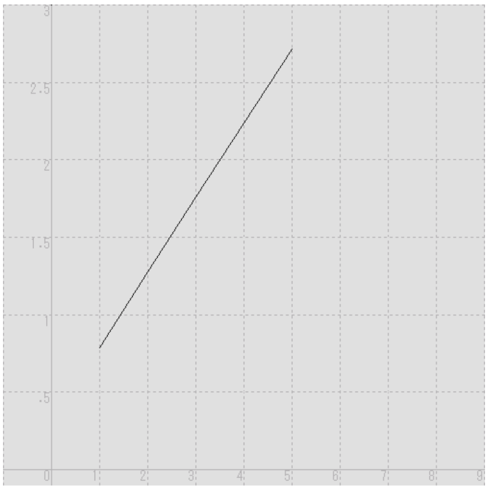
```
PRINT "√２との差を対数(log10)で計算した値"
FOR x=1 TO 5
    PRINT x,a(x)
NEXT x
PRINT ""
PRINT "log10(a(x+1))－log10(a(x))の値"
PRINT " x","LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))"
FOR x=1 TO 4
    PRINT x,LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))
NEXT x
PLOT LINES
FOR x=1 TO 5
    PLOT LINES:x,LOG10(a(x));
NEXT x
END
```

√２との差を対数($\log_{10}$)で計算した値

1	6.13407915915964
2	19.0042902359846
3	57.6149302236681
4	173.446833300504
5	520.942562131787

$\log_{10}(a(x+1))-\log_{10}(a(x))$の値

x	LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))
1	.491102278226675
2	.481683385856043
3	.478631334878642
4	.47762346654475



<縦軸：$\log_{10}|\log_{10}(\text{誤差})|$　　横軸：回数 n>

結果を見てみると、計算精度が約３倍になっていることがわかる。なので先ほど同様にしてグラフの傾きは$\log_{10}3$である。

また、①式、②式を$\sqrt{a}$で割って、$\dfrac{b}{a}$を x で置き換えると

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{x}{2}, \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

が得られる。この計算を続けていけば結果は

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}+bx^2++cx^3+dx^4+\cdot\cdot\cdot$$

の形の級数になって、係数 b,c,d,・・・を決めていきたい。この級数を$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+x$に代入して、x の同じベキの係数を比較すれば、$b=-\dfrac{1}{8}, c=\dfrac{1}{16}, d=-\dfrac{5}{128}$,・・・がわかり、この結果

$$\boxed{(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdot\cdot\cdot} \qquad \cdot\cdot\cdot③$$

が得られる。

1.1.4　近似式③

今度は逆に③式から近似式を求める。

$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$　の x を $\frac{b}{a}$ に置き換えて $\sqrt{a}$ をかけると

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}+\frac{b^3}{16\sqrt{a^5}}$$

が得られ、さらに $a=v^2, b=x-v^2$　を代入すると

$$\sqrt{x}=\frac{5}{16}v+\frac{15x}{16v}-\frac{5x^2}{16v^3}+\frac{x^3}{16v^5}$$

が得られる。これを $a_{n+1}=\frac{5}{16}a_n+\frac{15x}{16a_n}-\frac{5x^2}{16a_n^3}+\frac{x^3}{16a_n^5}$　の数列とみて、数列で得た値の精度を見るために $\sqrt{2}$ との差をとる。

③数列　$a_{n+1}=\frac{5}{16}a_n+\frac{15x}{16a_n}-\frac{5x^2}{16a_n^3}+\frac{x^3}{16a_n^5}$　, a_0=1 から得られる値と $\sqrt{2}$ との差を求めるプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
INPUT a,x
FOR t=1 TO 6
    LET   a=5*a/16+15*x/(16*a)－5*x^2/(16*a^3)+x^3/(16*a^5)
    LET   b=a－SQR(x)
    PRINT USING "－%.####^^^^^":b
NEXT t
END
```

a= 1, x=2 を代入。数列 a_n ででた値と $\sqrt{2}$ との差を $b_n(=a_n-\sqrt{2})$ とする。

b_1=2.3286E-002
b_2=6.1269E-008
b_3=3.1138E-030
b_4=2.0773E-119
b_5=4.1143E-476

上ででた値を対数表記($\log_{10}$)するプログラム

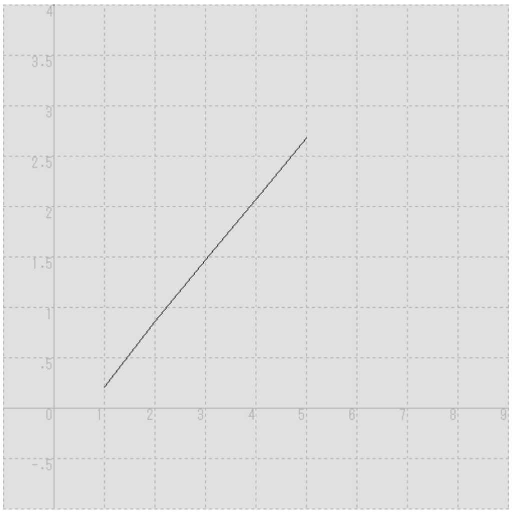
```
DIM a(10)
SET WINDOW -1, 9, -1, 4
DRAW grid(1,0.5)
```

```
LET　a(1)=2－LOG10(2.3286)
LET　a(2)=8－LOG10(6.1269)
LET　a(3)=30－LOG10(3.1138)
LET　a(4)=119－LOG10(2.0773)
LET　a(5)=476－LOG10(4.1143)
PRINT "√２との差を対数(log10)で計算した値"
FOR x=1 TO 5
    PRINT x,a(x)
NEXT x
PRINT ""
PRINT "Log10(a(x+1))－Log10(a(x))の値"
FOR x=1 TO 4
    PRINT LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))
NEXT x
PLOT LINES
FOR x=1 TO 5
    PLOT LINES:x,LOG10(a(x));
NEXT x
END
```

√２との差を対数($\log_{10}$)で計算した値

1	1.63290510687634
2	7.21275920793353
3	29.506709285694
4	118.682500778893
5	475.385704044291

x	$\log_{10}(a(x+1)) - \log_{10}(a(x))$の値
1	.645140486580318
2	.611819343958112
3	.604465911008998
4	.602659428508476



<縦軸：$\log_{10}|\log_{10}(\text{誤差})|$　　横軸：回数 n>

結果を見てみると、計算精度が約４倍になっていることがわかる。なので先ほどと同様にして、このグラフの傾きは$\log_{10}4=2\log_{10}2$である。

1.1.5　近似式④

次に　$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$　から近似式を求める。

上記と同様にして　x を$\dfrac{b}{a}$に置き換えて$\sqrt{a}$をかけると

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}+\frac{b^3}{16\sqrt{a^5}}-\frac{5b^4}{128\sqrt{a^7}}$$

が得られ、さらに$a=v^2,b=x-v^2$　を代入すると

$$\sqrt{x}=\frac{35}{128}v+\frac{35x}{32v}-\frac{35x^2}{64v^3}+\frac{7x^3}{32v^5}-\frac{5x^4}{128v^7}$$

が得られる。これを$a_{n+1}=\dfrac{35}{128}a_n+\dfrac{35x}{32a_n}-\dfrac{35x^2}{64a_n^3}+\dfrac{7x^3}{32a_n^5}-\dfrac{5x^4}{128a_n^7}$　の数列とみて、数列で得た値の精度を見るために$\sqrt{2}$との差をとる。

数列　$a_{n+1}=\dfrac{35}{128}a_n+\dfrac{35x}{32a_n}-\dfrac{35x^2}{64a_n^3}+\dfrac{7x^3}{32a_n^5}-\dfrac{5x^4}{128a_n^7}$　,a_0=10 から得られた値と$\sqrt{2}$との

差を求めるプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
INPUT a,x
```

```
FOR t=1 TO 7
    LET a=35*a/128+35*x/(32*a)－35*x^2/(64*a^3)+7*x^3/(32*a^5)－5*x^4/(128*a^7)
    LET　b=a－SQR(x)
    PRINT USING "－%.####^^^^^":b
NEXT t
END
```

a=10, x=2 を代入。数列 a_n ででた値と $\sqrt{2}$ との差を $b_n(=a_n-\sqrt{2})$ とする。

```
 1.5367E+000
 5.6348E-002
 1.0226E-007
 2.4465E-036
 1.9174E-179
 5.6688E-895
```

上ででた値を対数表記(log10)する。

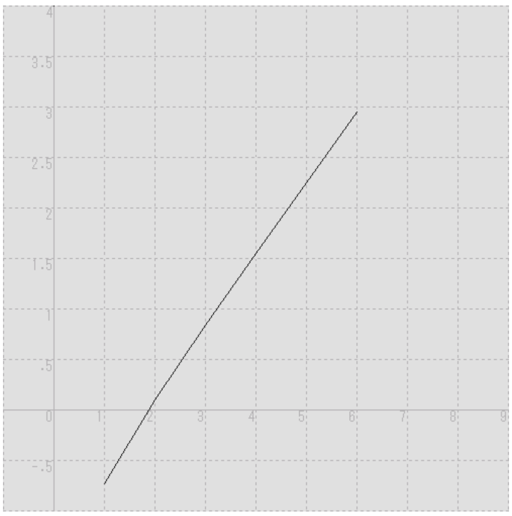
```
DIM a(10)
SET WINDOW －1, 9, －1, 4
DRAW grid(1,0.5)
LET　a(1)=LOG10(1.5367)
LET　a(2)=2－LOG10(5.6348)
LET　a(3)=7－LOG10(1.0226)
LET　a(4)=36－LOG10(2.4465)
LET　a(5)=179－LOG10(1.9174)
LET　a(6)=895－LOG10(5.6688)
PRINT "√２との差を対数(log10)で計算した値"
FOR x=1 TO 6
    PRINT x,a(x)
NEXT x
PRINT ""
PRINT "Log10(a(x+1))－Log10(a(x))の値"
FOR x=1 TO 5
    PRINT LOG10(a(x+1))－LOG10(a(x))
NEXT x
PLOT LINES
```

```
FOR x=1 TO 6
    PLOT LINES:x,LOG10(a(x));
NEXT x
END
```

√ 2との差を対数($\log_{10}$)で計算した値

1	.186589091272407
2	1.24912149407002
3	6.99029421160948
4	35.611454779904
5	178.717287276965
6	894.246508865011

x	$\log_{10}(a(x+1))-\log_{10}(a(x))$の値
1	.825718431879356
2	.747890773492561
3	.707094260628449
4	.700576848130326
5	.699290689609873



<縦軸： $\log_{10}|\log_{10}$(誤差)|　　横軸：回数 n>

結果を見てみると、計算精度が約５倍になっていることがわかる。なので先ほどと同様にしてこのグラフの傾きは$\log_{10}5$である。

第 2 章　円周率と内接・外接正多角形

2.1　　建部賢弘の用いた加速法

2.1.1 イントロ

和算家　建部賢弘(1664－1739)は半径$\frac{1}{2}$の円に内接する正2^{10}角形までの周の長さを求め、増約の術(リチャードソン加速法)により円周率の近似値を小数第４１位まで求めた。このことが「綴術算経」(1772)に記されている。その計算を再現し、なぜ建部の方法でうまくいくのか Taylor 展開を用いて検討した。また、建部はやっていないが円の外接正多角形についても建部の加速法を用いて計算し、同様にうまくいくことを確認した。結果、円周率の近似値を小数第３２位まで求めることができた。

2.1.2 周の長さを求める

半径$\frac{1}{2}$の円に内接する正 n 角形の周の長さをp_n、外接する正 n 角形の周の長さをP_nと求めていく。内接正 n 角形の一辺の長さは

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{n}$$

であるから、内接正 n 角形の周の長さp_nは

$$p_n=\sin\frac{\pi}{n}$$

となる。同様にして外接正 n 角形の周の長さを求めると

$$P_n=n\tan\frac{\pi}{n}$$

となる。次に内接正 2n 角形の周の長さをp_{2n}、外接正 n 角形の周の長さP_nをp_nを用いて表す。

$$p_{2n}^2=\left(2n\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{(2n)^2\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{2}$$

$$=2n^2\left(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)=2n\left(n-\sqrt{n^2-p_n^2}\right)$$

$$P_n = n\tan\frac{\pi}{n} = \frac{n\sin\dfrac{\pi}{n}}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}}} = \frac{p_n}{\sqrt{1-\left(\dfrac{p_n}{n}\right)^2}}$$

さらに、これらから p_{2^n} と P_{2^n} を求める。

$$p_{2n} = \sqrt{2n\left(n-\sqrt{n^2-p_n^2}\right)} \quad \text{より} \quad p_{2^n} = \sqrt{2\cdot 2^{n-1}\left(2^{n-1}-\sqrt{2^{2(n-1)}-p_{2^{n-1}}^2}\right)}$$

$$= \sqrt{2^n\left(2^{n-1}-\sqrt{2^{2(n-1)}-p_{2^{n-1}}^2}\right)}$$

$$P_n = \frac{p_n}{\sqrt{1-\left(\dfrac{p_n}{n}\right)^2}} \quad \text{より} \quad P_{2^n} = \frac{p_{2^n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{p_{2^n}}{2^n}\right)^2}}$$

2.1.3 建部の加速法

p_{2^n} , P_{2^n} を簡素化するために σ_n , τ_n とおきかえる。すると、次の式を満たす。

$(n \geq 2$ かつ $n \in N$ として$)$

$$\sigma_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}\left(2^n-\sqrt{2^{2n}-\sigma_n^2}\right)} \quad , \sigma_2 = 2\sqrt{2}$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sigma_n}{2^n}\right)^2}}$$

実際に十進 BASIC を使用し σ_n , τ_n の値を求める。

σ_n を計算し階差を出すプログラム

```
REM 内接 2^n 角形の長さをσ(n)とおき計算したもの
OPTION BASE 0
DIM s(15)
LET   fmt$="## #.############### #.###############"
LET   s(2)=2*SQR(2)
FOR n=2 TO 10
    LET   s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
    PRINT USING fmt$:n, s(n),s(n+1)－s(n)
```

```
NEXT n
END
```

τ_nを計算し階差を出すプログラム

```
REM  外接正 2^n 角形の周の長さをτ(n)とおき計算したもの
OPTION BASE 0
DIM s(11)
DIM t(10)
LET   fmt$="## #.################ "
LET   s(2)=2*SQR(2)
FOR n=2 TO 10
    LET   s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n－SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
    LET   t(n)=s(n)/SQR(1－(s(n)/2^n)^2)
    PRINT USING fmt$: n,t(n)
NEXT n
FOR n=3 TO 10
    PRINT USING fmt$: n,t(n)－t(n－1)
NEXT n
END
```

以下、結果を示す。

	σ_nの値	τ_nの値
n=2	2.828427124746190…	4.000000000000000…
n=3	3.061467458920718…	3.313708498984760…
n=4	3.121445152258052…	3.182597878074528…
n=5	3.136548490545939…	3.151724907429256…
n=6	3.140331156954753…	3.144118385245904…
n=7	3.141277250932773…	3.142223629942457…
n=8	3.141513801144301…	3.141750369168966…
n=9	3.141572940367091…	3.141632080703182…
n=10	3.141587725277160…	3.141602510256809…
π	3.141592653589793…	3.141592653589793…

	$\sigma_{n+1}-\sigma_n$	$\tau_{n+1}-\tau_n$
n=2	.233040334174530…	-.686291501015240…
n=3	.059977693337330…	-.131110620910230…

n=4	.015103338287890…	-.030872970645270…
n=5	.003782666408820…	-.007606522183350…
n=6	.000946093978040…	-.001894755303430…
n=7	.000236550211510…	-.000473260773500…
n=8	.000059139222980…	-.000118288465600…
n=9	.000014784910690…	-.000029570445750…

結果より、σ_n, τ_nの n の値を増加させることにより、徐々に円周率に近づいていることがわかるが内接正2^{10}角形でも小数第 4 位までしか一致せず、外接正2^{10}角形についても小数第 3 位までしか一致していない。また、階差を見てみるとσ_n, τ_nともに差は段々小さくなり、ほぼ$\dfrac{1}{4}$倍になっていることに気付く。

次に階差の比を求める。すなわち

$$\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_2}, \frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_4-\sigma_3}, \frac{\sigma_4-\sigma_3}{\sigma_5-\sigma_4}, \frac{\sigma_5-\sigma_4}{\sigma_6-\sigma_5}, \frac{\sigma_6-\sigma_5}{\sigma_7-\sigma_6}, \cdots$$

$$\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_2}, \frac{\tau_3-\tau_2}{\tau_4-\tau_3}, \frac{\tau_4-\tau_3}{\tau_5-\tau_4}, \frac{\tau_5-\tau_4}{\tau_6-\tau_5}, \frac{\tau_6-\tau_5}{\tau_7-\tau_6}, \cdots$$

を求める。

σ_nの階差の比を求めるプログラム

```
REM 内接正 n 角形の周の長さの階差を計算したもの
OPTION BASE 0
DIM a(10)
LET   fmt$="#.#####################"
LET   a(1)=2
LET   a(2)=2*SQR(2)
FOR n=2 TO 9
    LET   a(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)-a(n)^2)))
    PRINT USING fmt$: (a(n)-a(n-1))/(a(n+1)-a(n))
NEXT n
END
```

τ_nの階差の比を求めるプログラム

```
REM 外接正 n 角形の周の長さの階差を計算したもの
OPTION BASE 0
```

```
DIM s(25)
DIM t(25)
LET   fmt$="#.######################"
LET   s(2)=2*SQR(2)
LET   s(3)= 3.06146745892072
LET   s(4)=3.12144515225805
LET   t(2)=4
LET   t(3)=3.31370849898476
FOR n=4 TO 11
    LET   s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
    LET   t(n)=s(n)/SQR(1－(s(n)/2^n)^2)
    PRINT USING fmt$:(t(n－1)－t(n－2))/(t(n)－t(n－1))
NEXT n
END
```

以下、結果を示す。

σ_n の階差の比	τ_n の階差の比
3.55486584620912103666…	5.23444627331231747576…
3.88545009331774765438…	4.24677697577875673657…
3.97115473374762422162…	4.05874983351034529388…
3.99277563908254167167…	4.01451425918277128203…
3.99819309359758083295…	4.00361789859160389237…
3.99954822237449330196…	4.00090381045238474359…
3.99988705240434682624…	4.00022591113888966691…
3.99997176290175348568…	4.00005647519317789526…

両方とも明らかに、４に近づいていることがわかる。ここで４との差を比べて見てみる。

σ_n	τ_n
4.45134E-001	1.23445E+000
1.14550E-001	2.46777E-001
2.88453E-002	5.87498E-002
7.22436E-003	1.45143E-002
1.80691E-003	3.61790E-003
4.51778E-004	9.03810E-004
1.12948E-004	2.25911E-004

2.82371E-005　　　　　　　　　　5.64752E-005

また、４に近づいていることから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+2}-\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}-\sigma_n}=\frac{1}{4}\quad,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\tau_{n+2}-\tau_{n+1}}{\tau_{n+1}-\tau_n}=\frac{1}{4}$$

が成り立つように見える。

建部は、次のような加速計算を行った。

$$\frac{\sigma_{11}-\sigma_{10}}{\sigma_{10}-\sigma_9}\quad\frac{1}{4},\frac{\sigma_{12}-\sigma_{11}}{\sigma_{11}-\sigma_{10}}\quad\frac{1}{4},\frac{\sigma_{13}-\sigma_{12}}{\sigma_{12}-\sigma_{11}}\quad\frac{1}{4},\cdots$$

を用いて

$$\sigma_n=\sigma_{10}+\left(\sigma_{11}-\sigma_{10}\right)+\left(\sigma_{12}-\sigma_{11}\right)+\cdots+\left(\sigma_n-\sigma_{n-1}\right)$$

の階差を等比数列と見ると、二項以降が次のように初項$\frac{1}{4}\left(\sigma_{10}-\sigma_9\right)$,公比$\frac{1}{4}$の等比数列となる。

$$\sigma_n\quad\sigma_{10}+\frac{1}{4}\left(\sigma_{10}-\sigma_9\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\sigma_{10}-\sigma_9\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-10}\left(\sigma_{10}-\sigma_9\right)$$

$$\sigma_\infty\quad\sigma_{10}+\frac{1}{4}\left(\sigma_{10}-\sigma_9\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4-1}\left(4\sigma_{10}-\sigma_9\right)$$

そこで

$$\sigma_n^{(1)}=\frac{1}{4-1}\left(4\sigma_{n+1}-\sigma_n\right)$$

と定義する。同様にして$\tau_n^{(1)}$も

$$\tau_n^{(1)}=\frac{1}{4-1}\left(4\tau_{n+1}-\tau_n\right)$$

と定義し、実際に$\sigma_n^{(1)},\tau_n^{(1)}$の値を求めてみる。

$\sigma_n^{(1)}$を計算するプログラム

```
REM  σ{1}=(4*σ(n+1)-σ(n))/3 を計算したもの（加速法）
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
OPTION BASE 0
LET　fmt$="－%.###^^^^^ #.####################"
DIM s(20)
```

```
DIM s1(20)
LET   s(1)=2
LET   s(2)=2*SQR(2)
FOR n=2 TO 11
    LET s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
    LET   s1(n)=(4*s(n+1)－s(n))/3
    PRINT USING fmt$: PI－s1(n),s1(n)
NEXT n
END
```

$\tau_n^{(1)}$ を計算するプログラム

```
REM  τ{1}=(4*τ(n+1)-τ(n))/3 を計算したもの（加速法）
OPTION BASE 0
LET   fmt$="－%.###^^^^^ #.####################"
DIM s(11)
DIM t(20)
DIM t1(20)
LET   s(2)=2*SQR(2)
LET   s(3)= 3.06146745892072
LET   t(2)=4
FOR n=3 TO 10
    LET   m=n－2
    LET   s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
    LET   t(n)=s(n)/SQR(1－(s(n)/2^n)^2)
    LET   t1(m)=(4*t(n)－t(n-1))/3
    PRINT USING fmt$:PI－t1(m),t1(m)
NEXT n
END
```

以下、結果を示す。

n	πとの差	$\sigma_n^{(1)}$ の値	πとの差	$\tau_n^{(1)}$ の値
1	2.445E-003	3.139147570312227…	5.665E-002	3.084944665313016…
2	1.549E-004	3.141437716703830…	2.698E-003	3.138894337771119…
3	9.717E-006	3.141582936641901…	1.587E-004	3.141433917214167…
4	6.078E-007	3.141592045757690…	9.776E-006	3.141582877851455…

5	3.800E-008	3.141592615592112…	6.087E-007	3.141592044841309…
6	2.375E-009	3.141592651214810…	3.801E-008	3.141592615577804…
7	1.484E-010	3.141592653441354…	2.375E-009	3.141592651214588…
8	9.277E-012	3.141592653580515…	1.484E-010	3.141592653441353…
9	5.798E-013	3.141592653589213…	9.276E-012	3.141592653580517…
π		3.141592653589793…		3.141592653589793…

$\sigma_n^{(1)}$は小数第 11 位まで、$\tau_n^{(1)}$は小数第 10 位まで一致し、ともにσ_n, τ_nより精度が 7 桁あがっている。この加速計算のことを「増約の術」と言っていた。

さらに、$\sigma_n^{(1)}, \tau_n^{(1)}$の階差の比を求める。

$\sigma_n^{(1)}$の階差の比を求めるプログラム

```
REM  内接正 n 角形の周の長さの階差を計算したもの
OPTION BASE 0
DIM a(25)
DIM a1(25)
LET   fmt$="##.######################"
LET   a(1)=2
LET   a(2)=2*SQR(2)
FOR n=2 TO 11
    LET   a(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－a(n)^2)))
    LET   a1(n)=(4*a(n)－a(n-1))/3
NEXT n
FOR n=3 TO 10
    PRINT USING fmt$: (a1(n)－a1(n－1))/(a1(n+1)－a1(n))
NEXT n
END
```

$\tau_n^{(1)}$の階差の比を求めるプログラム

```
REM  τn(1) の階差の比を計算したもの

OPTION BASE 0
LET   fmt$="##.######################"
DIM s(25)
```

```
DIM t(25)
DIM t1(25)
LET   s(3)= 3.06146745892072
LET   t(2)=4
LET   t1(1)=3.08494466531301
LET   t1(2)=3.13889433777112
FOR n=3 TO 12
   LET   m=n－1
   LET   s(n+1)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n)^2)))
   LET   t(n)=s(n)/SQR(1－(s(n)/2^n)^2)
   LET   t1(m)=(4*t(n)－t(n－1))/3
NEXT n
FOR m=4 TO 11
   PRINT USING fmt$: (t1(m－1)－t1(m－2))/(t1(m)－t1(m－1))
NEXT m
END
```

以下、結果を示す。

	$\sigma_n^{(1)}$ の階差の比	$\tau_n^{(1)}$ の階差の比
1	15.09862896862274399809…	21.24354589724912684709…
2	15.77019259214182263103…	17.04866123883626985751…
3	15.94226502679433875049…	16.24967842877272892245…
4	15.98554849723619263377…	16.06168508531341577470…
5	15.99638601333417735819…	16.01537603685127103004…
6	15.99909643388184793128…	16.00384119241400607968…
7	15.99977410412948456060…	16.00096012221476614097…
8	15.99994352576105620117…	16.00024001956316175211…

これらは明らかに１６に近づいているのがわかる。ここで１６との差を見てみる。

1	9.01371E-001	5.24355E+000
2	2.29807E-001	1.04866E+000
3	5.77350E-002	2.49678E-001
4	1.44515E-002	6.16851E-002

5	3.61399E-003	1.53760E-002
6	9.03566E-004	3.84119E-003
7	2.25896E-004	9.60122E-004
8	5.64742E-005	2.40020E-004

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_{n+2}-\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}-\sigma_n}=\frac{1}{16}\quad ,\lim_{n\to\infty}=\frac{\tau_{n+2}-\tau_{n+1}}{\tau_{n+1}-\tau_n}=\frac{1}{16}$$

のように見える。同様にして、

$$\sigma_n^{(2)}=\frac{1}{16-1}\left(16\sigma_{n+1}^{(1)}-\sigma_n^{(1)}\right)\quad ,\tau_n^{(2)}=\frac{1}{16-1}\left(16\tau_{n+1}^{(1)}-\tau_n^{(1)}\right)$$

と定義し、これらを考えると精度があがる。

この加速計算を繰り返すと

$$\sigma_n^{(k)}=\frac{1}{4^k-1}\left(4^k\sigma_{n+1}^{(k-1)}-\sigma_n^{(k-1)}\right),\tau_n^{(k)}=\frac{1}{4^k-1}\left(4^k\tau_{n+1}^{(k-1)}-\tau_n^{(k-1)}\right)$$

が得られ、これらを考えると精度があがる。

また、建部は増約の術を繰り返し用いることを「累遍増約術」と言っていた。

2.1.4　加速法で収束が速くなることの証明

Sin のテイラー展開を用いて

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= 2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\\
&=2^n\left(\frac{\pi}{2^n}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^7+\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^9-\cdots\right)\\
&=\pi-\frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{2^{2n}}+\frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{2^{4n}}-\frac{1}{7!}\frac{\pi^7}{2^{6n}}+\frac{1}{9!}\frac{\pi^9}{2^{8n}}-\cdots\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{(2m-1)!}\frac{1}{2^{2n(m-1)}}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\underline{\underline{\frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{(2m-1)!}}}\frac{1}{4^{n(m-1)}}\\
&=\pi+\sum_{m=2}^{\infty}\underline{\underline{a_m^{(0)}}}\frac{1}{4^{n(m-1)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{4-1}\left(4\sigma_{n+1}-\sigma_n\right) \\
&= \frac{1}{4-1}\left(4\left(\pi+\sum_{m=2}^{\infty} a_m^{(0)}\frac{1}{4^{n(m-1)}}\right)-\pi+\sum_{m=2}^{\infty} a_m^{(0)}\frac{1}{4^{n(m-1)}}\right) \\
&= \pi+\frac{1}{4-1}\sum_{m=2}^{\infty} a_m^{(0)}\left(\frac{4}{4^{(n+1)(m-1)}}-\frac{1}{4^{n(m-1)}}\right) \\
&= \pi+\frac{1}{4-1}\sum_{m=3}^{\infty}\underline{\underline{\left(\frac{4}{4^{m-1}}-1\right)a_m^{(0)}}}\,\frac{1}{4^{n(m-1)}} \\
&= \pi+\frac{1}{4-1}\sum_{m=3}^{\infty}\underline{\underline{a_m^{(1)}}}\,\frac{1}{4^{n(m-1)}}
\end{aligned}
$$

以下、同様にして

$$
\sigma_n^{(k)} = \pi+\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\sum_{m=k+2}^{\infty} a_m^{(k)}\frac{1}{4^{n(m-1)}}
$$

と予想できる。

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{(k+1)} &= \frac{1}{4^{k+1}-1}\left(4^{k+1}\sigma_{n+1}^{(k)}-\sigma_n^{(k)}\right) \\
&= \frac{1}{4^{k+1}-1}\left(4^{k+1}\left(\pi+\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\sum_{m=k+2}^{\infty} a_m^{(k)}\frac{1}{4^{(n+1)(m-1)}}\right)\right. \\
&\qquad \left.-\left(\pi+\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\sum_{m=k+2}^{\infty} a_m^{(k)}\frac{1}{4^{n(m-1)}}\right)\right) \\
&= \pi+\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\frac{1}{4^{k+1}-1}\sum_{m=k+3}^{\infty}\underline{\underline{\left(\frac{4^{k+1}}{4^{m-1}}-1\right)a_m^{(k)}}}\,\frac{1}{4^{n(m-1)}} \\
&= \pi+\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\frac{1}{4^{k+1}-1}\sum_{m=k+3}^{\infty}\underline{\underline{a_m^{(k+1)}}}\,\frac{1}{4^{n(m-1)}}
\end{aligned}
$$

まず $a_m^{(k)}$ について考える。

$$
\begin{aligned}
\left|a_m^{(k)}\right| = \left|\left(\frac{4^k}{4^{m-1}}-1\right)a_m^{(k-1)}\right| &\le \left|a_m^{(k-1)}\right| \qquad \left(\because \left|\frac{4^k}{4^{m-1}}-1\right|\le 1\right) \\
&\vdots \\
&\le \left|a_m^{(0)}\right|
\end{aligned}
$$

である。次に $\sigma_n^{(k)}$ とπの差について考える。

$$\sigma_n^{(k)}-\pi \simeq \frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}\frac{1}{4^{n(k+1)}}a_{k+2}^{(k)}$$

と考え、$\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}$の部分を計算すると

$$\frac{1}{4-1}\frac{1}{4^2-1}\cdots\frac{1}{4^k-1}=\underline{\frac{1}{4}\frac{1}{4^2}\cdots\frac{1}{4^k}}\times\underline{\underline{\frac{4}{4-1}\frac{4^2}{4^2-1}\cdots\frac{4^k}{4^k-1}}}$$

$$=\underline{4^{\frac{k(k+1)}{2}}}\times\underline{\underline{1.45\cdots}}$$

となるので、k が大きくなるにつれ、π との差は小さくなることがわかる。
よって、建部の加速法が成り立つ。

次に$\tau_n=2^n\tan\frac{\pi}{2^n}$　について考える。

$f(x)=\tan x$　は奇関数である。

(奇関数)′ = (偶関数)、(偶関数)′ = (奇関数)　であるから

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\text{奇関数} & n:\text{偶数}\\ \text{偶関数} & n:\text{奇数}\end{cases}$$

である。

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad n:\text{偶数}$$

だから、tanx をテイラー展開すると

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

となる。あとは$\sigma_n^{(k)}$のときと同様にして証明できる。

2.1.4　加速計算の数値結果

最後に$\sigma_n^{(k)}=\frac{1}{4^k-1}\left(4^k\sigma_{n+1}^{(k-1)}-\sigma_n^{(k-1)}\right),\tau_n^{(k)}=\frac{1}{4^k-1}\left(4^k\tau_{n+1}^{(k-1)}-\tau_n^{(k-1)}\right)$で得られる値を見てみる。

$\sigma_n^{(k)} = \dfrac{1}{4^k - 1}\left(4^k \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \sigma_n^{(k-1)}\right)$を計算するプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
OPTION BASE 0
LETfmt$="###%.###^^^^^
#.#####################################################"
LET　nmax=9
DIM s(nmax+1,nmax)
LET　s(1,0)=2
LET　s(2,0)=2*SQR(2)
PRINT "σ"
FOR n=2 TO nmax
    LET s(n+1,0)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n,0)^2)))
    PRINT USING fmt$: n+1,s(n+1,0)-PI,s(n+1,0)
NEXT n
FOR k=1 TO nmax
    PRINT "σ",k
    LET　a=4^k
    FOR n=1 TO nmax－k+1
        LET　s(n,k)=(a*s(n+1,k－1)－s(n,k－1))/(a－1)
        PRINT USING fmt$: n,s(n,k)－PI,s(n,k)
    NEXT n
NEXT k
PRINT "                              ";PI
END
```

小数第 n 位まで一致することを精度 n 桁とする。

σ　　**精度４桁**

```
  3 -8.013E-002 3.06146 74589 20718 17382 76798 72243 19093 40907 56499 88502
  4 -2.015E-002 3.12144 51522 58052 28557 25578 95632 35585 48430 65884 03128
  5 -5.044E-003 3.13654 84905 45939 26381 42580 44436 53906 75563 73541 36002
  6 -1.261E-003 3.14033 11569 54752 91231 71185 24331 69013 21437 03233 64819
  7 -3.154E-004 3.14127 72509 32772 86806 20197 70788 21440 83796 63262 64979
  8 -7.885E-005 3.14151 38011 44301 07632 85150 59456 82230 79353 13815 49293
  9 -1.971E-005 3.14157 29403 67091 38413 58001 10270 76142 95336 37794 50436
 10 -4.928E-006 3.14158 77252 77159 70062 88542 62701 91873 93992 80858 57484
```

σ1　　**精度１１桁**

1 -3.702E-002 3.10456 94996 61586 79680 45032 64559 19487 61857 91667 67186

2 -2.445E-003 3.13914 75703 12227 53256 91140 13517 78919 30745 60749 59539

3 -1.549E-004 3.14143 77167 03830 32282 08505 70095 41082 84271 69012 08003

4 -9.717E-006 3.14158 29366 41901 58989 48247 60704 60013 84608 09427 13627

5 -6.078E-007 3.14159 20457 57690 79515 14053 50963 40715 36728 13131 07758

6 -3.800E-008 3.14159 26155 92112 85331 03201 86273 72250 04583 16605 65032

7 -2.375E-009 3.14159 26512 14810 47908 40134 89013 02494 11205 30666 44064

8 -1.484E-010 3.14159 26534 41354 82007 15617 93875 40780 33997 45787 50817

9 -9.277E-012 3.14159 26535 80515 80612 65389 80178 97117 60211 61879 93167

σ2　　**精度１６桁**

1 -1.399E-004 3.14145 27750 22270 24828 67547 30115 02881 42004 78688 39029

2 -2.260E-006 3.14159 03931 29937 17550 42996 73867 25227 07840 09562 91234

3 -3.562E-008 3.14159 26179 71106 34103 30897 06745 21275 91297 18788 14001

4 -5.577E-010 3.14159 26530 32076 74216 85107 23647 32762 13536 13378 00700

5 -8.719E-012 3.14159 26535 81074 32385 42478 41961 07685 69106 83503 95517

6 -1.363E-013 3.14159 26535 89656 98746 89263 75862 31177 04980 11603 82666

7 -2.129E-015 3.14159 26535 89791 10947 07316 80866 23332 75516 93462 24601

8 -3.327E-017 3.14159 26535 89793 20519 68707 92599 20873 41959 22952 75990

σ3　　**精度２１桁**

1 -7.605E-008 3.14159 25775 44344 58704 74353 07895 06534 15234 30687 90475

2 -3.037E-010 3.14159 26532 86045 53413 67212 94568 67244 94209 20521 87379

3 -1.193E-012 3.14159 26535 88600 08186 90729 62010 85325 40873 25990 54457

4 -4.667E-015 3.14159 26535 89788 57118 25928 75585 10462 25544 46521 82737

5 -1.824E-017 3.14159 26535 89793 22022 47149 24019 47422 94438 42208 58653

6 -7.125E-020 3.14159 26535 89793 23839 13952 57136 13684 43303 23333 01457

7 -2.783E-022 3.14159 26535 89793 23846 23650 64214 01786 76347 20246 26012

σ4　　**精度２５桁**

1 -6.721E-012 3.14159 26535 83071 81236 06008 47457 58855 57264 00874 16386

2 -6.668E-015 3.14159 26535 89786 57029 15527 72471 41082 58703 31502 18641

3 -6.538E-018 3.14159 26535 89793 23192 49988 36030 49384 36072 58759 20495

4 -6.391E-021 3.14159 26535 89793 23845 62526 57542 74626 71179 18270 10323

5 -6.242E-024 3.14159 26535 89793 23846 26371 40795 41787 41926 23258 99272

6 -6.097E-027 3.14159 26535 89793 23846 26433 77182 95073 43927 76704 74344

σ5　　**精度３０桁**

1 -1.044E-016 3.14159 26535 89793 13408 22966 15995 37350 64863 07973 96356

2 -2.578E-020 3.14159 26535 89793 23843 68594 87119 01689 64105 20662 68199

3 -6.313E-024 3.14159 26535 89793 23846 26370 69880 49040 43843 02101 49218

4 -1.542E-027 3.14159 26535 89793 23846 26433 81737 01383 86179 16225 74627

5 -3.767E-031 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 12623 08348 10090 32091

σ 6 **精度３４桁**

1 -3.005E-022 3.14159 26535 89793 23846 23428 96855 55502 66644 70409 37032

2 -1.851E-026 3.14159 26535 89793 23846 26433 64772 49564 82201 93134 81057

3 -1.132E-030 3.14159 26535 89793 23846 26433 83278 37074 29974 60453 85965

4 -6.914E-035 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50281 50575 73678 56623

σ 7 **精度３７桁**

1 -1.668E-028 3.14159 26535 89793 23846 26433 83112 72130 53416 94430 22200

2 -2.563E-033 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50032 09193 78128 72500

3 -3.918E-038 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41579 86308 31809

σ 8 **精度３９桁**

1 -1.839E-035 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50286 58040 28738 07418

2 -7.058E-041 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41970 98822 36676

σ 9 **精度４１桁**

1 -4.127E-043 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 68986 62857

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

$\tau_n^{(k)} = \dfrac{1}{4^k - 1}\left(4^k \tau_{n+1}^{(k-1)} - \tau_n^{(k-1)}\right)$を計算するプログラム

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
OPTION BASE 0
LETfmt$="###-%.###^^^^^
#.####################################################"
LET　nmax=11
DIM s(nmax+1,nmax),t(nmax+1,nmax)
LET　s(2,0)=2*SQR(2)
PRINT "τ"
FOR n=2 TO nmax
　LET s(n+1,0)=SQR(2^(n+1)*(2^n-SQR(2^(2*n)－s(n,0)^2)))
　LET　t(n,0)=s(n,0)/SQR(1－(s(n,0)/2^n)^2)
　PRINT USING fmt$: n,t(n,0)－PI,t(n,0)
NEXT n
```

```
FOR k=1 TO nmax－2
   PRINT "τ",k
   LET   a=4^k
   FOR n=2 TO nmax－k
      LET   t(n,k)=(a*t(n+1,k－1)－t(n,k－1))/(a－1)
      PRINT USING fmt$: n－1,t(n,k)－PI,t(n,k)
   NEXT n
NEXT k
PRINT "                              ";PI
END
```

```
τ        精度３桁
  2  8.584E-001 4.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000
  3  1.721E-001 3.31370 84989 84760 39041 35097 93677 58462 85573 75003 01558
  4  4.101E-002 3.18259 78780 74528 11058 55619 62314 81965 75656 08021 14546
  5  1.013E-002 3.15172 49074 29256 09847 03206 81322 47783 33776 78422 37449
  6  2.526E-003 3.14411 83852 45904 26274 19725 61364 07149 31005 28099 35326
  7  6.310E-004 3.14222 36299 42456 84538 62085 06996 31631 26350 33435 76831
  8  1.577E-004 3.14175 03691 68966 45910 72136 27973 32388 99885 31784 22358
  9  3.943E-005 3.14163 20807 03181 80571 87151 87871 14766 90971 61020 98541
 10  9.857E-006 3.14160 25102 56808 94676 36896 58492 66001 17922 73458 10260
τ1       精度１１桁
  1 -5.665E-002 3.08494 46653 13013 85388 46797 24903 44617 14098 33337 35411
  2 -2.698E-003 3.13889 43377 71117 35064 29126 85193 89800 05683 52360 52208
  3 -1.587E-004 3.14143 39172 14165 42776 52402 54325 03055 86483 68556 11750
  4 -9.776E-006 3.14158 28778 51453 65083 25231 88044 60271 30081 44658 34618
  5 -6.087E-007 3.14159 20448 41307 70626 76204 88873 73125 24798 68547 90665
  6 -3.801E-008 3.14159 26155 77802 99701 42153 34965 65974 91063 64567 04201
  7 -2.375E-009 3.14159 26512 14586 92125 58823 74503 75559 54667 04099 90602
  8 -1.484E-010 3.14159 26534 41351 32711 20144 82033 16412 60239 77603 80832
  9 -9.277E-012 3.14159 26535 80515 75154 95597 61811 37458 99840 56975 24854
τ2       精度１５桁
  1  8.983E-004 3.14249 09826 01657 58376 01282 15879 92812 25122 53628 73328
  2  1.057E-005 3.14160 32225 10368 63290 67287 58933 77272 91870 36302 49052
  3  1.550E-007 3.14159 28085 60606 19903 70087 16959 24085 66321 29731 82810
```

4　2.384E-009 3.14159 26559 73964 64329 66269 75595 67315 51113 16807 21069
5　3.711E-011 3.14159 26536 26902 68306 39883 24705 12164 88814 64301 65103
6　5.793E-013 3.14159 26535 90372 51620 53268 43806 29531 85573 93402 09696
7　9.049E-015 3.14159 26535 89802 28750 24232 89201 79136 13944 62504 06848
8　1.414E-016 3.14159 26535 89793 37984 53961 13796 58862 09147 28933 34455

τ3　　精度１９桁

1 -3.523E-006 3.14158 91310 80348 17336 93732 11998 11946 89755 24916 35969
2 -1.033E-008 3.14159 26432 59816 31913 43147 48039 01019 19884 01056 10330
3 -3.784E-011 3.14159 26535 51954 45987 21764 71764 50541 38173 35649 67708
4 -1.455E-013 3.14159 26535 89647 73131 42639 01675 11289 48143 23785 68977
5 -5.662E-016 3.14159 26535 89792 67228 69353 91728 53617 04570 11324 32626
6 -2.209E-018 3.14159 26535 89793 23625 31708 51827 11669 54077 49315 21088
7 -8.629E-021 3.14159 26535 89793 23845 40147 30059 99810 12245 74432 22195

τ4　　精度２３桁

1　3.443E-009 3.14159 26570 33069 13539 22164 79552 89603 79610 00570 37680
2　2.523E-012 3.14159 26535 92315 78591 42857 33426 17402 25303 90295 14207
3　2.310E-015 3.14159 26535 89795 54806 50171 85713 97802 21907 82562 69374
4　2.220E-018 3.14159 26535 89793 24068 29066 52473 84371 27144 33628 39934
5　2.160E-021 3.14159 26535 89793 23846 48031 47749 07191 31526 54170 07710
6　2.107E-024 3.14159 26535 89793 23846 26454 90366 79371 45807 18844 44552

τ5　　精度２６桁

1 -8.408E-013 3.14159 26535 88952 39065 57540 31817 05699 22122 76306 60323
2 -1.540E-016 3.14159 26535 89793 08448 94069 52529 50862 23859 54011 63563
3 -3.524E-020 3.14159 26535 89793 23842 74011 68081 62461 75927 55867 95526
4 -8.470E-024 3.14159 26535 89793 23846 26349 13629 10634 93212 15480 47952
5 -2.060E-027 3.14159 26535 89793 23846 26433 81219 79246 51197 49210 69613

τ6　　精度２８桁

1　5.132E-017 3.14159 26535 89793 28978 70464 28212 22228 57877 05825 48301
2　2.349E-021 3.14159 26535 89793 23846 49928 63860 75822 34523 91228 60394
3　1.344E-025 3.14159 26535 89793 23846 26435 17718 37313 36268 87875 98929
4　8.077E-030 3.14159 26535 89793 23846 26433 83287 58017 84569 40549 82438

τ7　　精度３０桁

1 -7.832E-022 3.14159 26535 89793 23846 18602 23101 16892 57619 59969 70161
2 -8.963E-027 3.14159 26535 89793 23846 26433 74316 91171 72141 53608 55643
3 -1.282E-031 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 37467 31798 13653 20434

τ8　　精度３１桁

1　2.988E-027 3.14159 26535 89793 23846 26433 86267 03326 66578 31829 25741

2　8.547E-033 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 51143 15983 07063 74901

τ9　　精度３２桁

1 -2.849E-033 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50003 50634 57536 86953

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

	$\sigma_n^{(k)}$ の値	$\tau_n^{(k)}$ の値
k=0,n=10	精度４桁	精度３桁
k=1,n=9	精度１１桁	精度１１桁
k=2,n=8	精度１６桁	精度１５桁
k=3,n=7	精度２１桁	精度１９桁
k=4,n=6	精度２５桁	精度２３桁
k=5,n=5	精度３０桁	精度２６桁
k=6,n=4	精度３４桁	精度２８桁
k=7,n=3	精度３７桁	精度３０桁
k=8,n=2	精度３９桁	精度３１桁
k=9,n=1	精度４１桁	精度３２桁

付録

６０進法

６０進法についても少しやったので６０進法についてのプログラムを載せておく。

①整数 n を６０進法に変えるプログラム

```
PRINT "整数ｎを６０進法に変えるプログラム"
PRINT "ｎを代入してください"
INPUT n
OPTION BASE 0
DIM a(100)
LET　b=101
IF n<0 THEN
    PRINT "-"
    LET　n=ABS(n)
END IF
DO
    LET　b=b-1
    LET　q=INT(n/60)
    LET　r=MOD(n,60)
    LET　a(b)=r
    IF q=0 THEN EXIT DO
    LET　n=q
LOOP
FOR t=b TO 100
    PRINT a(t)
NEXT t
END
```

②小数 a(a<1)を６０進法に変えるプログラム

```
PRINT "小数ａ（a＜1）を６０進法に変えるプログラム"
PRINT "小数 a を代入してください"
INPUT a
DO
```

```
    LET  b=a*60
    LET  c=INT(b)
    PRINT c
    LET  d=b-c
    IF d=0 THEN EXIT DO
    LET  a=d
LOOP
END
```

③有理数を６０進法に変えるプログラム

```
REM “有理数を６０進法に変えるプログラム”
INPUT n
IF n<0 THEN
    PRINT "-"
    LET  n=ABS(n)
END IF
OPTION BASE 0
DIM p(100)
LET  a=INT(n)
LET  b=n-INT(n)
LET  o=101
DO
    LET  o=o-1
    LET  q=INT(a/60)
    LET  r=MOD(a,60)
    LET  p(o)=r
    IF q=0 THEN EXIT DO
    LET  a=q
LOOP
FOR n=o TO 100
    PRINT p(n)
NEXT n
PRINT "."
DO
    LET  c=b*60
    LET  d=INT(c)
```

```
    PRINT d
    LET   e=c-d
    IF e=0 THEN EXIT DO
    LET   b=e
LOOP
END
```

これらのプログラムの６０の部分をｎに変えればｎ進法のプログラムに変わる。

参考文献

[1]E.ハイラー、G.ワナー、蟹江 幸博 訳、「解析教程 上」シュプリンガー・フェアクラーク東京(1997)

[2]小川 束、平野 葉一、「数学の歴史」、朝倉書店(2003)

[3]桂田 祐史、πノート、明治大学助教授(2006)

[4]清水 康生、πの数値解析、明治大学数学科 2003 年度卒業研究レポート(2004)

[5]和田 秀男、「高速乗算法と素数判定法　マイコンによる円周率の計算、上智大学数学教室 No.15」(1983)

[6]村田 全の部屋
 http://redshift.hp.infoseek.co.jp/scilib.html

[7]Ogawa's HP
 http://www.tcp-ip.or.jp/~hom/

謝辞

本卒業研究を行うにあたり、熱心に御指導・御鞭撻下さいました桂田祐史助教授に深く感謝の意を表すと共に、厚くお礼申し上げます。
最後に、桂田祐史助教の更なる御栄達、御健勝と当研究室の更なるご発展を心よりお祈り致します。

一年半本当にありがとうございました。

２００６年2月２５日　椎名　信治