2次元Poisson方程式に対する有限

4年16組48番　南木 集

2005年2月21日

– Typeset by FoilTEX –

問題：2次元Poisson方程式 (Dirichlet境界条件＆Neumann境界条

次式を満たすuを求めよ。

$$-\Delta u = f \quad ((x,y) \in \Omega)$$
$$u(x,y) = g_1 \quad ((x,y) \in \Gamma_1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad ((x,y) \in \Gamma_2)$$

ただし、Ωは2次元領域、ΓをΩの境界、Γ_1, Γ_2はΓの一部
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$とし、$f, g_1, g_2$はそれぞれ$\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$で与えられた
$\boldsymbol{n}$はΓ_2上での外向き単位法線ベクトルである

弱形式の導出

vは $v = 0\ (on\ \Gamma_1)$ を満たす任意関数とする

Poisson 方程式(1) の両辺にvをかけ両辺をΩで積分する

$$-\iint_\Omega (\Delta u) v dx = \iint_\Omega f v dx$$

左辺を Green の公式を用いて計算すると

$$\iint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}) dx dy - \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} d\gamma = \iint_\Omega$$

Neumann境界条件と$v = 0$ (on Γ_1) より次式の弱形式を得る

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = \iint_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_2} g_2 v d\gamma$$

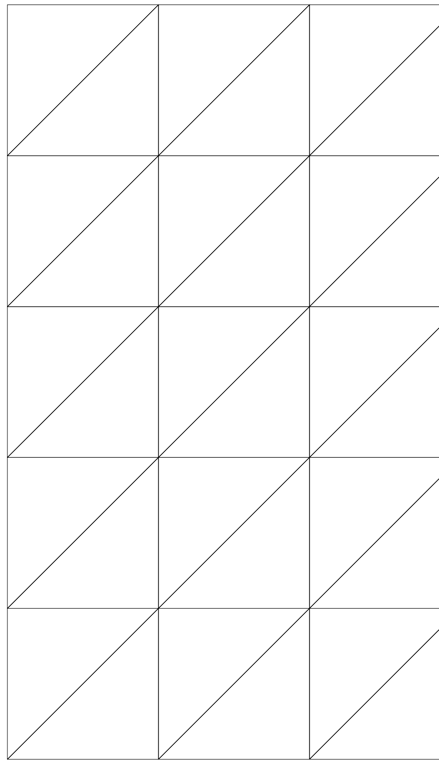
$$\begin{aligned} < u, v > &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \\ (u, v) &= \iint_\Omega uvdxdy \\ [g_2, v] &= \int_{\Gamma_2} g_2 v d\gamma \end{aligned}$$

という記号を導入すれば弱形式は

$$< u, v >= (f, v) + [g_2, v] \qquad \text{となる}$$

有限要素分割

領域を有限個の小領域に分割する
各小領域を要素と呼ぶ



要素の頂点を節点と呼ぶ

右図の場合各要素の節点の個数は3個

近似関数

各要素内における近似関数の形を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をパラメータと

$$\hat{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

とする。すなわち $\hat{u}$ は x, y の1次式である。

要素間の連続性を保障するため要素［ｅ］の節点における近
点パラメータとして用いる。このとき次式が成立する

$$\text{節点ｉで} \qquad \hat{u} = u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad (1 \leq$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(i,j,k) を $(1,2,3)$ の偶置換として a_i, b_i, c_i を次のように置く

$$
a_i = \frac{x_jy_k - x_ky_j}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad , \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad , \quad c_i =
$$

a_i, b_i, c_i を用いると $\hat{u}$ は次式で書ける

$$\text{要素[e]で} \quad \hat{u} = \sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} L_i u_i$$

ただし、 $L_i = a_i + b_i x + c_i y$
各要素内では x, y の1次式で、領域 Ω では連続な区分多項式
れた

Dirichlet 境界条件の近似については対応する境界上の節点
を関数 $g_1 \quad (on\ \Gamma_1)$ の値に等しくする。

$\hat{v}$ も同様に $\hat{v} = 0 \quad (on\ \Gamma_1)$ を満たすように構成する

要素係数行列の計算

$$< u, v >_{e_k} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{e_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \quad , \quad (f, v)_{e_k} \stackrel{\text{d}}{=}$$

という記号を用いれば要素数N、要素をe_k $(1 \leq k \leq N)$ と
$< \hat{u}, \hat{v} > = (f, \hat{v}) + [g_2, v]$ は次式になる

$$\sum_{k=1}^{N} < \hat{u}, \hat{v} >_{e_k} = \sum_{k=1}^{N} (f, \hat{v})_{e_k} + [g_2, \hat{v}]$$

$< \hat{u}, \hat{v} >_{e_k}, (f, \hat{v})_{e_k}$ を計算する

$$\begin{aligned} < \hat{u}, \hat{v} >_{e_k} &= < \sum_{j=1}^{3} u_j L_j, \sum_{i=1}^{3} v_i L_i >_{e_k} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_i < \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_i A_{ij}^{(e_k)} u_j \end{aligned}$$

$$(f, \hat{v})_{e_k} = (f, \sum_{i=1}^{3} v_i L_i)_{e_k} = \sum_{i=1}^{3} v_i (f, L_i)_{e_k} = \sum_{i=1}^{3} v$$

ただし、

$$A_{ij}^{(e_k)} =< L_j, L_i >_{e_k} \quad , \quad f_i^{(e_k)} = (f, L_i)_{e_k} \quad (1 \leq$$

次のベクトルと行列を定義する

$$\boldsymbol{u}_{e_k} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{e_k} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{e_k} = \begin{pmatrix} f_1^{(e_k)} \\ f_2^{(e_k)} \\ f_3^{(e_k)} \end{pmatrix}$$

$$A_{e_k} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(e_k)} & A_{12}^{(e_k)} & A_{13}^{(e_k)} \\ A_{21}^{(e_k)} & A_{22}^{(e_k)} & A_{23}^{(e_k)} \\ A_{31}^{(e_k)} & A_{32}^{(e_k)} & A_{33}^{(e_k)} \end{pmatrix}$$

すると A_{e_k} は対称行列で

$$< \hat{u}, \hat{v} >_{e_k} = \boldsymbol{v}_{e_k}^T A_{e_k} \boldsymbol{u}_{e_k} \quad , \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \boldsymbol{v}_{e_k} \boldsymbol{f}_{e_k}$$

直接剛性法

Ω に節点番号を与え節点数を m 個とする。前ページで与え
m 次元に拡大する

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad \text{とおく}$$

有限要素 e_k $(1 \leq k \leq N)$ を 1 つ取って考える。e_k の局所的
に対して Ω の全体節点番号をそれぞれ i, j, k が対応してい

次のベクトル、行列を定義する。

$$\boldsymbol{f}_k^* = (0\ldots0f_10\ldots0f_20\ldots0f_30\ldots0)^T$$

f_1は第i成分、　f_2は第j成分、　f_3は第k成分

$$A_k^* = \left(\begin{array}{cccccc} \cdots & & & & & \\ & A_{11}^{(e_k)} & \cdots & A_{12}^{(e_k)} & \cdots & A_{13}^{(e_k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{21}^{(e_k)} & \cdots & A_{22}^{(e_k)} & \cdots & A_{23}^{(e_k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & A_{31}^{(e_k)} & \cdots & A_{31}^{(e_k)} & \cdots & A_{33}^{(e_k)} \\ \cdots & & & & & \end{array}\right.$$

示していない成分はすべて0

この記号を用いると　$< \hat{u}, \hat{v} >= \boldsymbol{v}^T A_k^* \boldsymbol{u} \quad (1 \le k \le N)$

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}^T A_k^* \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{f}_k^*$$

v が $v = 0 \quad (on\ \Gamma_1)$ を満たす任意関数であることを考えると
にくる節点番号の行を除いた

$$A^{**} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{**} \qquad \text{が成立する}$$

ここで $N_k \quad (1 \le k \le N)$ を節点番号とすると

$$\begin{aligned} A^{**} &= A^* \text{の第} k \text{行} (N_k \in \Gamma_1 \text{なる} k) \text{を除いた行列} \\ \boldsymbol{f}^{**} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{f}_k \ \text{の第} k \text{成分} (N_k \in \Gamma_1 \text{なる} k) \text{を除い} \end{aligned}$$

またΓ_1上では$\hat{u} = g_1$（既知）であるから、これを代入して
列ベクトルで$A^{**} = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_N)$と表示すると

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{a}_k u_k = \boldsymbol{f}^{**}$$

左辺をΓ_1に属す部分と属さない部分に分解して移行すると

$$\sum_{N_k \notin \Gamma_1 \text{なる} i} \boldsymbol{a}_i u_i = f^{**} - \sum_{N_k \in \Gamma_1 \text{なる} i} \boldsymbol{a}_i u$$

これより

$$A\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{f}$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= A^{**}\text{から第}\,i\,\text{列}\,(N_k \in \Gamma_1\text{なる}\,k)\,\text{を除いた正} \\ \boldsymbol{u}^* &= \boldsymbol{u}\text{から第}\,k\,\text{成分}\,(N_k \in \Gamma_1\text{なる}\,k)\,\text{を除いた縦} \\ \boldsymbol{f} &= f^{**} - \sum_{N_k \in \Gamma_1\text{なる}\,k} \boldsymbol{a}_i u_i \end{aligned}$$

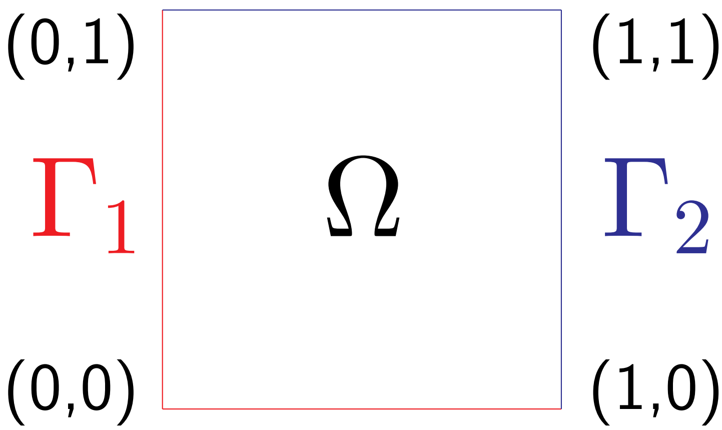
この方程式が解くべき方程式である

数値実験

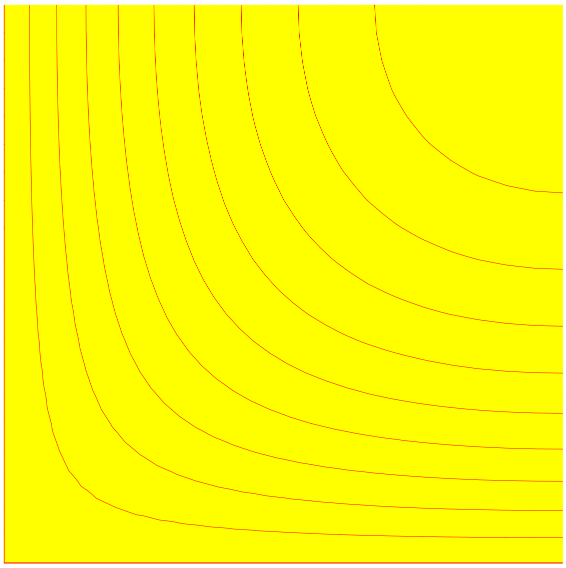
実際に数値実験をした問題は

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 1 \quad ((x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0, \\
u(x,y) &= 0 \quad ((x,y) \in \Gamma_1) \\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= 0 \quad ((x,y) \in \Gamma_2)
\end{aligned}
$$

ただし、Γ_1 は $x = 0$ または $y = 0$ で与えられる 2 辺、Γ_2 は x
与えられる 2 辺とする



実験結果:等高線



有限要素法とは

- 問題の微分方程式に対する弱形式を求める
- 領域Ωを任意の有限個(n個)の小領域(要素)$\hat{\Omega}_i$に分割

$$\Omega \cong \bigcup_{i=1}^{n} \hat{\Omega}_i$$

- 各要素において近似関数を構成し弱形式への寄与分を求め
り全体的な近似方程式を構成する
- 得られた連立1次方程式を数値的に解く。得られた値が有