2005 年度　卒業研究レポート

ベルヌーイ数とその応用

明治大学理工学部数学科
皆川　幸弘

2005 年 2 月 28 日

目次

0．イントロ

ベルヌーイ数とは$1^k+2^k+3^k+4^k+\cdots+n^k$（$k$は自然数）の公式を書くためにヤコブ・ベルヌーイが導入したものです．定義（7ページ）を見るとわかるように一般項を簡単に書くことができず，少し複雑な感じもしますが，ベルヌーイ数は実に様々なところに現れるとても不思議な数です．ごく一部ではありますが，この卒業研究レポートではそれらを紹介したいと思います.

主な内容としては，前半の最初にオイラー・マクローリンの公式を導き，その中に出てくる数がベルヌーイ数であること．そして，ベルヌーイ数の母関数を定義すれば$\tan x$のテイラー展開がベルヌーイ数を使って表せることや，ベルヌーイ数とゼータ関数の関係を紹介します．後半はオイラー・マクローリンの公式の証明とその応用として，$n!$の近似公式であるスターリングの公式，オイラー・マクローリンの公式を使ったオイラー定数の計算，となっています.

最後に，この卒業研究レポートで取り上げているオイラー・マクローリンの公式の応用，ゼータ関数の話はほんの一部に過ぎず，まだまだ応用・発展した内容があるということを付け加えておきたいと思います.

1．オイラー・マクローリンの公式の導き方

＜問題＞n は任意の自然数，関数 f が区間$[0,n]$で何回でも微分可能なとき，

(1.1)　$S = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

に対する公式を求めよ．

＜公式のオイラーの導き方＞

変数をずらした和 s を考える．

(1.2)　$s = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots f(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$

(1.1)と(1.2)の差 $S-s$ をテイラー級数を使って計算すれば，

$f(i-1) - f(i) = -\frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \cdots$ なので，

$$\because)\ f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

となるテイラー級数で，$x = i-1$，$x_0 = i$ とすれば，

$$f(i-1) = f(i) - \frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \cdots$$

$$\therefore\ f(i) - f(i-1) = \frac{f'(i)}{1!} - \frac{f''(i)}{2!} + \frac{f'''(i)}{3!} - \cdots \quad \square$$

$$\begin{aligned}
S - s &= \big(f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)\big) - \big(f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)\big) \\
&= \big(f(1) - f(0)\big) + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(3) - f(2)\big) + \cdots + \big(f(n) - f(n-1)\big) \\
&= \left(\frac{f'(1)}{1!} - \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} - \cdots\right) + \left(\frac{f'(2)}{1!} - \frac{f''(2)}{2!} + \frac{f'''(2)}{3!} - \cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{f'(3)}{1!} - \frac{f''(3)}{2!} + \frac{f'''(3)}{3!} - \cdots\right) + \cdots + \left(\frac{f'(n)}{1!} - \frac{f''(n)}{2!} + \frac{f'''(n)}{3!} - \cdots\right) \\
&= \left(\frac{f'(1)}{1!} + \frac{f'(2)}{1!} + \frac{f'(3)}{1!} + \cdots + \frac{f'(n)}{1!}\right) - \left(\frac{f''(1)}{2!} + \frac{f''(2)}{2!} + \frac{f''(3)}{2!} + \cdots + \frac{f''(n)}{2!}\right) \\
&\quad + \left(\frac{f'''(1)}{3!} + \frac{f'''(2)}{3!} + \frac{f'''(3)}{3!} + \cdots + \frac{f'''(n)}{3!}\right) - \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(i)}{1!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{f''(i)}{2!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{f'''(i)}{3!} - \cdots
\end{aligned}$$

$S-s=f(n)-f(0)$ でもあるので，

$$\therefore\ f(n)-f(0)=\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}f'(i)-\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f'''(i)-\cdots$$

この式を f の原始関数 F (つまり， $F=f$)で書き換えると，

$$\int_0^n f(x)dx=\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}f(i)-\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f'(i)+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)-\cdots$$

$$\therefore (1.3)\quad \sum_{i=1}^{n}f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f'(i)-\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)+\cdots$$

(1.3)で，(f は一般なので) f を f' で置き換えると，

$$(1.3.1)\quad \sum_{i=1}^{n}f'(i)=(f(n)-f(0))+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)-\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f'''(i)+\cdots$$

(1.3.1)で， f' を f'' で置き換えると，

$$(1.3.2)\quad \sum_{i=1}^{n}f''(i)=(f'(n)-f'(0))+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f'''(i)-\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f^{(4)}(i)+\cdots$$

以下同様に置き換えた式を作る．

(1.3.1)，(1.3.2)，…を使って(1.3)の $\sum_{i=1}^{n}f'(i)$ ， $\sum_{i=1}^{n}f''(i)$ ，…を消去すれば，適当な定数 a_1 ， a_2 ， a_3 ，…を用いて，

$$(1.4)\quad \sum_{i=1}^{n}f(i)=\int_0^n f(x)dx-a_1\big(f(n)-f(0)\big)+a_2\big(f'(n)-f'(0)\big)-a_3\big(f''(n)-f''(0)\big)+\cdots$$

と書けることがわかる．以下，この $\{a_j\}$ $(j=1,2,3\cdots)$ の求め方を考える。

そこで，(1.3)，(1.3.1) $\times(-\frac{1}{2!})$ ，(1.3.2) $\times\frac{1}{3!}$ ，…，(1.3.n) $\times\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ ，…

として辺々加えると，

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)-\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f'(i)+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)-\cdots$$

$$=\int_0^n f(x)dx-\left(a_1+\frac{1}{2!}\right)\big(f(n)-f(0)\big)+\left(a_2+\frac{a_1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)\big(f'(n)-f'(0)\big)$$

$$-\left(a_3+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)\big(f''(n)-f''(0)\big)+\cdots$$

$$+(-1)^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_{n-2}}{3!}+\cdots+\frac{a_1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)\big(f^{(n-1)}(n)-f^{(n-1)}(0)\big)+\cdots$$

この式と(1.3)を変形した式

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)-\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}f'(i)+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}f''(i)-\cdots=\int_0^n f(x)dx$$

を比べれば,

$$-\left(a_1+\frac{1}{2!}\right)\left(f(n)-f(0)\right)+\left(a_2+\frac{a_1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)\left(f'(n)-f'(0)\right)$$

$$-\left(a_3+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)\left(f''(n)-f''(0)\right)+\cdots$$

$$+(-1)^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_{n-2}}{3!}+\cdots+\frac{a_1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)\left(f^{(n-1)}(n)-f^{(n-1)}(0)\right)+\cdots=0$$

$\therefore$ (1.5) $\quad a_1+\dfrac{1}{2!}=0$, $\quad a_2+\dfrac{a_1}{2!}+\dfrac{1}{3!}=0$, $\quad a_3+\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{a_1}{3!}+\dfrac{1}{4!}=0$, $\cdots$

$$a_n+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_{n-2}}{3!}+\ldots+\frac{a_1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=0,\ \cdots$$

これらを解くと,

$$a_1=-\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{12},\quad a_3=0,\quad a_4=-\frac{1}{721},\ \cdots$$

となる．(1.4)に代入すれば,

(1.6)

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(n)-f(0)\right)+\frac{1}{12}\left(f'(n)-f'(0)\right)-\frac{1}{720}\left(f''(n)-f''(0)\right)+\cdots$$

$$=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(n)-f(0)\right)+\sum_{j=2}^{\infty} a_j\left(f^{(j-1)}(n)-f^{(j-1)}(n)\right)$$

これが求めたかった公式である。

(注意)　実は，(1.6)は常に成り立つわけではない．例えば，$f(x)=\cos(2\pi x)$ として(1.6)に代入すると，左辺は$1+1+\cdots+1=n$，右辺は0となり，公式が間違っていることになる．しかしこのことは，(1.6)の右辺を有限個で打ち切り，剰余項を考えることによって解決される．(6．の定理で示される．)

2．ベルヌーイ数と母関数

＜ベルヌーイ数＞

(1.5)を $\dfrac{B_i}{i!} := a_i \ (i=1,2,3,\cdots)$ で置き換えると,

(1.5’) $a_1 + \dfrac{1}{2!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{B_1}{1!} + \dfrac{B_0}{2!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2!}\sum_{i=0}^{1}\dbinom{2}{i}B_i = 0$,

$a_2 + \dfrac{a_1}{2!} + \dfrac{1}{3!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{B_2}{2!} + \dfrac{B_1}{2!} + \dfrac{B_0}{3!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3!}\sum_{i=0}^{2}\dbinom{3}{i}B_i = 0$,

$a_3 + \dfrac{a_2}{2!} + \dfrac{a_1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{B_3}{3!} + \dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{B_2}{2!} + \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{B_1}{1!} + \dfrac{B_0}{4!} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4!}\sum_{i=0}^{3}\dbinom{4}{i}B_i = 0$, $\cdots$

$a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2!} + \dfrac{a_{n-2}}{3!} + \cdots + \dfrac{a_1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{B_n}{n!} + \dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{B_{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{B_1}{1!} + \dfrac{B_0}{(n+1)!} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\dbinom{n}{i}B_i = 0$, $\cdots$

となる．以上のことより $B_i \ (i=0,1,2,3,\cdots)$ は一般に,

(2.1) $B_0 = 1$, $\sum_{i=0}^{k-1}\dbinom{k}{i}B_i = 0 \ (k=2,3,4,\cdots)$

を満たすが，逆にこの条件(2.1)だけで $B_i \ (i=0,1,2,3,\cdots)$ を決定することが出来る．
この(2.1)で定義される $B_i \ (i=0,1,2,3,\cdots)$ をベルヌーイ数という．

$B_0 = 1$, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_4 = -\dfrac{1}{30}$, $B_6 = \dfrac{1}{42}$, $\cdots$

$B_{2k+1} = 0 \ (k=1,2,3,\cdots)$ である．
(この証明は後に出てくる．)
ベルヌーイ数を使えば(1.6)は,

(1.6’) $\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \dfrac{1}{2}\big(f(n) - f(0)\big) + \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{B_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\big)$

と書くことができる．

＜例＞（$1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \cdots + n^k$ の公式）

k を任意の自然数, $f(x) = x^k$ として(1.6’)を適用する．($f^{(j)}(x) = \dfrac{k!}{(k-j)!}x^{k-j}$)

ただし，一般に$2j-1>k$では$f^{(2j-1)}(x)=0$となるので，右辺では$2j-1\leq k$を満たすjについて和をとればよい．

そこで，kが偶数・奇数の場合けをする．

①kが偶数のとき．jは自然数なので，$2j-1=k$は成り立たない．よって右辺では，

$2j-1<k \Leftrightarrow 2j-1\leq k-1 \Leftrightarrow j\leq \dfrac{k}{2}$を満たす$j$について和をとればよい．そうすると，

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \int_0^n x^k dx + \frac{1}{2}\left(n^k - 0^k\right) + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right)$$

ただし，$f^{(2j-1)}(x)=\dfrac{k!}{(k-2j+1)!}x^{k-2j+1}$より，$f^{(2j-1)}(x)=0$となるので，

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \int_0^n x^k dx + \frac{1}{2}\left(n^k - 0^k\right) + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n)$$

②kが奇数のとき．jは自然数なので，$2j-1=k$は成り立つ．よって右辺では，

$2j-1\leq k \Leftrightarrow j\leq \dfrac{k+1}{2}$を満たす$j$について和をとればよい．そうすると，

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \int_0^n x^k dx + \frac{1}{2}\left(n^k - 0^k\right) + \sum_{j=1}^{\frac{k+1}{2}} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right)$$

ただし，$2j-1=k \Leftrightarrow j=\dfrac{k+1}{2}$のとき，$f^{(2j-1)}(x)=f^{(k)}(x)$は定数となるので，

$f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)=0$．また，$f^{(2j-1)}(x)=0$となるので，

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \int_0^n x^k dx + \frac{1}{2}\left(n^k - 0^k\right) + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n)$$

①，②をまとめれば

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \int_0^n x^k dx + \frac{1}{2}\left(n^k - 0^k\right) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n)$$

となる．([] はガウス記号．$[x]$はxを超えない最小の整数を意味する．)

ここで，

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) = \frac{B_2}{2!}\cdot\frac{k!}{(k-1)!}n^{k-1} + \frac{B_4}{4!}\cdot\frac{k!}{(k-3)!}n^{k-3} + \frac{B_6}{6!}\cdot\frac{k!}{(k-5)!}n^{k-5} + \cdots$$

$$+\frac{B_{2\left[\frac{k}{2}\right]}}{\left(2\left[\frac{k}{2}\right]\right)!}\cdot\frac{k!}{\left\{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\right\}!}n^{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$$

$$=\frac{k!}{2!(k-2)!}\cdot\frac{B_2}{k-1}n^{k-1}+\frac{k!}{4!(k-4)!}\cdot\frac{B_4}{k-3}n^{k-3}+\frac{k!}{6!(k-6)}\cdot\frac{B_6}{k-5}n^{k-5}+\cdots$$

$$+\frac{k!}{\left(2\left[\frac{k}{2}\right]\right)!\left\{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)-1\right\}!}\cdot\frac{B_{2\left[\frac{k}{2}\right]}}{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}n^{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$$

$$=\binom{k}{2}B_2\frac{n^{k-1}}{k-1}+\binom{k}{4}B_4\frac{n^{k-3}}{k-3}+\binom{k}{6}B_6\frac{n^{k-5}}{k-5}+\cdots+\binom{k}{2\left[\frac{k}{2}\right]}B_{2\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{n^{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}}{k-\left(2\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)}$$

$$=\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{k}{2j}B_{2j}\frac{n^{k-2j+1}}{k-2j+1}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}i^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{k}{2j}B_{2j}\frac{n^{k-2j+1}}{k-2j+1}$$

＜ベルヌーイ数の母関数＞

ベルヌーイ数の母関数をテイラー級数を使って，

(2.2) $$V(x)=1+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_4}{4!}x^4+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$$

と定義する。すると，(2.1)は，

$$V(x)\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)=1$$

を意味する。

$$\because)\ V(x)\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)$$

$$=\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)$$

$$=B_0+\frac{B_0}{1!}x+\frac{B_0}{2!}x^2+\frac{B_0}{3!}x^3+\frac{B_0}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_1}{2!}x^2+\frac{B_1}{3!}x^3+\frac{B_1}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_2}{2!2!}x^3+\frac{B_2}{2!3!}x^4+\frac{B_2}{24!}x^5+\cdots$$

$$+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_3}{3!2!}x^4+\frac{B_3}{3!3!}x^5+\frac{B_3}{3!4!}x^6+\cdots$$

$$=B_0+\left(\frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{i}B_i\right)x+\left(\frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{2}\binom{3}{i}B_i\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}\sum_{i=0}^{3}\binom{4}{i}B_i\right)x^3+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}B_i\right)x^{n-1}+\cdots$$

$$=B_0+\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j}{i}B_i\right)x^{j-1}=1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j}{i}B_i\right)=0$$

これは(1.5)を意味している。　□

また，$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$から

$$V(x)\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots\right)=1\Leftrightarrow V(x)\cdot\frac{e^x-1}{x}=1$$

(2.3)　$V(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

$f(x):=V(x)+\dfrac{x}{2}$とおけば,

(2.4)　$f(x)=V(x)+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{2x-x(e^x-1)}{2(e^x-1)}=\dfrac{2x-xe^x+x}{2(e^x-1)}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{(e^x+1)}{(e^x-1)}$

$f(-x)=\dfrac{-x}{2}\cdot\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\dfrac{-x}{2}\cdot\dfrac{e^{x}(e^{-x}+1)}{e^{x}(e^{-x}-1)}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=f(x)$ から $f(x)$ は偶関数とわかるので，

(2.5) $$\begin{aligned} f(x)&=V(x)+\frac{x}{2}\\ &=\left(1+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\dots\right)+\frac{x}{2}\\ &=\left(B_0-\frac{x}{2}+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\dots\right)+\frac{x}{2}\\ &=B_0+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\cdots\\ &=B_0+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \end{aligned}$$

f は偶関数なので，奇数次の項の係数は 0 である．

∵) 一般に， $f(x)$ が偶関数のとき，

$f^{(n)}(x)$ ：奇関数（n ：奇数）

$f^{(n)}(x)$ ：偶関数（n ：偶数）

$f^{(n)}(0)=0$（n ：奇数）

が成り立つので，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$$

となる．べき級数展開の一意性より，奇数次の係数は 0 となる．　□

よって， $B_{2k+1}=0\ (k=1,2,3,\dots)$

また， $\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=f(x)=B_0+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}\ \ (|x|<2\pi)$

3．$\tan x$ のテイラー展開

$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ なので,

(3.1)　$x\coth x = x \cdot \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2x)^{2k}$

とテイラー展開できる.

$\because$) $f(x) = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$ とテイラー展開できたから.　□

また，$\coth(ix) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \dfrac{2i}{e^{ix}-e^{-ix}} \cdot \dfrac{1}{i} = \dfrac{\cos x}{i\sin x} = -i\cot x$ なので,

$(ix)\coth(ix) = (ix)\cdot(-i\cot x) = x\cot x$

一方で，$(ix)\coth(ix) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2ix)^{2k}$ でもあるので,

(3.2)　$x\cot x = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2ix)^{2k}$

ここで，$2\cot(2x) = 2\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \cot x - \tan x$ より,

(3.3)　$\tan x = \cot x - 2\cot(2x) = \dfrac{1}{x}\left(x\cot x - (2x)\cot(2x)\right)$

$$= \frac{1}{x}\left\{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2ix)^{2k}\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)}(4ix)^{2k}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2^{2k} - 4^{2k})(ix)^{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} - 4^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}$$

!

よって，$\tan x$ テイラー展開が求められた.

4．ベルヌーイ数とゼータ関数

＜リーマンのゼータ関数＞

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\ (\operatorname{Re}s>1)$$

をリーマンのゼータ関数という．

＜オイラーの公式＞

定理（$\cot z$ の部分分数分解）

$|z|<\pi$ のとき，

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}$$

が成り立つ．

（証明は参考文献[2]の 89，90 ページを参照せよ．）

この定理から、

$$(4.1)\quad z\cot z=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m}$$

が成り立つ．

$$\because)\ \frac{z^2}{n^2\pi^2-z^2}=\frac{\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2}{1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2(m-1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2m}}\right)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m}$$

となるので，定理（$\cot z$ の部分分数分解）から，

$$z\cot z=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2-n^2\pi^2}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\cdot\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m}\right)=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m}$$

$$=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m}\quad\square$$

(4.1)と(3.1)の z 係数を比べると，テイラー展開の一意性より，

$$(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} B_{2m} = (-2)\cdot\zeta(2m)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m} \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore\ \zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}\cdot(2\pi)^{2m}}{2\cdot(2m)!} B_{2m} \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

この式をオイラーの公式という．

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},\quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555},\quad \cdots$$

である．

5．ベルヌーイ多項式とその評価

＜ベルヌーイ多項式＞

ベルヌーイ多項式を

(5.1)　$B_k(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i x^{k-i}\ (k=1,2,3,\ldots)$

として定義する.

$$B_1(x)=B_0x+B_1=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=B_0x^2+2B_1x+B_2=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=B_0x^3+3B_1x^2+3B_2x+B_4=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\ \cdots$$

である。また、(5.1)は次を満たす.

(5.2)　$B_k'(x)=kB_{k-1}(x)\ (k\geq 1)$

(5.3)　$B_k(0)=B_k(1)=B_k\ (k\geq 2)$

$$\begin{aligned}\because)\ B_k'(x)&=\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i x^{k-i}\right)'\\
&=\binom{k}{0}B_0\left(x^k\right)'+\binom{k}{1}B_1\left(x^{k-1}\right)'+\cdots+\binom{k}{k-1}B_{k-1}\left(x^1\right)'+\binom{k}{k}B_k\left(x^0\right)'\\
&=k\binom{k}{0}B_0x^{k-1}+(k-1)\binom{k}{1}B_1x^{k-2}+\cdots+\binom{k}{k-1}B_{k-1}x^0\\
&=k\binom{k-1}{0}B_0x^{k-1}+k\binom{k-1}{1}B_1x^{k-2}+\cdots+k\binom{k-1}{k-1}B_{k-1}x^0\\
&=k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}B_i x^{(k-1)-i}\\
&=kB_{k-1}(x)\end{aligned}$$

$$B_k(0)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_k\cdot 0^{k-i}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_k\cdot 0^{k-1}+\binom{k}{k}B_k\cdot 0^0=0+B_k=B_k$$

$$B_k(1)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_k\cdot 1^{k-i}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_k+\binom{k}{k}B_k=0+B_k=B_k\quad\square$$

＜ベルヌーイ多項式の評価＞

定理（ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ のフーリエ展開）

$0 \le x \le 1$ において，ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ は次のようにフーリエ展開される．

$$B_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k}} \ (k = 1,2,3,\cdots)$$

$$B_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k+1}} \ (k = 1,2,3,\cdots)$$

このフーリエ展開は一様収束する．

（証明は参考文献[2]の 99，100 ページを参照せよ．）

この定理から，

$$(5.4) \quad |B_k(x)| \le \frac{4 \cdot k!}{(2\pi)^k} \ (k = 1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ．

$$\because) \ |B_{2k}(x)| = \left| (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k}} \right| \le 2 \cdot (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} \le \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

$$\le \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \right) = \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \cdot 2 = \frac{4 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}}$$

$$|B_{2k+1}(x)| = \left| (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot (2k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k}} \right| \le 2 \cdot (2k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k+1}} \le \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$$

$$< \frac{2 \cdot (2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{2 \cdot (2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \right) = \frac{2 \cdot (2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \cdot 2 = \frac{4 \cdot (2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}$$

$$\therefore \ |B_k(x)| \le \frac{4 \cdot k!}{(2\pi)^k} \ (k = 1,2,3,\cdots) \quad \square$$

6．オイラー・マクローリンの公式

1．の最後で，オイラーが導いた公式(1.6)が常に成り立つわけではないことを注意した．しかし，その問題は，次の定理のように(1.6)の右辺を有限個で打ち切り，剰余項を考えることによって解決される。

定理(オイラー・マクローリンの公式)

n と k は任意の自然数、 f は $[0,n]$ で k 回微分可能な関数とすれば,

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)=\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}\big(f(n)-f(0)\big)+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\big(f^{(j-1)}(n)-f^{(j-1)}(0)\big)+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx$$

ここで， $\tilde{B}_k(x)$ は $0\le x\le 1$ では $B_k(x)$．それ以外は周期 1 で拡張したものである．

(証明)　$n=1$ のとき

$$\frac{1}{2}\big(f(1)+f(0)\big)=\int_0^n f(x)dx+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\big(f^{(j-1)}(1)-f^{(j-1)}(0)\big)+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^1 B_k(x)f^{(k)}(x)dx$$

を示す．ここで， $B_1(1)=\frac{1}{2}$， $B_1(0)=-\frac{1}{2}$， $B_1'(x)=1$　を用いる．

$$左辺=\frac{1}{2}\big(f(1)+f(0)\big)=B_1(1)f(1)-B_1(0)f(0)=\big[B_1(1)f(1)-B(0)_1 f(0)\big]_0^1$$

$$=\int_0^1\big(B_1(x)f(x)\big)'dx=\int_0^1 B_1'(x)f(x)dx+\int_0^1 B_1(x)f'(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 B_1(x)f'(x)dx$$

これで $k=1$ のときが示された。最後の項を部分積分すれば,

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\left(\frac{B_2(x)}{2}\right)' f'(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\left[\frac{B_2(x)}{2}f'(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{B_2(x)}{2}f''(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2!}\big(B_2(1)f'(1)-B_2(0)f'(0)\big)-\frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\frac{B_2}{2!}\big(f'(1)-f'(0)\big)-\frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx$$

これで $k=2$ のときも示された．
同様に最後の項を部分積分していけば一般の k でも成り立つことが示される．
よって， $n=1$ のとき定理は成り立つ．

$n=2$ のとき
$F_1(x) := f(x+1)$ とおけば， $n=1$ のときより

$$F_1(1)=\int_0^1 F_1(x+1)dx+\frac{1}{2}\left(F_1(1)-F_1(0)\right)+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\left(F_1^{(j-1)}(1)-F_1^{(j-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^1 B_k(x)F_1^{(k)}(x+1)dx$$

が成り立つ．
ここで $X := x+1$ として変数変換すれば，
積分区間は　x の 0 から 1　から　X の 1 から 2　へと変わり、$dx = dX$ より、

$$\int_0^1 F_1(x+1)dx=\int_1^2 f(X)dX=\int_1^2 f(x)dx$$

$$\int_0^1 B_k(x)F_1^{(k)}(x+1)dx=\int_1^2 B_k(X-1)f^{(k)}(X)dX=\int_1^2 \tilde{B}(x)f^{(k)}(x)dx$$

となるので，

$$f(2)=\int_1^2 f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(2)-f(1)\right)+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(2)-f^{(j-1)}(1)\right)+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_1^2 \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx$$

が成り立つ．

$$f(1)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right)+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(1)-f^{(j-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^1 \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx$$

と辺々足せば，

$$f(1)+f(2)=\int_0^2 f(x)dx+\frac{1}{2}\left(f(2)-f(0)\right)+\sum_{j=2}^{k}\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(2)-f^{(j-1)}(0)\right)$$
$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^2 \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx$$

これで $n=2$ のときも示された．
同様に $F_l(x) := f(x+l)$ $(l=2,3,4,\cdots)$ とおいて次々と足していけば一般の n でも成り立つことが示される．　(証明終)

7．スターリングの公式

定理(スターリングの公式)

任意の自然数nに対して,

(7.1)　$n! = \dfrac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}\cdot\exp\left(\dfrac{1}{12n}-\dfrac{1}{360n^3}+\tilde{R}_5\right)$，$\left|\tilde{R}_5\right| < \dfrac{4!}{(2\pi)^5\cdot n^4}$

が成り立つので，$n\to\infty$とすれば,

(7.2)　$n! \sim \dfrac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}$　　（～は両辺の比が１に近づくことを表す）

が得られる。

(証明) m，nは任意の自然数で$m>n>1$．$f(x)=\log x$として，オイラー・マクローリンの公式を適用すると,

（$\int \log x dx = x\log x - x$，$\dfrac{d^j}{dx^j}(\log x) = (-1)^{j-1}\dfrac{(j-1)!}{x^j}$，$B_2=\dfrac{1}{6}$，$B_4=-\dfrac{1}{30}$）

(7.3)　$\displaystyle\sum_{i=n+1}^{m}\log(i) = \sum_{i=2}^{m}\log(i) - \sum_{i=2}^{n}\log(i) = \log(m!) - \log(n!)$

$$= \int_n^m \log x dx + \frac{1}{2}(\log m - \log n) + \sum_{j=2}^{5}\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(m) - f^{(j-1)}(n)\right) + \frac{(-1)^4}{5!}\int_n^m \tilde{B}_5(x)(\log x)^{(5)}dx$$

$$= (m\log m - m) - (n\log n - n) + \frac{1}{2}(\log m - \log n) + \frac{B_2}{2!}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) - \frac{B_4}{4!}\left(\frac{2!}{m^3}-\frac{2!}{n^3}\right) + \tilde{R}_5$$

$$= (m\log m - m) - (n\log n - n) + \frac{1}{2}(\log m - \log n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{m^3}-\frac{1}{n^3}\right) + \tilde{R}_5$$

（ここで，$\tilde{R}_5 = \dfrac{(-1)^4}{5!}\displaystyle\int_n^m \tilde{B}_5(x)(\log x)^{(5)}dx$とおいた.）

また，$\left|\tilde{B}_5(x)\right| \le \dfrac{4\cdot 5}{(2\pi)^5}$より

$$\left|\tilde{R}_5\right| = \left|\frac{(-1)^4}{5!}\int_n^m \tilde{B}_5(x)(\log x)^{(5)}dx\right| \le \frac{1}{5!}\int_n^m \left|\tilde{B}_5(x)\right|\left|(\log x)^{(5)}\right|dx \le \frac{1}{5!}\cdot\frac{4\cdot 5!}{(2\pi)^5}\int_n^m \left|(-1)^4\frac{4!}{x^5}\right|dx$$

$$= \frac{4}{(2\pi)^5}\int_n^m \frac{4!}{x^5}dx = \frac{4}{(2\pi)^5}\left[\frac{1}{-4}\cdot\frac{4!}{x^4}\right]_n^m = \frac{4!}{(2\pi)^5}\left(-\frac{1}{m^4}+\frac{1}{n^4}\right) < \frac{4!}{(2\pi)^5\cdot n^4}$$

(7.3)の$\log(m!)$，$m\log m$，m，$\dfrac{1}{2}\log m$などの項は$m\to\infty$のときにそれぞれ∞に発散し

てしまうので，

(7.4)　$\gamma_m = \log(m!) + m - \left(m + \frac{1}{2}\right)\log m$

としてまとめて扱えば(10.19)は，

(7.5)　$\gamma_m = \gamma_n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \tilde{R}_5$

となる．

ここで，n と m が十分大きくなれば，γ_m と γ_n の差はどれほどでも小さくなるので，
γ_m は $m \to \infty$ のとき，ある値 γ に収束する．

$\because$) ${}^\forall\varepsilon > 0$，${}^\exists N = \frac{3}{\varepsilon} > 0$，($n$は任意の自然数;$n \geq N = \frac{3}{\varepsilon}$) ($m$は任意の自然数;$m > n$)

とすれば，

$$|\gamma_m - \gamma_n| = \left|\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \tilde{R}_5\right| < \frac{1}{12}\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right| + \frac{1}{360}\left|\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right| + \left|\tilde{R}_5\right|$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{360}\cdot\frac{2}{n^3} + \left|\tilde{R}_5\right| \leq \frac{1}{6n} + \frac{1}{180n^3} + \frac{4!}{(2\pi)^5\cdot n^4}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n} \leq \frac{3}{N} \leq \varepsilon$$

$\therefore$ コーシーの定理より，γ_m は $m \to \infty$ のとき，ある値 γ に収束する．　□

(7.5)で $m \to \infty$ とすれば，

$$\gamma = \log(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} + \hat{R}_5$$

$\therefore$ (7.6)　$\log(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n = \gamma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} - \hat{R}_5$

ここで，$\hat{R}_5 = \lim_{m\to\infty}\tilde{R}_5$，$\left|\hat{R}_5\right| \leq \frac{4!}{(2\pi)^5\cdot n^4}$ である．

(7.6)の両辺に指数関数をとれば，

$$\exp\left(\log(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\log n\right)\right) = \exp\left(\gamma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} - \hat{R}_5\right)$$

左辺$= e^{\log(n!)}\cdot e^n \cdot e^{-\left(n+\frac{1}{2}\log n\right)} = n!\cdot e^n \cdot n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

右辺$= D_n$ とおけば，

$$n!\cdot e^n \cdot n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} = D_n$$

$\therefore$ (7.7)　$n! = D_n \dfrac{n^n \cdot \sqrt{n}}{e^n}$

ここで，$D_n \to 2\pi \ (n \to \infty)$ が言えれば定理が証明されたことになる．

(7.7)から $D_n = \dfrac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n}$ となり，

$$\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} = \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} \cdot \frac{n! \cdot e^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} \cdot \frac{\sqrt{2n} \cdot (2n)^{2n}}{(2n)! \cdot e^{2n}} = \frac{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdots 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^{2n}}{2n \cdot (2n-1) \cdot 2(n-1) \cdot (2n-3) \cdot 2(n-2) \cdots (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(n-2) \cdot 2(n-1) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)(2n-3)(2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$D_n \to D \ (n \to \infty)$ であれば $D_{2n} \to D \ (n \to \infty)$ でもあるので，

$$\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} \to \frac{D \cdot D}{D} = D \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．ウォリスの積 $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \dfrac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dfrac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dfrac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \dfrac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdots$ より

(ウォリスの積について詳しくは参考文献[1]の 90 ページを参照せよ)

$$\left(\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} \right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots (2n)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdots (2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{n}$$

$$\to \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi \ (n \to \infty)$$

$D^2 = 2\pi$ となるので $D = \sqrt{2\pi}$

$\therefore D_n \to D = 2\pi \ (n \to \infty)$　(証明終)

8．調和級数とオイラー定数

＜調和級数＞

(8.1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

を調和級数という．

調和級数は発散する．

∵) $a_n=\dfrac{1}{n}$， $S_m=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}a_i$ とする．

$$\left|S_{m+m}-S_m\right|=\left|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+m}\right|=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+m}$$

$$>\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

コーシーの定理が成り立たないので調和級数は発散する． □

＜オイラー定数＞

(8.2) $\displaystyle\gamma_m:=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}-\log m$， $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\gamma_m=\gamma$

で定まるγをオイラー定数という．

(8.2)は後に出てくる(8.6)を用いればコーシー列になることがわかるので，収束する．

＜オイラー・マクローリンの公式を使ったオイラー定数の計算＞

m， nは任意の自然数で$m>n>1$， $f(x)=\dfrac{1}{x}$として，オイラー・マクローリンの公式を適用すると，

（$\dfrac{d^j}{dx^j}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^j\dfrac{j!}{x^{j+1}}$， $B_2=-\dfrac{1}{2}$， $B_4=-\dfrac{1}{30}$， $B_6=\dfrac{1}{42}$， $B_8=-\dfrac{1}{30}$）

(8.3) $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

$$=\int_n^m\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{j=2}^{9}\frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(m)-f^{(j-1)}(n)\right)+\frac{(-1)^8}{9!}\int_n^m\widetilde{B}_9(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(9)}dx$$

$$=\log m-\log n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\frac{B_2}{2!}\left(-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{B_4}{4!}\left(-\frac{3!}{m^4}+\frac{3!}{n^4}\right)$$
$$+\frac{B_6}{6!}\left(-\frac{5!}{m^6}+\frac{5!}{n^6}\right)-\frac{B_8}{8!}\left(-\frac{7!}{m^8}+\frac{7!}{n^8}\right)+\tilde{R}_9$$
$$=\log m-\log n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{120}\left(-\frac{1}{m^4}-\frac{1}{n^4}\right)$$
$$+\frac{1}{252}\left(-\frac{1}{m^6}+\frac{1}{n^6}\right)-\frac{1}{120}\left(-\frac{1}{m^8}+\frac{1}{n^8}\right)+\tilde{R}_9$$

（ここで、$\tilde{R}_9=\frac{(-1)^9}{9!}\int_n^m \tilde{B}_9(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(9)}dx$ とおいた。）

また、$\left|\tilde{B}_9(x)\right|\le\frac{4\cdot 9!}{(2\pi)^9}$ より

$$\left|\tilde{R}_9\right|=\left|\frac{(-1)^8}{9!}\int_n^m \tilde{B}_9(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(9)}dx\right|\le\frac{1}{9!}\int_n^m\left|\tilde{B}_9(x)\right|\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{(9)}\right|dx\le\frac{1}{9!}\cdot\frac{4\cdot 9!}{(2\pi)^9}\int_n^m\left|(-1)^9\frac{9!}{x^{10}}\right|dx$$

$$=\frac{4}{(2\pi)^9}\int_n^m\frac{9!}{x^{10}}dx=\frac{4}{(2\pi)^9}\left[\frac{1}{-9}\cdot\frac{9!}{x^9}\right]_n^m=\frac{4!\cdot 8!}{(2\pi)^9}\left(-\frac{1}{m^9}+\frac{1}{n^9}\right)<\frac{4!\cdot 8!}{(2\pi)^9\cdot n^9}$$

(8.4)の $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}$, $\log m$ は $m\to\infty$ のときに ∞ に発散してしまうので、

(8.5) $\quad \gamma_m=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}-\log m$

とおけば、(8.3)は、

(8.6) $$\gamma_m=\gamma_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{m^4}-\frac{1}{n^4}\right)$$
$$-\frac{1}{252}\left(\frac{1}{m^6}-\frac{1}{n^6}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{m^8}-\frac{1}{n^8}\right)+\tilde{R}_9$$

(8.6)で $m\to\infty$ とすれば、

(8.7) $$\gamma=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{120n^4}+\frac{1}{252n^6}-\frac{1}{120n^8}+\hat{R}_9$$

ここで、$\hat{R}_9=\lim_{m\to\infty}\tilde{R}_9$, $\left|\hat{R}_9\right|\le\frac{4!\cdot 8!}{(2\pi)^9\cdot n^9}$ である。

(8.7)を使い γ 定数を求めると，(8.2)の定義式で計算するよりも速く収束する.

9．プログラム

(仮称)十進 BASIC を使ったプログラムをいくつか紹介します．
(仮称)十進 BASIC について詳しくは，(仮称)十進 BASIC のホームページ
http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/
を参照してください．

＜ベルヌーイ数を求めるプログラム＞

プログラム(9.1)

```
REM  ベルヌーイ数を n 個求める
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
INPUT n
OPTION BASE 0
DIM B(n)
LET B(0)=1
PRINT "B( 0 )=";B(0)
FOR k=2 TO n+1
    LET B(k－1)=0
    FOR i=0 TO k－2
        LET B(k－1)=B(k－1)－(1/comb(k,k－1))*comb(k,i)*B(i)
    NEXT i
    PRINT "B(";k－1;")=";B(k－1)
NEXT k
END
```

プログラム(9.1)はベルヌーイ数の定義

(2.1)　$B_0=1$，$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i=0\ (k=2,3,4,\cdots)$

から，

$B_0=1$，$B_{k-1}=-\dfrac{1}{\binom{k}{k-1}}\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}B_i\ (k=2,3,4,\cdots)$ として，任意の $n:=k-1$ までのベルヌーイ数を求めるプログラムである．
実際に $n=5$ として実行すると，次のような結果が得られる．

```
B( 0 )= 1
B( 1 )=－1/2
B( 2 )= 1/6
B( 3 )= 0
B( 4 )=－1/30
B( 5 )= 0
```

＜オイラー定数を求めるプログラム＞

プログラム(9.2)

```
REM オイラー定数を定義式で求める
INPUT m
LET s=0
LET g=0
FOR i=1 TO m
    LET s=s+(1/i)
    LET γ =s－LOG(i)
    PRINT " γ (";i;")="; γ
NEXT i
END
```

プログラム(9.2)は

(8.2) $\gamma_m := \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} - \log m$

で，m に任意の数を入れて計算するプログラムである．

プログラム(9.3)

```
REM オイラー定数を(8.7)を使って求める
INPUT n
LET s=0
LET g=0
FOR i=1 TO n
    LET s=s+(1/i)
    LET γ =s－LOG(i)－1/(2*i)+1/(12*i^2)－1/(120*i^4)+1/(252*i^6)－1/(240*i^8)
    PRINT " γ (";i;")="; γ
NEXT i
END
```

プログラム(9.3)は

(8.7)　$\gamma=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{120n^4}+\frac{1}{252n^6}-\frac{1}{120n^8}+\hat{R}_9$

で，n に任意の数を入れて計算するプログラムである．

(ただし，剰余項 $\hat{R}_9$ は計算に入れない．)

プログラム(9.2)，プログラム(9.3)で $n=10$ として実行させると，オイラー定数を $n=1$ から $n=10$ まで求めることができ，結果は次のようになる．

プログラム(9.2)の実行結果	プログラム(9.3)の実行結果
γ (1)= 1	γ (1)= .574801587301587
γ (2)= .806852819440055	γ (2)= .577211047366642
γ (3)= .73472104466522	γ (3)= .577215564954665
γ (4)= .697038972213439	γ (4)= .577215658697156
γ (5)= .67389542089923	γ (5)= .577215664200817
γ (6)= .658240530771945	γ (6)= .577215664785003
γ (7)= .646946993801827	γ (7)= .577215664876123
γ (8)= .638415601177304	γ (8)= .577215664894764
γ (9)= .631743676632031	γ (9)= .577215664899427
γ (10)= .626383160974204	γ (10)= .577215664900792

表の見方として，γ (10)は $n=10$ として計算して求めたオイラー定数の値である．

また，プログラム(9.3)の計算結果の誤差は剰余項の評価 $\left|\hat{R}_9\right|\leq\frac{4!\cdot 8!}{(2\pi)^9\cdot n^9}$ からわかる．

例えば，$n=10$のとき，$\left|\hat{R}_9\right| \le \dfrac{4!\cdot 8!}{(2\pi)^9\cdot 10^9} = 6.34034587512476\mathrm{E}\text{-}11$となる．

(参考)　γ =0.57721566490153286…　であることが知られている．(参考文献[1]の 238 ページの(10.24)から)

10．参考文献

[1]　E.ハイラー，G.ワナー，蟹江幸博　訳：解析教程(上)，シュプリンガー・フェアラーク東京（1997 年）

[3]　森本光生：UBASIC による解析入門，日本評論社（1992 年）

[3]　荒川恒男，息吹山知義，金子昌信：ベルヌーイ数とゼータ関数，牧野書店（2001 年）

[4]　宮岡悦良，永倉安次郎：解析学Ⅰ，共立出版（1996 年）