卒業研究レポート

正則関数の表示

理工学部　数学科

４－１６－２

浅野　雄太

２００６．２．２５

＜目次＞

第０章　はじめに・・・

私はゼミナール時には，ハイラー・ワナー解析教程（上）で「複素数」の分野を学んでいった．その中にはＺ平面の図（猫）をW平面に正則関数によって写されたものが示されていた．まずは，なぜそのような図になるのかを考えてみたところ，いろいろな正則関数の写像についてどのように写されるのかということに疑問を抱くようになった．そこで卒業研究レポートのテーマを「正則関数の表示」と定めることにした．

このようにあまり目にすることのないＺ平面からW平面への写像を言葉ではなく，図にして目で確かめることで，より正則関数での写像を明確にしていくことを目標に進めていった．ここでは写像の等角性といった点にも気をつけて進めていくこととする．

主に，図形としては三角形・猫（放物線と線分によって作ったもの）・直交直線群を正則関数（３乗根，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数）によって写すプログラムの作成とその図の説明をする．

第1章　等角写像

Ｚ平面からW平面からの写像で正則関数であれば等角性という性質がある．

1．1　定義（等角性）

複素平面領域Dで連続な複素数値の関数$f(z)$が，つぎの２つの条件を満たすものとする．

（１）複素平面領域Dの点z_0で接線をもつようなすべての曲線は，
$w = f(z)$によってw平面上の点$w_0 = f(z_0)$を通り，そこで
接線をもつ曲線に写像される．

（２）z_0で接線をもつ任意の２つの曲線C_1, C_2がz_0でなす角ϑと，
その像曲線K_1, K_2がw_0でなす角φとは，回転の向きが一致し
てしかも等しい．

このとき，$f(z)$は点z_0で等角であるという．

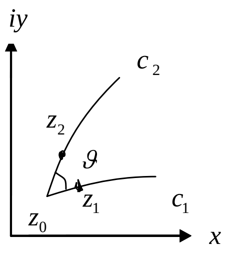
Dの各点で$f(z)$が等角のとき，$f(z)$はDで等角であるという．

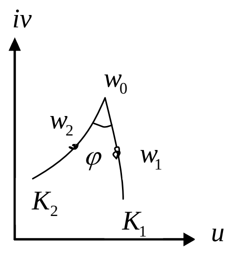
1．2　定理（等角写像）

$w = f(z)$ が点 z_0 で正則で $f'(z_0) \neq 0$ ならば，$f(z)$ は点 z_0 において等角である．

＜証明＞

ｚ平面　　　　　　　　　ｗ平面





z_0 で接線をもつ２つの曲線 C_1, C_2 がなす角を ϑ，f による像 K_1, K_2 が $w_0 = f(z_0)$ においてなす角を φ とする．C_1, C_2 上に点 z_1, z_2 をとると，$w_1 = f(z_1)$，$w_2 = f(z_2)$ となる．そこで点 z_1, z_2 を曲線 C_1, C_2 に沿って限りなく０に近づけると，

$$\lim \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \lim \frac{\dfrac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}}{\dfrac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}} \cdot \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$= \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} \lim \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$= \lim \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\therefore \lim \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \lim \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}.$$

両辺の偏角から左辺は φ に，右辺は ϑ に等しくなる．ゆえに等角である．

このことを図にして明確にするために，三角形や直交直線群や猫を用いた写像のプログラムを作成し，図に示す.

第2章　写像$w=f(z)$の描き方

2．1　Ｚ平面内の“もの”の紹介

Ｚ平面内“もの”をW平面にうつしてみる．

ここでは，線分・三角形・猫・直交直線群を扱う．

2．1．1　線分

$$S \coloneqq \{(1-t)z_1 + tz_2 ; 0 \le t \le 1\}$$

その像　$f(S) = \{w; \quad z \in S\}$

2．1．2　三角形

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i, \quad z_3 = x_3 + y_3 i$$

$$\Delta_1 \coloneqq \{(1-t)z_1 + tz_2 ; 0 \le t \le 1\}$$

Δ_2は，z_2, z_3を結んだ線分・Δ_3は，z_3, z_1を結んだ線分とすると

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$で

その像　$f(\Delta) = \{w; \quad z \in \Delta\}$

2．1．3　猫

２本の線分S_1, S_2・２つの放物線をp_1, p_2とすると，

$$S_1 \coloneqq \{(1-t)z_1 + tz_2 ; 0 \le t \le 1\}$$

$$S_2 \coloneqq \{(1-t)z_3 + tz_4 ; 0 \le t \le 1\}$$

p_1, p_2は順番に猫の輪郭，頭とする．

輪郭と頭は，媒介変数表示を用いて放物線を描くことで作成する．

$$\begin{cases} x = l \\ y = (l\text{の２次式}) \end{cases}$$

（lは媒介変数）とする．

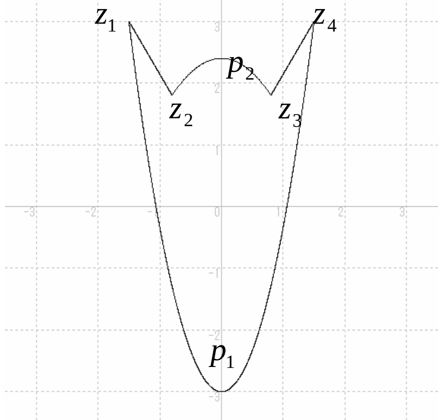
輪郭と頭の媒介変数表示はそれぞれ異なる．

輪郭や頭は，写す正則関数によって大きさが異なるので，それに応じてlの範囲を定める．

ゆえに，

$N = S_1 \cup S_2 \cup p_1 \cup p_2$で

その像　$f(N) = \{w; \quad z \in N\}$



2．1．4　直交直線群

$x = x_0$（一定），$y = y_0$（一定）として

$$z_1 = x_0 + y_1 i, \quad z_2 = x_0 + y_2 i$$
$$T_{x_0} := \{(1-t)z_1 + tz_2 ; 0 \le t \le 1\} \quad \cdots\cdots ①$$

$$z_3 = x_3 + y_0 i, \quad z_4 = x_4 + y_0 i$$
$$Y_{y_o} := \{(1-t)z_3 + tz_4 ; 0 \le t \le 1\} \quad \cdots\cdots ②$$

上のT_{x_0}, Y_{y_0}の直線をx_0, y_0をそれぞれ何個かに定め，ｘ軸とｙ軸に平行な直線描き直交する直線群を示す．それを! とすると，

その像　$f(H) = \{w; \quad z \in H\}$

というふうに図を描き，写像$w = f(z)$として描く．

2．2　“もの”を描くためのアルゴリズム

１０進ＢＡＳＩＣプログラムでは，線分を描く命令として，

```
PLOT LINES : x1,y1 ; x2,y2
```

がある．
これによって座標（x1,y1）と座標（x2,y2）を結ぶことができる．
この方法で，線分や三角形を描くことができる．
曲線（放物線）も同様な命令を用いて表示するが，曲線にするために媒介変数表示をして得たｘとｙの点を細かくとることで，多くの線分を細かに描き曲線に近づけていった．

W平面に写すために線分は１－ｔ：ｔに内分し細かく点を刻み，それぞれの点をW平面内にプロットし，点と点を結ぶことにより図を表示する．
三角形もこの方法をもってW平面に写す．
曲線は，まえに示した媒介変数表示によって得た座標を細かくとり，それぞれの点をW平面内に写し図を表示する．

第３章　$f: z \to w = f(z) = z^3$（３乗）

<u>定理（３乗根の写像）</u>

　$f(z) = z^3$とするとき，次の（１）（２）（３）（４）が成り立つとき，

（１）$f'(z) = 2z^2$

（２）$f: C \to C$　全射（$z \neq 0$以外で等角）であるが，

　　１対１ではない．

（３）
$$\Omega_1 = \{re^{i\vartheta}; 0 < r < \infty, -\frac{\pi}{3} < \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\}$$

とすると，fをΩの範囲で与えることで

（４）
$$f\big|_{\Omega}\Omega_1 \to C \setminus \{0\}$$

は全単射である．

Ω_2，Ω_3でも同様である．

ただし，

$$\Omega_2 = \{re^{i\vartheta}; 0 < r < \infty, \frac{\pi}{3} < \vartheta \leq \pi\}$$

$$\Omega_3 = \{re^{i\vartheta}; 0 < r < \infty, \pi < \vartheta \leq \frac{5\pi}{3}\}$$

さらに，

$$f(\Omega_j) = C \setminus \{0\}.$$

$$C \setminus \{0\} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

$$\Omega_i \cap \Omega_k \neq \phi \, (i \neq k)$$

$w^* \in C \setminus \{0\}$となる任意の$w^*$に対して，

$f(z) = w^*$をみたすzは，各Ωに１つずつ全部で３つ存在する．

Ω_jはΩ_{j-1}を１２０°回転したものになる．

となる．

これらを図に示し考えていく．

3．1　三角形

　z1=a1+a2i　z2=b1+b2i　z3=c1+c2i という複素数を複素数平面上にプロットし，それら２点を結ぶことで三角形を作る．

　２点を結んだ線分をｔ：１－ｔに内分する点をｚ=x+yi としたとき

その z を

$$f : z \to w = f(z) = z^3$$

に写すプログラム．

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -5,5,-5,5
4 DRAW grid
5 PRINT "複素数平面上の三角形をw＝z＾3で写すプログラム"
6 PRINT "値を入力してください。"
7 INPUT a1,a2
8 PRINT "z1=";a1;"+";a2;"i"
9 INPUT b1,b2
10 PRINT "z2=";b1;"+";b2;"i"
11 INPUT c1,c2
12 PRINT "z3=";c1;"+";c2;"i"
13 LET i=SQR(-1)
14 LET z1=a1+a2*i
15 LET z2=b1+b2*i
16 LET z3=c1+c2*i
17 CALL segment(z1,z2,2,2)
18 CALL segment(z2,z3,3,3)
19 CALL segment(z3,z1,4,4)
20 END
21 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,d1,d2)
22 OPTION ARITHMETIC complex
23 LET oldz=z1
24 LET oldw=oldz^3*0.05
25 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
26     LET z=(1-t)*z1+t*z2
27     SET LINE COLOR d1
28     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
29     LET w=z^3*0.05
```

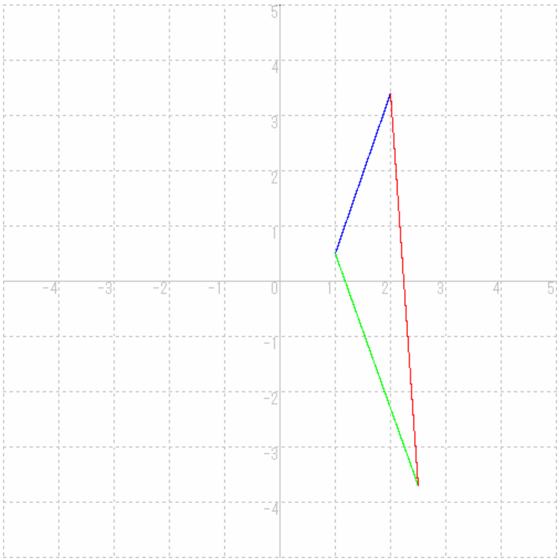
```
30      SET LINE COLOR d2
31      PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
32      LET oldz=z
33      LET oldw=w
34 NEXT t
35 END SUB
```

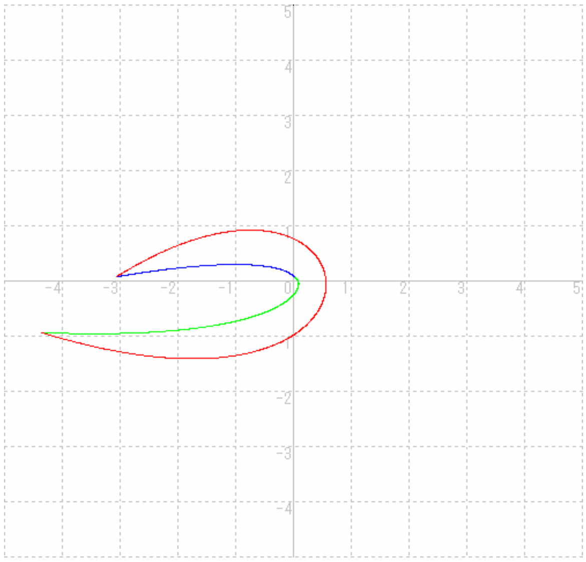
・このとき $-\dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲で考えるため，

$z1 = 2 + 3.4i, z2 = 1 + 0.5i, z3 = 2.5 - 3.7i$ としたとき．

・Ｚ平面の三角形 $z1, z2, z3$ と，その逆W平面の像

Ｚ平面　　　　　　　　　　　　　　　　W平面





3．2　猫

媒介変数表示を用いて作成した放物線と，２点を１－ｔ：ｔに内分した点を結んで作った線分から猫を作成（ただし，$-\dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲で）し，点ｚを z=x+yi としたとき，

そのｚを

$$f : z \rightarrow w = f(z) = z^3$$

写像 f で写すプログラム．

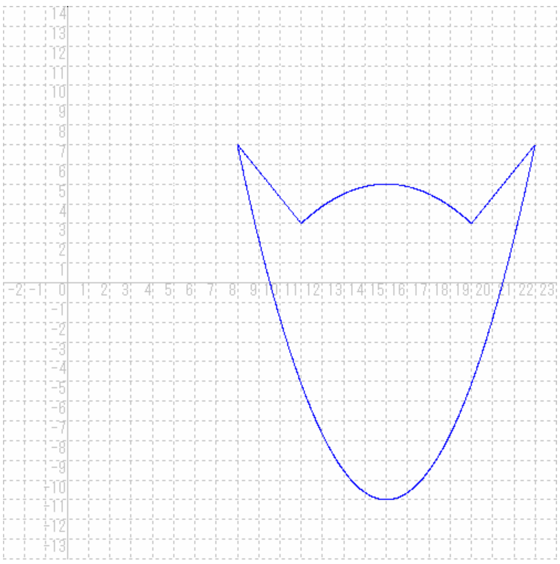
```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -3,23,-14,14
```

```
4 DRAW grid
5 LET i=SQR(-1)
6 LET oldz=8+7*i
7 LET oldw=oldz^3*0.001
8 FOR t=8 TO 22 STEP 0.01
9     LET x=t
10     LET y=18*(t-15)^2/49-11
11     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
12     LET z=x+y*i
13     PRINT z
14     SET LINE COLOR 2
15     PLOT LINES: RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
16     LET w=z^3*0.001
17     SET LINE COLOR 3
18     PLOT LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
19     LET oldz=z
20     LET oldw=w
21 NEXT t
22 LET oldz=11+3*i
23 LET oldw=oldz^3*0.001
24 FOR t=11 TO 19 STEP 0.01
25     LET x=t
26     LET y=-(t-15)^2/8+5
27     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
28     LET z=x+y*i
29     PRINT z
30     SET LINE COLOR 2
31     PLOT LINES: RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
32     LET w=z^3*0.001
33     SET LINE COLOR 3
34     PLOT LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
35     LET oldz=z
36     LET oldw=w
37 NEXT t
38 CALL segment(8+7*i,11+3*i)
39 CALL segment(19+3*i,22+7*i)
```

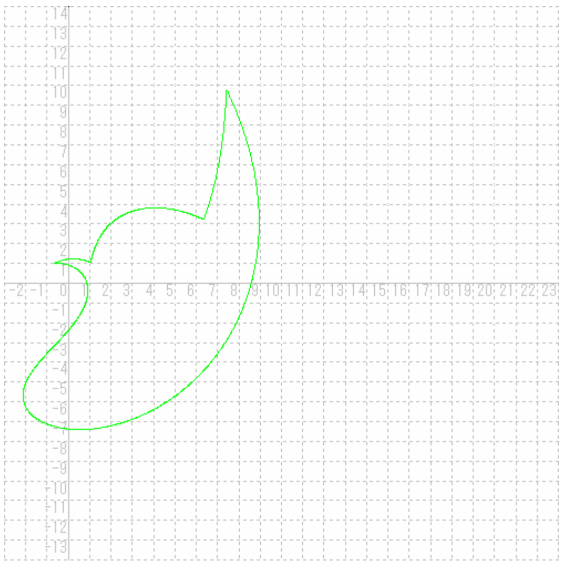
```
40 END
41 EXTERNAL SUB segment(z1,z2)
42 OPTION ARITHMETIC complex
43 LET oldz=z1
44 LET oldw=oldz^3*0.001
45 FOR t=0 TO 1 STEP 0.01
46     LET z=(1-t)*z1+t*z2
47     SET LINE COLOR 2
48     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
49     LET w=z^3*0.001
50     SET LINE COLOR 3
51     PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
52     LET oldz=z
53     LET oldw=w
54 NEXT t
55 END SUB
```

・ $z = w^{\frac{1}{3}}$ と，その逆 $w = z^3$

Z平面



W平面



Z平面では，$-\dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲内に猫を描き，それをW平面にうつした．

・ $z \to w = z^3$ の図を考える（$z = a + bi$ とする）．

$w = z^3 = (a^3 - 3ab) + (3a^2b - b^3)i$ となり，実部を u,虚部を v とすると

$$\begin{cases} u = a^3 - 3ab \\ v = 3a^2 b - b^3 \end{cases}$$

このｕとｖの関係からこのような曲線などを描くことがわかる。

3．3　直交直線群

媒介変数表示を用いて作成した円と，極形式を利用し作った直交する図を，

（ただし，$-\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}$ の範囲で）点ｚを z=x+yi とすると，

そのｚを，

$$f : z \to w = f(z) = z^3$$

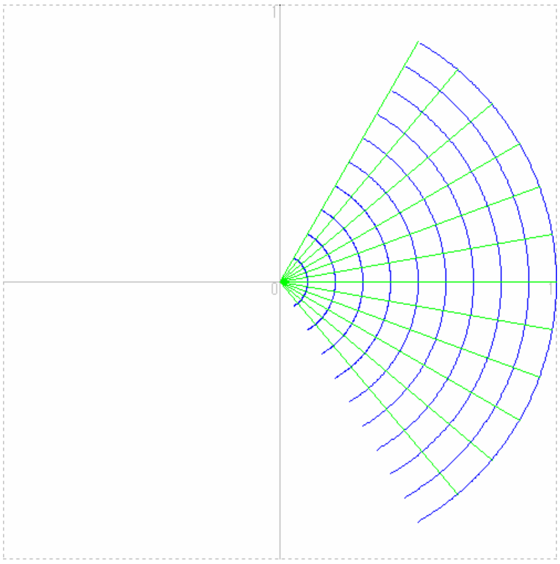
写像 f で写すプログラム．

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 SET WINDOW -1,1,-1,1
3 DRAW grid
4 LET i=SQR(-1)
5 FOR t=-PI/3 TO PI/3 STEP PI/720
6      FOR n= 0 TO 1 step 0.1
7          PRINT "z=";x;"+";y;"i"
8          LET x=n*COS(t)
9          LET y=n*SIN(t)
10          LET z=x+y*i
11          SET LINE COLOR 2
12          PLOT LINES : RE(z),IM(z)
13          LET w=z^3
14          SET LINE COLOR 3
15          PLOT LINES : RE(w),IM(w)
16      NEXT n
17 NEXT t
18 FOR k=-5TO 6
19      LET x=COS((PI/3)*k/6)
20      LET y=SIN((PI/3)*k/6)
21      LET z=x+y*i
22      SET LINE COLOR 2
23      PLOT LINES : re(oldz),im(oldz);RE(z),IM(z)
```

```
24      LET w=z^3
25      SET LINE COLOR 3
26      PLOT LINES : re(oldw),im(oldw);RE(w),IM(w)
27 NEXT k
38 END
```

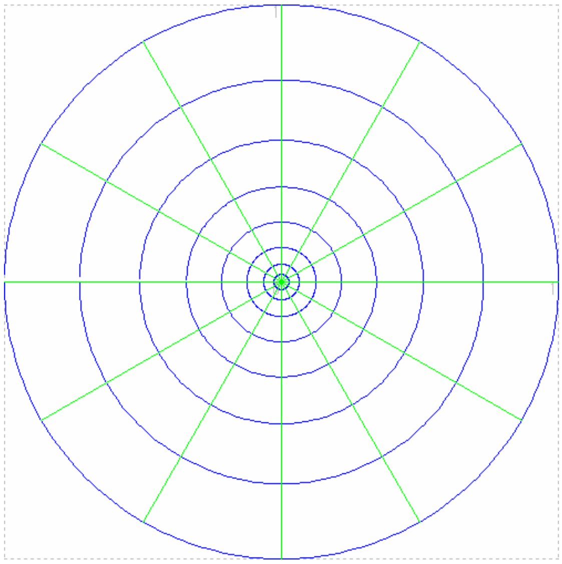
・Z平面上の図（$-\dfrac{\pi}{3}<\vartheta<\dfrac{\pi}{3}$）と，その逆W

Z平面



$x=-1$から$x=1$，$y=-1$から$y=1$で図を表示.

W平面



$u=-1$から$u=1$，$v=-1$から$v=1$で図を表示.

第4章　$f: z \to w = f(z) = e^z$（指数関数）
$f: z \to w = f(z) = \log z$（対数関数）

定理（指数関数の写像）

$f(z) = e^z$ とするとき次の（1）から（6）が成り立つ.

（1）$f'(z) = e^z$

（2）$^\forall z \in C,\quad e^z \cdot e^{-z} = 1$ から $e^z \neq 0$．特に f はいたるところで等角.

$f: C \to C$　全射ではない.

そして，1対1でもない.

（3）$f(C) = C \setminus \{0\}$

（4）任意の $c \in C$ に対して，$e^z = c$ の解は次のようになる.

（Ⅰ）$c = 0$ ならば，解なし.

（Ⅱ）$c \neq 0$ ならば,

$$z = \log r + i(\vartheta + 2n\pi)(n \in Z)$$

ただし，r, ϑ は $c = re^{i\vartheta}$ を満たす数である $(r > 0)$

つまり,

（5）$$\Omega_0 = \{x + iy\ ;\ x \in R, -\pi < y \leq \pi\}$$

とすると,

（6）$$f\big|_{\Omega}: \Omega_0 \to C \setminus \{0\}$$

は，全単射となる.

＜（4）の証明＞

$e^z = c$ とすると

$$e^z = e^{x+yi}$$
$$= e^x \cdot e^{yi}$$

となり,

$$c = re^{i\vartheta}$$

とすると,

$$r = e^x, e^{i\vartheta} = e^{yi}$$

と考えることが出来る．ここから,

$$x = \log r$$
$$y = \vartheta + 2n\pi (n \in Z)$$

さらに,

$$\vdots$$
$$\Omega_{-1}=\{x+iy\text{；}x\in R,-3\pi<y\le-\pi\}$$
$$\Omega_{0}=\{x+iy\text{；}x\in R,-\pi<y\le\pi\}$$
$$\Omega_{1}=\{x+iy\text{；}x\in R,\quad\pi<y\le3\pi\}$$
$$\Omega_{2}=\{x+iy\text{；}x\in R,3\pi<y<5\pi\}$$
$$\vdots$$

としたとき,

$$f(\Omega_j)=C\setminus\{0\},$$

$$C=\cdots\cup\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_j\cup\cdots$$

$$\Omega_i\cap\Omega_k\ne\phi(i\ne k)$$

任意の $w^*\in C\setminus\{0\}$ に対して,
$f(z)=w^*$ をみたす z は，各 Ω に１つずつ存在する.

これは Ω_{j+1} から Ω_j へ虚軸方向に 2π 移動させたものである.

（６） f は $2\pi i$ を基本周期とする周期関数

Lemma　$z\in C$ について

$$e^z=1\Leftrightarrow{}^{\exists}n\in Z\quad s.t.\quad z=2n\pi i$$

c が f の周期 $\Leftrightarrow{}^{\forall}z\in C\qquad f(z+c)=f(z)$

$$e^z\cdot e^c=e^z$$
$$\therefore\quad e^c=1$$
$$\Leftrightarrow{}^{\exists}n\in Z\quad s.t.\quad c=2n\pi i$$

これらを図に示し，考えていく.

４．１　z平面上における猫･直交直線群

z平面上の猫（猫は，媒介変数表示を用いて作成した放物線と，２点を１－ｔ：ｔに内分した点を結んで作った直線を使用し作った.）と真ん中の猫を覆うように作成した直交直線群を表示するプログラム.

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -10,10,-10,10
```

```
4 DRAW grid
5 LET i=SQR(-1)
6 LET oldz=-1.3+3*i
7 FOR t=-1.3 TO 1.3 STEP 0.01
8     LET x=t
9     LET y=600*t^2/169-3
10     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
11     LET z=x+y*i
12     PRINT z
13     SET LINE COLOR 2
14     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
15     LET oldz=z
16 NEXT t
17 LET oldz=-1.3+(3+2*PI)*i
18 FOR t=-1.3 TO 1.3 STEP 0.01
19     LET x=t
20     LET y=600*t^2/169-3+2*PI
21     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
22     LET z=x+y*i
23     PRINT z
24     SET LINE COLOR 7
25     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
26     LET oldz=z
27 NEXT t
28 LET oldz=-1.3+(3-2*PI)*i
29 FOR t=-1.3 TO 1.3 STEP 0.01
30     LET x=t
31     LET y=600*t^2/169-3-2*PI
32     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
33     LET z=x+y*i
34     PRINT z
35     SET LINE COLOR 3
36     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
37     LET oldz=z
38 NEXT t
39 LET oldz=-0.8+1.8*i
```

```
40 FOR t=-0.8TO 0.8 STEP 0.01
41      LET x=t
42      LET y=-15*t^2/16+2.4
43      PRINT "z=";x;"+";y;"i"
44      LET z=x+y*i
45      PRINT z
46      SET LINE COLOR 2
47      PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
48      LET oldz=z
49 NEXT t
50 LET oldz=-0.8+(1.8+2*PI)*i
51 FOR t=-0.8TO 0.8 STEP 0.01
52      LET x=t
53      LET y=-15*t^2/16+2.4+2*PI
54      PRINT "z=";x;"+";y;"i"
55      LET z=x+y*i
56      PRINT z
57      SET LINE COLOR 7
58      PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
59      LET oldz=z
60 NEXT t
61 LET oldz=-0.8+(1.8-2*PI)*i
62 FOR t=-0.8TO 0.8 STEP 0.01
63      LET x=t
64      LET y=-15*t^2/16+2.4-2*PI
65      PRINT "z=";x;"+";y;"i"
66      LET z=x+y*i
67      PRINT z
68      SET LINE COLOR 3
69      PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
70      LET oldz=z
71 NEXT t
72 CALL segment(-1.3+3*i,-0.8+1.8*i,2)
73 CALL segment(1.3+3*i,0.8+1.8*i,2)
74 CALL segment(-1.3+(3+2*PI)*i,-0.8+(1.8+2*PI)*i,7)
75 CALL segment(1.3+(3+2*PI)*i,0.8+(1.8+2*PI)*i,7)
```

```
76 CALL segment(-1.3+(3-2*PI)*i,-0.8+(1.8-2*PI)*i,3)
77 CALL segment(1.3+(3-2*PI)*i,0.8+(1.8-2*PI)*i,3)
78 FOR j=-1.4 TO 1.4 STEP 0.2
79     CALL segment(j-PI*i,j+PI*i,6)
80 NEXT j
81 FOR p=-PI TO PI+0.1 STEP 0.3
82     CALL segment(1.4+p*i,-1.4+p*i,6)
83 NEXT p
84 END
85 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1)
86 OPTION ARITHMETIC complex
87 LET oldz=z1
88 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
89     LET z=(1-t)*z1+t*z2
90     SET LINE COLOR c1
91     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
92     LET oldz=z
93 NEXT t
94 END SUB
```

このプログラムではＺ平面での図をくわしく描いたもの（下の図の左側）.

指数関数の写像では，Ｚ平面で $-\frac{\pi}{2} < IMz \le \frac{\pi}{2}$ の範囲に図をしめしたときに，W平面では０を除く複素数全体へうつる．しかし，Ｚ平面での図は上に示した範囲以外に 2π ごとに実際は図が現れることから，それを具体的にこのプログラムでは３つほど図にしめしてみた.

４．２ 写像で写った先の猫･直交直線群 (指数関数)

前のプログラムの（３つのうちの）真ん中の猫と直行直線群を, 点ｚを z=x+yi とすると, そのｚを,

$$f : z \to w = f(z) = e^z$$

写像 f で写すプログラム.

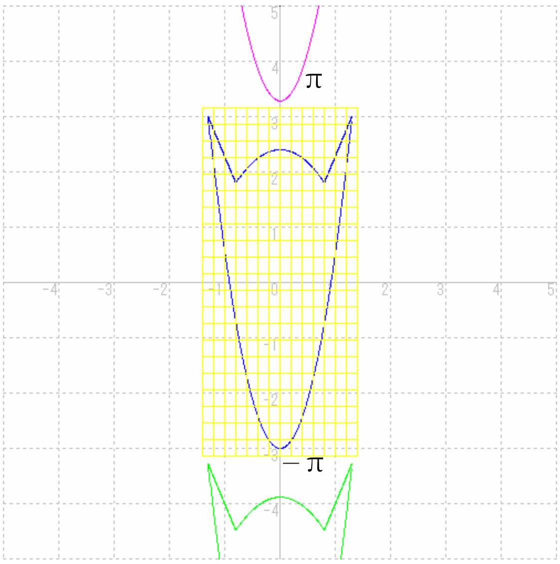
```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -3.8,3.8,-3.5,3.5
4 DRAW grid
5 LET i=SQR(-1)
```

```
6 LET oldz=-1.3+3*i
7 LET oldw=EXP(oldz)
8 FOR t=-1.3 TO 1.3 STEP 0.001
9     LET x=t
10     LET y=600*t^2/169-3
11     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
12     LET z=x+y*i
13     PRINT z
14     LET w=EXP(z)
15     SET LINE COLOR 1
16     PLOT LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
17     LET oldz=z
18     LET oldw=w
19 NEXT t
20 LET oldz=-0.8+1.8*i
21 LET oldw=EXP(oldz)
22 FOR t=-0.8TO 0.8 STEP 0.01
23     LET x=t
24     LET y=-15*t^2/16+2.4
25     PRINT "z=";x;"+";y;"i"
26     LET z=x+y*i
27     PRINT z
28     LET w=EXP(z)
29     SET LINE COLOR 1
30     PLOT LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
31     LET oldz=z
32     LET oldw=w
33 NEXT t
34 LET z1=-1.3+3*i
35 LET z3=1.3+3*i
36 LET z2=-0.8+1.8*i
37 LET z4=0.8+1.8*i
38 CALL segment(z1,z2,1)
39 CALL segment(z3,z4,1)
40 FOR j=-1.4 TO 1.4 STEP 0.2
41     CALL segment(j-PI*i,j+PI*i,6)
```

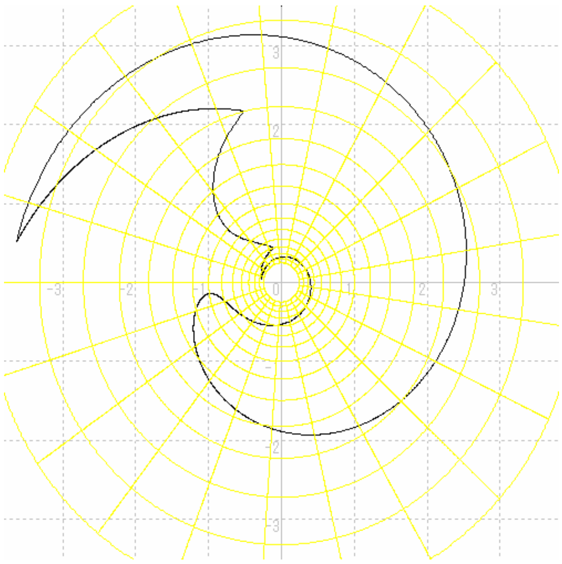
```
42 NEXT j
43 FOR p=-PI TO PI STEP 0.3
44      CALL segment(1.4+p*i,-1.4+p*i,6)
45 NEXT p
46 END
47 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1)
48 OPTION ARITHMETIC complex
49 LET oldz=z1
50 LET oldw=EXP(oldz)
51 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
52      LET z=(1-t)*z1+t*z2
53      LET w=EXP(z)
54      SET LINE COLOR c1
55      PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
56      LET oldz=z
57      LET oldw=w
58 NEXT t
59 END SUB
```

・関数 $w = e^z$ とその逆 $z = \log w$

Z平面



W平面



Z平面の $-\dfrac{\pi}{2} < IMz \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に存在する直交直線群と猫を，W平面にうつした．

$x = x_0$ （一定）のときW平面では円状にうつり， $y = y_0$ （一定）のときはW平面に放射線状にうつる．

4．3　直交直線群（対数関数）

適当な原点を通らない直交直線群を，点ｚを z=x+yi とすると，

そのｚを，

$$f : z \to w = f(z) = \log z$$

写像 f で写すプログラム．

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -8,8,-8,8
4 DRAW grid
5 FOR j=-10 TO 10
6     LET  x=-2^j
7     IF x <> 0 THEN
8         LET i=SQR(-1)
9         LET  z1=x+100*i
10          LET  z2=x-100*i
11          CALL segment(z1,z2,4,5)
12      END IF
13 NEXT j
14 FOR j=-10 TO 10
15      LET  x=2^j
16      IF x <> 0 THEN
17          LET i=SQR(-1)
18          LET  z1=x+100*i
19          LET  z2=x-100*i
20          CALL segment(z1,z2,2,3)
21      END IF
22 NEXT j
23 FOR j=-10 TO 10
24      LET  y=-2^j
25      IF y <> 0 THEN
26          LET i=SQR(-1)
27          LET  z1=100+y*i
28          LET  z2=-100+y*i
29          CALL segment(z1,z2,8,9)
30      END IF
```

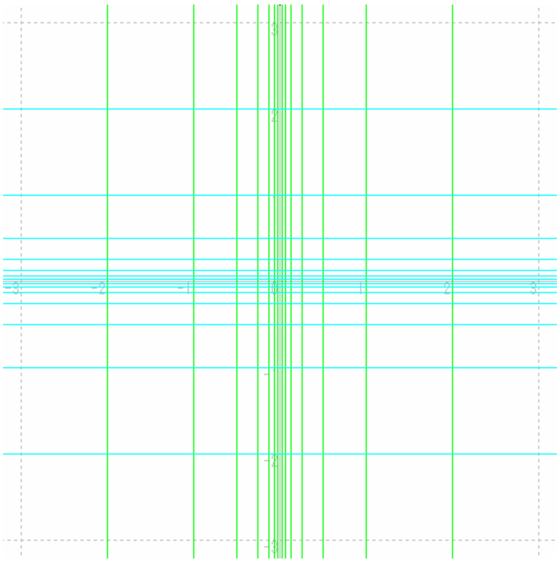
```
31 NEXT j
32 FOR j=-10 TO 10
33     LET   y=2^j
34     IF y <> 0 THEN
35         LET i=SQR(-1)
36         LET   z1=100+y*i
37         LET   z2=-100+y*i
38         CALL segment(z1,z2,6,7)
39     END IF
40 NEXT j
41 END
42 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1,c2)
43 OPTION ARITHMETIC complex
44 LET oldz=z1
45 LET oldw=LOG(oldz)
46 FOR t=0 TO 1 STEP 0.00005
47     LET z=(1-t)*z1+t*z2
48     SET LINE COLOR c1
49     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
50     LET w=LOG(z)
51     SET LINE COLOR c2
52     IF ABS(oldw-w) < 4 THEN
53         PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
54     END IF
55     LET oldz=z
56     LET oldw=w
57 NEXT t
58 END SUB
```

ここでは，W平面の図をキレイにするために，Ｚ平面の直交直線群を x, y を 2^j などにして図を描いた.

対数関数は周期関数でなく多価関数で一意に定まることがない.

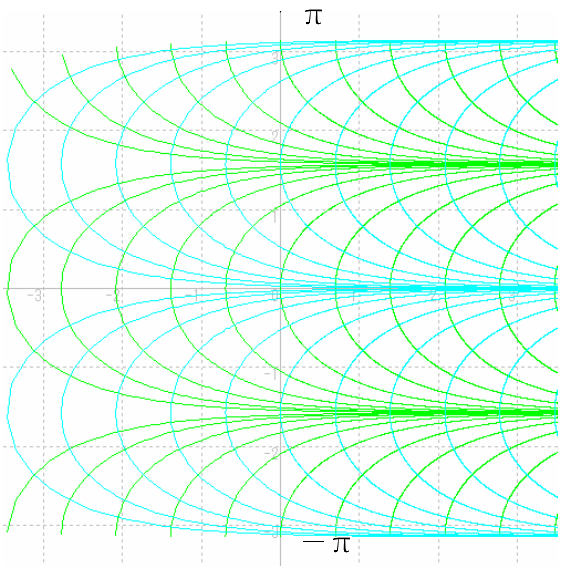
・z平面の直交直線群と $w=\log z$ の図

Z平面



$x=-\pi$ から $x=\pi$，$y=-\pi$ から $y=\pi$ で図を表示.

W平面



$u=-\pi$ から $u=\pi$，$v=-\pi$ から $v=\pi$ で図を表示.

Z平面では0を除いた複素数全体の範囲で図を示したが，うつした先のW平面では $-\pi<v\leq\pi$ の範囲に図が示されることがわかる.

i 実軸と平行な直線とその写った先　　　　ii 虚軸と平行な直線とその写った先

このように実軸と平行な直線では,

$y>0$ のとき，虚軸方向に $0<y<\pi$ の範囲で図が存在.

$j\geq 0$ のとき，写った先の図は実軸の正方向（大きく）に進む.

$y<0$ のとき，虚軸方向に $-\pi<y<0$ の範囲で図が存在.

$j<0$ のとき，写った先の図は実軸の負の方向（小さく）に進む.

虚軸と平行な直線では,

$x>0$ のとき，虚軸方向に $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ の範囲で図が存在.

$j\geq 0$ のとき，写った先の図は実軸の正方向（大きく）に進む.

$x<0$ のとき，虚軸方向に $-\pi<y<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<y<\pi$ の範囲に図が存在.

$j<0$ のとき，写った先の図は実軸の負の方向（小さく）に進む.

4．4　三角形 (指数関数)

z1=a1+a2i　z2=b1+b2i　z3=c1+c2i という複素数を複素数平面上にプロットし，それら２点を結ぶことで三角形を作る．

２点を結んだ直線をｔ：１－ｔに内分し、それら内分した点をｚとしたとき z=x+yi とする．

そのｚを

$$f: z \to w = f(z) = e^z$$

に写すプログラム．

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -4,4,-4,4
4 DRAW grid
5 PRINT "複素数平面上の三角形を2乗で写すプログラム"
6 PRINT "値を入力してください。"
7 INPUT a1,a2
8 PRINT "z1=";a1;"+";a2;"i"
9 INPUT b1,b2
10 PRINT "z2=";b1;"+";b2;"i"
11 INPUT c1,c2
12 PRINT "z3=";c1;"+";c2;"i"
13 LET i=SQR(-1)
14 LET z1=a1+a2*i
15 LET z2=b1+b2*i
16 LET z3=c1+c2*i
17 CALL segment(z1,z2,2,2)
18 CALL segment(z2,z3,3,3)
19 CALL segment(z3,z1,4,4)
20 END
21 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,d1,d2)
22 OPTION ARITHMETIC complex
23 LET oldz=z1
24 LET oldw=EXP(oldz)
25 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
26     LET z=(1-t)*z1+t*z2
27     SET LINE COLOR d1
```

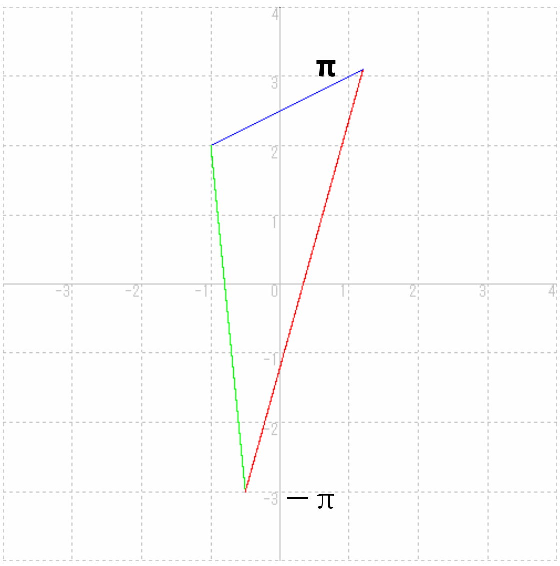
```
28      PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
29      LET w=EXP(z)
30      SET LINE COLOR d2
31      PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
32      LET oldz=z
33      LET oldw=w
34 NEXT t
35 END SUB
```

y の範囲を周期から，$-\pi < y < \pi$ として

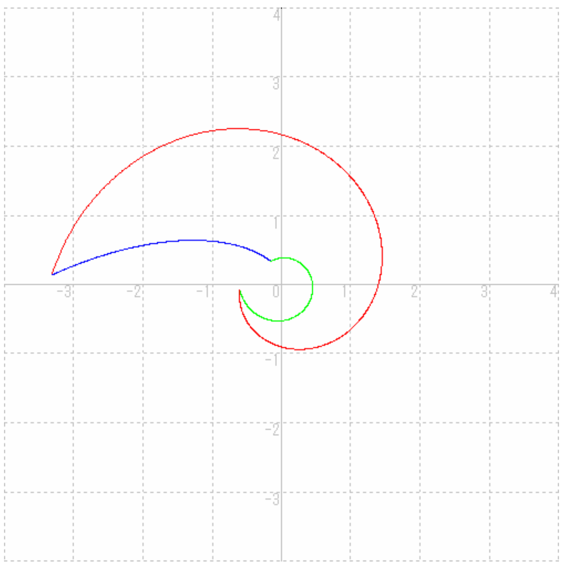
z1= 1.2+3.1i,z2=-1+2i,z3=-0.5-3iとすると．

・$z = \log w$ **(三角形)と，その逆** $w = e^z$

Z平面



W平面



・$z \to w = e^z$ の図を考える（$z = a + bi$ とする）.

$$w = e^z = e^{a+bi}$$
$$= e^a \cdot e^{bi}$$

このとき，e^a は a が実数なので定数となる.

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

このオイラーの公式を用いると

$$e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$$

をえる.

e^a は原点からの距離をあらわし、b は偏角をあらわす.

この式の実部を u,虚部をｖとすると

$$\begin{cases} u = e^a \cos b \\ v = e^a \sin b \end{cases}$$

ここで $x = k$ としてｂを消去すると

$$u^2 + v^2 = e^{2k}$$

となり，z 平面上における x=k は w 平面上では半径 e^k の円周が対応する．
e^z の周期は $2\pi i$ となることから，w平面上の円周を正の方向に１周してもどる．
ゆえに，u,vの関係から上のような図が得られる．

第5章　$f: z \to w = f(z) = \sin z$ (三角関数)

この章では，写像を三角関数（正弦）として考えていく．
オイラーの公式

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

を使うと，$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ が ϑ を $-z$ とすると得られる．
このとき e^{iz}, e^{-iz} の右辺と左辺どうしを引き算すると，

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z + i\sin z - (\cos z - i\sin z) \\ &= 2i\sin z \end{aligned}$$

これから

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

を得る．

$\sin z$ の周期を考える．

$$c \text{ が } f \text{ の周期} \Leftrightarrow {}^{\forall}z \in C \qquad f(z+c) = f(z)$$

$$\frac{e^{i(z+c)} - e^{-i(z+c)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\frac{e^{iz}\cdot e^{ic} - e^{-iz}\cdot e^{-ic}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^{ic} = 1, \quad e^{-ic} = 1$$

$$\Leftrightarrow {}^{\exists}n \in Z \quad s.t. \quad c = 2n\pi$$

$\sin(\pi - z)$ を考える．

$$\sin(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi-z)} - e^{-i(\pi-z)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\pi}\cdot e^{-iz} - e^{-i\pi}\cdot e^{iz}}{2i}$$

$$(e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1)$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$= \sin z$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(z + 2\pi) = \sin z \\ &\sin(\pi - z) = \sin z \end{aligned}}$$

ここから $f(z)=\sin z$ を考える.

定理（三角関数＜正弦＞の写像）

$f(z)=\sin z$

（1） $f'(z)=\cos z$

（2） $f:C\to C$ は（$z\neq -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ のとき等角）全射であるが

1 対 1 ではない.

（3） $^{\forall}c\in C$ に対して $\sin z=c$ の解は次のようになる**.**

$$z=-i\log(iw\pm\sqrt{1-w^2})$$

つまり，

（4） $$\Omega_0=\{x+iy\,;\,x\in R,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\}$$

とすると，

（5） $$f|_{\Omega}:\Omega_0\to C$$

より，全射となる.

しかし，単射ではない.

＜証明＞

$\sin z=c$ とすると**，**

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=c$$

$w=e^{iz}$ とすると，

$$w^2-2icw-1=0 \quad ・・・①$$

ここで，$w\neq 0$ ことがわかる.

$$w=ic+\sqrt{1-c^2},ic-\sqrt{1-c^2}$$

となる.

ここで,

$\Omega=\{x+yi;-\pi<REz\le\pi\}$ に 2 つ存在する

（ただし，重なっていることもある.）

しかし，ここで①の 2 根を w_1,w_2 とすると，

つまり

$$w_1=ic+\sqrt{1-c^2}$$
$$w_2=ic-\sqrt{1-c^2}$$

として，ここで

$$e^{iz_j}=w_j\,(j=1,2)$$

を満たす$iz_j\in\{x+yi;\ -\pi<IMz\leq\pi\}$から

$$z_j\in\Omega:=\{x+yi;\ -\pi<REz\leq\pi\}$$

特に $f(C)=C$　つまり，f は全射.
しかし，ここで

$$^{\exists}z_1,z_2\in\Omega,\quad\begin{cases}e^{iz_1}=w_1\\ e^{iz_2}=w_2\end{cases}$$

を与えたとき，z_1,z_2 の関係を考える.

$$w_1\cdot w_2=-1$$
$$e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=-1$$
$$e^{i(z_1+z_2)}=-1$$

ゆえに,

$$i(z_1+z_2)=(2n+1)\pi i\quad(n\in Z)$$

iを消去すると,

$$z_1+z_2=(2n+1)\pi$$
$$z_2=(2n+1)\pi-z_1$$

として,

$$z_1=x_1+y_1i$$
$$z_2=x_2+y_2i$$

とおくと,

$$x_2+y_2i=(2n+1)\pi-x_1-y_1i$$

この式から実部をとると,

$$x_2=(2n+1)\pi-x_1$$

（1）$x_1>0$のとき

$$x_2=\pi-x_1$$

（2）$x_1<0$のとき

$$x_2=-x_1-\pi$$

ここで,

[A] $0\leq x_1\leq\dfrac{\pi}{2}$

[B] $\frac{\pi}{2} < x_1 \leq \pi$ のとき

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

[C] $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < 0$

[D] $-\pi < x_1 < -\frac{\pi}{2}$ のとき

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_2 < 0$$

つまり，

$$\Omega_0 = \{x + iy \ ; \ x \in R, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

このとき全射となる．

ここで正弦の図について考えると，

$$\begin{aligned}
w = \sin z = \sin(x+yi) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}(e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{-y+xi} - e^{y-xi}) \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[(e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x\right] \\
&= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x \\
&= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x
\end{aligned}$$

このとき，$x =$ 一定とすると

$$w = a\cosh y + ib\sinh y \quad (a, b \text{ 定数})$$

$\begin{cases} u = a\cosh y \\ v = b\sinh y \end{cases}$ とおく，

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2-\left(\frac{v}{b}\right)^2=\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$$

ゆえに，双曲線を描くことがわかる．

逆に，$y=$一定として，c,d 定数においたとき，

$\begin{cases} u=c\sin x \\ v=d\cos x \end{cases}$ とおくと，

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2+\left(\frac{v}{d}\right)^2=1$$

ゆえに，楕円を描く．

ただし，双曲線を描くと書いてしまったが $x=-\dfrac{\pi}{2},0,\dfrac{\pi}{2}$ の時は直線になる．

$x=-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$ のときは双曲線がつぶれて重なった状態になるので１対１ではない．

よって，

$$\Omega_0=\{x+iy\ ;\ x\in R,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$$

としたとき，１対１となり $f\big|_{\Omega_0}$ は単射である．

さらに，

$$\vdots$$

$$\Omega_0=\{x+iy\ ;\ x\in R,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$$

$$\Omega_1=\{x+iy\ ;\ x\in R,\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\}$$

$$\Omega_2=\{x+iy\ ;\ x\in R,\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}\}$$

$$\vdots$$

としたとき，

$$f(\Omega_j)=C\setminus\{x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}.$$

$$C=\cdots\cup\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_j\cup\cdots$$

$$\Omega_i\cap\Omega_k\neq\phi\ (\,i\neq k\,)$$

任意の $w^* \in C$ に対して，

$f(z) = w^*$ をみたす z は，各 Ω に１つずつ存在する．

これは Ω_j は Ω_{j+1} を実軸方向に π 移動させたものである．

これらを図に示し，考えていく．

5．1　直交直線群

実軸，虚軸に平行な直線（直交直線群）を作成する（ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で）**.**

２点を結んだ直線をｔ：１－ｔに内分し、それら内分した点をｚとしたとき

z=x+yi とする．

その z を

$$f : z \to w = f(z) = \sin z$$

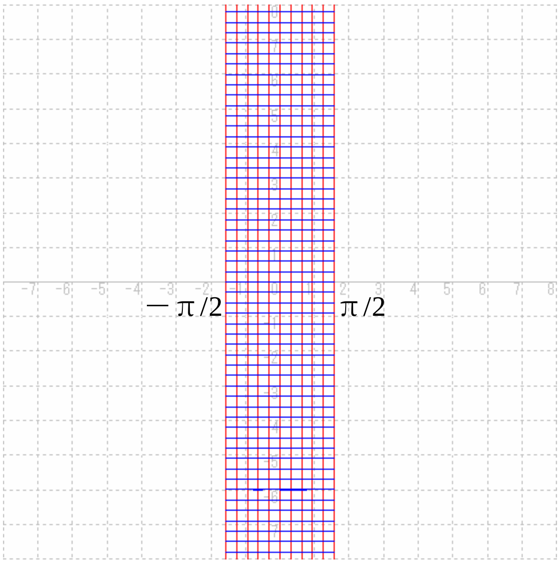
に写すプログラム．

```
OPTION ARITHMETIC complex
DECLARE EXTERNAL SUB segment
SET WINDOW -8,8,-8,8
DRAW grid
LET i=SQR(-1)
FOR j=-PI/2 TO PI/2 STEP 0.314
     CALL segment(j+10*i,j-10*i,2,3)
NEXT j
FOR m=-9 TO 9 STEP 0.3
     CALL segment(PI/2+m*i,-PI/2+m*i,2,3)
NEXT m
END
EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1,c2)
OPTION ARITHMETIC COMPLEX
LET i=SQR(-1)
LET  oldz=z1
LET  oldw=(EXP(i*oldz)-EXP(-i*oldz))/2*i
FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
     LET z=(1-t)*z1+t*z2
     SET LINE COLOR c1
     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
     LET w=(EXP(i*z)-EXP(-i*z))/2*i
```

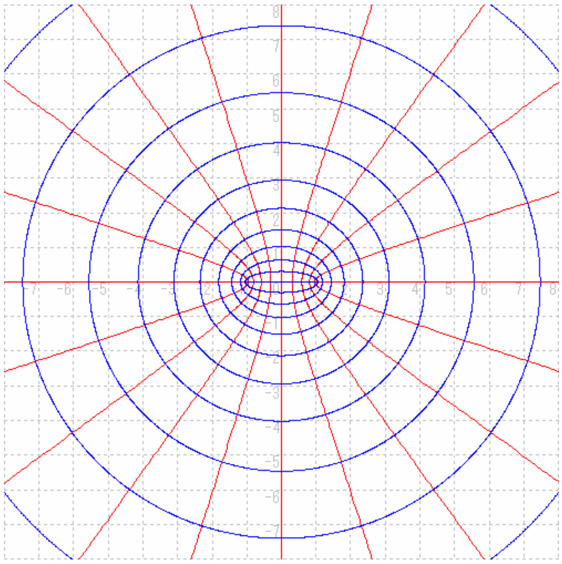
```
    SET LINE COLOR c2
    PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
    LET oldz=z
    LET oldw=w
NEXT t
END SUB
```

・z 平面上の直交直線群と，その逆 $w=\sin z$

Z 平面



W平面



i 実軸と平行な直線とその写った先　　　　ii 虚軸と平行な直線とその写った先

このように実軸と平行な直線では,

$y>0$ のような範囲に実軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $y>0$ に存在.

$m\geq 0$ のとき，写った先の図は虚軸の正の方向広がっていく.

$y<0$ のような範囲に実軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $y<0$ に存在.

$m<0$ のとき，写った先の図は虚軸の負の方向に m の値が小さくなるほど広がっていく.

虚軸と平行な直線では,

$0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$ のような範囲に虚軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $x>0$ に存在.

$j\geq 0$ のとき，j が 0 に近づくにつれて，写った先の図は実軸の正の方向から 0 に近づいて広がっていく.

$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のような範囲に虚軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $x < 0$ に存在.

$j < 0$ のとき，j が０に近づくにつれて，写った先の図は実軸の負の方向から０に近づいて広がっていく.

5．2 猫

媒介変数表示を用いて作成した放物線と，２点を１－ｔ：ｔに内分した点を結んで作った直線から猫を作成（ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で）し，点ｚを z=x+yi とする.

そのｚを，

$$f : z \to w = f(z) = \sin z$$

写像 f で写すプログラム.

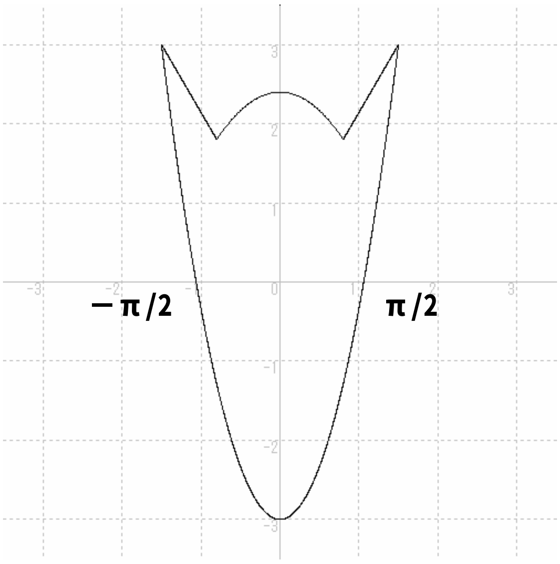
```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -10,10,-6,13
4 DRAW grid
5 LET i=SQR(-1)
6 LET oldz=-1.5+3*i
7 LET oldw=(EXP(i*oldz)-EXP(-i*oldz))/2*i
8 FOR t=-1.5 TO 1.5 STEP 0.001
9      LET x=t
10      LET y=8*t^2/3-3
11      LET z=x+y*i
12      LET w=(EXP(i*z)-EXP(-i*z))/2*i
13      SET LINE COLOR 1
14      REM  PLOT LINES :RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
15      SET LINE COLOR 2
16      PLOT LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
17      LET oldz=z
18      LET oldw=w
19 NEXT t
20 LET oldz=-0.8+1.8*i
```

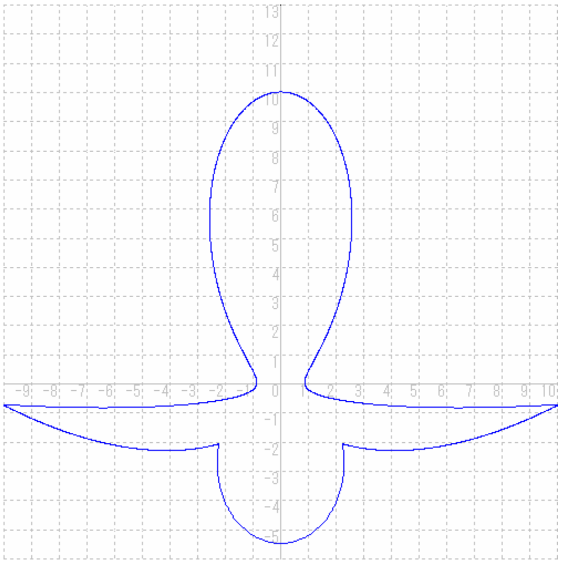
```
21 LET oldw=(EXP(i*oldz)-EXP(-i*oldz))/2*i
22 FOR t=-0.8TO 0.8 STEP 0.01
23     LET x=t
24     LET y=-15*t^2/16+2.4
25     LET z=x+y*i
26     LET w=(EXP(i*z)-EXP(-i*z))/2*i
27     SET LINE COLOR 1
28     REM PLOT LINES :RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
29     SET LINE COLOR 2
30     PLOT   LINES: RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
31     LET oldz=z
32     LET oldw=w
33 NEXT t
34 LET z1=-1.5+3*i
35 LET z3=1.5+3*i
36 LET z2=-0.8+1.8*i
37 LET z4=0.8+1.8*i
38 CALL segment(z1,z2,1,2)
39 CALL segment(z3,z4,1,2)
40 END
41 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1,c2)
42 OPTION ARITHMETIC complex
43 LET oldz=z1
44 LET oldw=(EXP(i*oldz)-EXP(-i*oldz))/2*i
45 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
46     LET i=SQR(-1)
47     LET z=(1-t)*z1+t*z2
48     LET w=(EXP(i*z)-EXP(-i*z))/2*i
49     SET LINE COLOR c1
50     REM   PLOT LINES :RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
51     SET LINE COLOR c2
52     IF ABS(oldw-w)<4 THEN
53         PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
54     END IF
55     LET oldz=z
56     LET oldw=w
```

```
57 NEXT t
58 END SUB
```

・**z 平面上の猫と，その逆** $w = \sin z$

Z 平面 **W平面**





逆三角関数

・$z = \arcsin w$ **について複素対数を用いて表示する．**

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$ **とすると，**

この方程式の解が，逆正弦関数となる．これは e^{iz} の 2 次方程式でその根は,

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

$$\therefore e^{iz} = iw \pm \sqrt{1 - w^2}$$

である．ゆえに，両辺に対数をとると，

$$\log e^{iz} = \log(iw \pm \sqrt{1 - w^2})$$

$$iz = \log(iw \pm \sqrt{1 - w^2})$$

$$z = -i \log(iw \pm \sqrt{1 - w^2})$$

である．ゆえに，

$$\arcsin w = -i\log(iw \pm \sqrt{1-w^2})$$

と表すことができる．

5．3　直交直線群（逆三角関数）

実軸，虚軸に平行な直線（直交直線群）を作成する．

２点を結んだ直線をｔ：１－ｔに内分し、それら内分した点をｚとしたとき
z=x+yi とする．

その z を

$$f : z \to w = f(z) = -i\log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

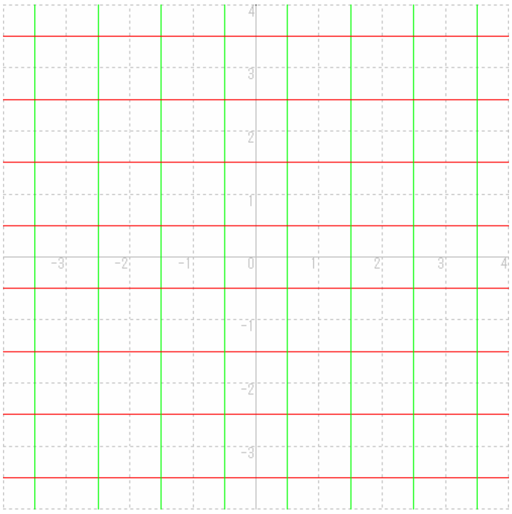
に写すプログラム．

```
1 OPTION ARITHMETIC complex
2 DECLARE EXTERNAL SUB segment
3 SET WINDOW -4,4,-4,4
4 DRAW grid
5 LET i=SQR(-1)
6 FOR j=-14.5 TO 14.5 STEP 1
7          CALL segment(j-15*i,j+15*i,3,3)
8          CALL segment(15+j*i,-15+j*i,4,4)
9 NEXT j
10 END
11 EXTERNAL SUB segment(z1,z2,c1,c2)
12 OPTION ARITHMETIC complex
13 LET oldz=z1
14 LET oldw=-i*LOG(i*oldz+SQR(1-oldz^2))
15 LET i=SQR(-1)
16 FOR t=0 TO 1 STEP 0.001
17     LET z=(1-t)*z1+t*z2
18     SET LINE COLOR c1
19     PLOT LINES : RE(oldz),IM(oldz);RE(z),IM(z)
20     LET w=-i*LOG(i*z+SQR(1-z^2))
21     SET LINE COLOR c2
22     IF ABS(oldw-w) < 1 THEN
23         PLOT LINES : RE(oldw),IM(oldw);RE(w),IM(w)
24     END IF
```

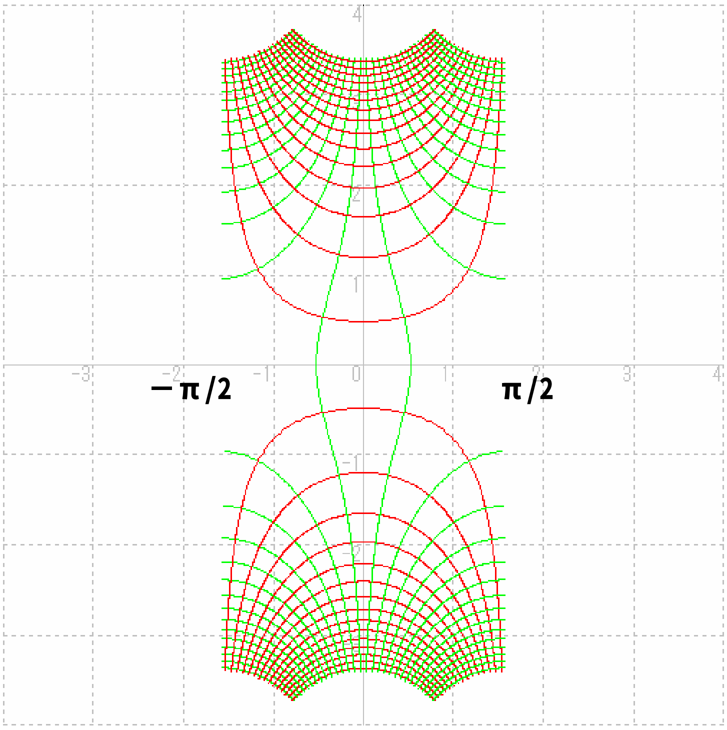
```
25      LET oldz=z
26      LET oldw=w
27 NEXT t
28 END SUB
```

- $z = \sin w$ **（直交直線群）と，その逆** $w = ars\sin z$

Z 平面



W平面



ⅰ実軸と平行な直線とその写った先　　　　　　　ⅱ虚軸と平行な直線とその写った先

このように実軸と平行な直線では,

$y > 0$ のような範囲に実軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $y > 0$ に存在.

$j > 0$ のとき，写った先の図は虚軸正の方向から０に向かう.

$y < 0$ のような範囲に実軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $y < 0$ に存在.

$j \leq 0$ のとき，写った先の図は虚軸の負の方向に j の値が０に近づくにつれて，写った先の図での０に近づく

・写った先の図は $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に存在.

虚軸と平行な直線では,

$x \geq 0$ のような範囲に虚軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $x \geq 0$ に存在.

$j \geq 0$ のとき，j が０に近づくにつれて，写った先の図は実軸の正の方向から０に近づいて広がっていく.

$x < 0$ のような範囲に虚軸に平行な直線群がある場合，写った先の図は $x < 0$ に存在.

$j < 0$ のとき，j が０に近づくにつれて，写った先の図は実軸の負の方向から０に近づいて広がっていく.

・これも上と同様に，写った先の図は $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に存在.

第６章　おわりに･･･

　今回の卒業研究では正則関数の表示をテーマに進めてきたが，１０進ＢＡＳＩＣの使い方などに手こずることもあり，あまり満足の出来るものに仕上がらなかった．しかし，終わったところまでは正則関数の写像を図に示すことによって，言葉だけではわかりずらいところも理解することが出来た．
　１次分数変換やジューコフスキー変換は，桂田研の後輩に託したいと思う．

本卒業研究を行うにあたり，熱心に御指導・御鞭撻下さいました桂田祐史助教授に深く感謝の意を表すと共に，厚く御礼申し上げます．

最後に，桂田祐史助教授の更なる御栄達，御健勝と研究室の更なる御発展を心よりお祈り致します．

１年半ありがとうございました．

付録　＜（仮称）十進ＢＡＳＩＣ＞とは？

　十進ＢＡＳＩＣは，文京大学の白石和夫氏によって作られた．
これは数学教育での利用を目的として，ＪＩＳ　Ｆｕｌｌ　ＢＡＳＩＣをWindows環境で実現することを目標に作られたもので，コンピューターを計算の道具として利用する人のためのプログラミング言語となっている．数の精度を１０進法で１０００桁に変更することができるので，数値計算には便利に使うことができる．
　他には，複素演算モードや有理数モードなどいろいろな範囲に拡張して使用することができる．私は，コンピューターのプログラミングといったものではまったくの初心者でしたが，１０進ＢＡＳＩＣは初心者の人にやさしく短期間で理解できるものでうまく利用することが出来た．今回の卒研レポートでは，複素演算モードを使っているのでみてください．

＜参考文献＞

（1）著者－E．ハイラー・G．ワナー，訳者－蟹江幸博
「解析教程　上」/　発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社

（2）著者－L．V．アールフォルス，訳者－笠原乾吉
「複素解析」/　発行所　現代数学社

（3）著者－青木利夫・樋口禎一,
「複素関数要論」/ 発行所　培風館

（4）著者－辻正次・小松勇作
「大学演習　函数論」/　発行所　裳華房