2003 年度　卒業研究レポート

音の Fourier 解析

~ いろいろな楽器の波形 ~

松山　周五郎

2004 年 2 月 27 日

目 次

1 イントロ ~準備として~ **3**

2 音階について **4**

3 音をどのように録音したか **5**

4 Fourier 級数の復習 **6**

5 離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform) **7**

6 今回分析したデータ **8**

7 Mathematica について **8**

8 実験開始 (周期の測定) **9**
8.1 実際に採取した音について 10
8.2 文献 [2] 楽器の音データ ~ はたして音は聞けるのだろうか？ ~ . . . 15

9 基本周波数 (n=1) の求め方の裏づけ **18**

10 実験結果 **21**
10.1 採取した音 21
10.2 文献 [2] W.R. ベネット (1983) の楽器の音データ 33

1　イントロ ~ 準備として ~

バイオリンの弦を垂直方向に弾けば弦は振動する。その振動を支配する方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}} \end{cases} \tag{1}$$

であることが知られている。

ただし、t は時間変数、x は区間 $[0, l]$ の点座標であり、$u = u(t, x)$ は点 x の時刻 t における垂直方向への変位である。T は弦の張力 (ニュートン)、ρ は弦の線密度、c は物理的な定数であるが、特にバイオリンの弦の締め方による。

長さ l の弦が両端で固定されている境界条件

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0 \qquad (t \geqq 0) \tag{2}$$

の下で Fourier の変数分離法で解くときに現れる固有値は、

$$\lambda_n = \frac{n^2 c^2 \pi^2}{l^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

をとることであり、これに対応する周波数 f_n は

$$f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{nc}{2l} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

である。

・$n = 1$ の振動 (基本周波数) は音の高さを決めるパラメータとして支配的となる。

・$n \geqq 2$ の振動 (倍音) はその重み付けによって波形が変わり (Fourier 級数)、ギターやピアノなどの音色をきめる。

実際、楽器の音を鳴らし続けたとき、その波形はどのようになっているのだろうか？例えば、小学校の音楽の時間などで使ったリコーダーを吹き始めて少し時間がたてば、一定の音が繰り返されているように感じる。一方で、ピアノの音は鍵盤を叩いた瞬間は強い音がするが、その後は音が弱くなっていく。楽器によって、基本周波数、倍音成分はどのような特徴があるのだろうか？実際に採取した生の楽器の音を解析してみよう。

2　音階について

音楽で使う音の高さを世界共通で扱うために決めた特定の周波数を標準高度と呼ぶ。19 世紀末からはオクターブ 4 の音を 435Hz とする標準高度が代表的に使われるようになった。そして、よく知られているピアノの鍵盤下のドの音はオクターブ 4 のドと呼ばれている。周波数は約 261Hz である。そして 1 オクターブ上のドの音はその 2 倍の 522Hz である。ではド ~ 1 オクターブ上のドまで 1 オクターブ内の、ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ドの音階はどのように決められているのか？３つの手法を紹介する。この節は参考文献 7 を参考にした。

(1)　ピタゴラス音律 (弦の長さの整数比をもとに)

→ 音の周波数、波長が簡単な整数比になるように音階を定めた。

その昔、ピタゴラスが鍛冶屋の前を通りかかったとき、カン、キン、カン、コンと打ち鳴らされているハンマーの音が調和するように聞こえてきた。そこで、何か関連があるのではないかと考え、ピタゴラスはその鍛冶屋のハンマーを調べてみた。その結果、各々のハンマーの質量比が簡単な整数比になっていることを発見した。ピタゴラスは鍛冶屋で得たヒントをもとに各々の音の弦の長さを整数比で表し完全なものにしようとした。現在のド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ド、に相当する音階があり、弦楽器には音階に応じた長さの弦を張ったのです。それによって得られたものがピタゴラス音律と呼ばれるものです。その周波数の比は

$$\begin{aligned} \text{ド} : \text{レ} &= 2 : 1 \\ \text{ド} : \text{ミ} &= 81 : 64 \\ \text{ド} : \text{ファ} &= 4 : 3 \\ \text{ド} : \text{ソ} &= 3 : 2 \\ \text{ド} : \text{ラ} &= 27 : 16 \\ \text{ド} : \text{シ} &= 243 : 128 \\ \text{ド} : \text{上のド} &= 2 : 1 \end{aligned}$$

ピタゴラスは 2 と 3 のベキ乗でできる比で周波数を分配し、5 以上の素因数を含む整数比で表すことはなかった。ピタゴラス音階は１５世紀まで使われていた。

(2)　純正律 (自然音律)

・１６世紀の中頃、ツァルリーノが定めたものである。ピタゴラス音律は 2 と 3 だけの素数からできる整数比の音律ですが、ツァルリーノはあと一つ 5 とい

う素数を含めて、2 と 3 と 5 素数からできる整数比で音律を作ることを提案した。これが純正律 (自然音律) と呼ばれています。
その周波数の比は

$$\text{ド} : \text{レ} = 9 : 8$$
$$\text{ド} : \text{ミ} = 5 : 4$$
$$\text{ド} : \text{ファ} = 4 : 3$$
$$\text{ド} : \text{ソ} = 3 : 2$$
$$\text{ド} : \text{ラ} = 5 : 3$$
$$\text{ド} : \text{シ} = 15 : 8$$
$$\text{ド} : \text{上のド} = 2 : 1$$

(3)　十二平均律

→ ド ~ ドまでの 1 オクターブを 12 等分して周波数が等比数列になるように音階を定めた。

・15 世紀初め　シモン・ステヴィンという数学者が定めたものである。1 オクターブを 12 等分して、ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ド、そして # (半音あがった音) の音階をそれらのどれかにあてはめたものです。音程が 1 オクターブ上がるというのは、周波数が 2 倍になるということなので、2 を指数関数的に 12 等分し

$$1, \quad 2^{\frac{1}{12}}, \quad 2^{\frac{2}{12}}, \quad 2^{\frac{3}{12}}, \cdots, 2^{\frac{10}{12}}, \quad 2^{\frac{11}{12}}, \quad 2$$

としたものが十二平均律の周波数比になります。つまり、半音ずつの振動数の並びは等比数列的に並んでいることになります。

現在一般的によく使われているのは (３) の音階であるが、1 オクターブ内に 12 個の音を作っているのはなぜだろうか？実際、1 オクターブを五十三等分して作ったピアノがあるのだが、1 オクターブの間に 53 個の鍵盤があるのだから大変だ。昔から発展してきた音楽はだんだん人間の感性に合うように 12 音のなったのである。

3　音をどのように録音したか

市販のマイクをパソコンのラインインにつなぎ、Windows XP の
「アクセサリ→エンターテイメント→サウンドレコーダー」

で WAVE ファイルにレコーディングした。現在のパソコンでは音をデジタル信号を数値化 (サンプリング) して記録して電気的な信号に変換された音声を数値化する。音声をデジタルデータに変換する方式の一つで PCM (Pulse Code Modulation) という。
オーディオ形式については、サンプリング周波数 (1 秒間に何回測定するか)、量子化ビット数 (測定に使用する目盛りの細かさ) というものがある。アナログ信号からデジタル信号への変換 (AD 変換) の際に、信号を何段階の数値で表現するかを示す値。この値が高いほど、元の信号に忠実なデータが得られるが、データ量はその分増大する。

例えば量子化ビット数が 8 ビットの場合は、得られた信号を 0 ~ 255 の 256 段階の数値で表現する。これが 16 ビットになると 0 ~ 65535 の 65536 段階で表現するため、8 ビットの場合よりも細かい違いを表現できる。

例えば、サンプリング周波数 $f = 44100$、一秒間に 44100 回のデータを記録するということである。サンプリング周波数が高いと高い音が記録できる。

参考

普通の音楽 CD： $f = 44.1\text{kHz}$ くらい。
人間は：$f = 20\text{Hz} \sim 20\text{kHz}$ くらいまでの音を聞くことができる。
電話は：$f = 8\text{kHz}$ くらい

4 Fourier 級数の復習

実際の音の信号を Fourier 級数展開して音の解析をしたい。その準備として、Fourier 級数の復習をする。

適度な滑らかさを持つ周期 T の関数 u:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は次のように級数展開できる。

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n t}{T}\right)$$

ただし、c_n はフーリエ級数とする。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp\left(-\frac{2\pi i n t}{T}\right)\,dt \tag{5}$$

周波数 $\frac{n_0}{T}$ に対応するのは、$n = \pm n_0$ の項である。

5　離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform)

信号の離散的なデータから近似的でもよいから Fourier 級数をもとめる。
u が周期 T の関数であるとする。
$N \in \mathbb{N}$ を固定して、

$$\omega = \omega_N := \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$$

さらに $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$t_j := j\frac{T}{N}, \quad u_j := u(t_j)$$

とおく。フーリエ級数 c_n の定義式の定積分を台形公式で近似したものを離散フーリエ級数 C_n とおくと、

$$C_n = \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} u(t_j)\exp\left(\frac{-2\pi in}{T}t_j\right)\frac{T}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\omega^{-jn}u_j \tag{6}$$

が成り立つ。C_n も n について周期 N の数列である。この式に変換することを離散フーリエ変換 (**Discrete Fourier Transform,DFT**) と呼ぶ。

逆に

$$u_j = \sum_{j=0}^{N-1} C_n\omega^{jn} \tag{7}$$

も成り立つ。(7) を (6) の式に対して逆離散フーリエ変換と呼ぶ。

(参考) 台形公式

台形公式とは、

$$\int_0^T U(t)dt \fallingdotseq \left(\frac{1}{2}U(0) + \sum_{j=1}^{N-1}(t_j) + \frac{1}{2}U(T)\right)\frac{T}{N} \tag{8}$$

と近似するものである。これは小区間 $[t_j, t_{j+1}]$ で次の近似をしたものである。

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} U(t)dt \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(U(t_j) + U(t_{j+1})\right)\frac{T}{N}$$

・周期関数では $U(0) = U(T)$ なので、台形公式は

$$\int_0^T U(t)dt \fallingdotseq \sum_{j=0}^{N-1} U(t_j)\frac{T}{N} \tag{9}$$

周期関数の 1 周期の積分は台形公式で非常に高精度の求まることが知られている。

6 今回分析したデータ

1. 独自に採取した生楽器のオリジナル音

   ・Windows のサウンドレコーダーを使用
   ・サンプリング周波数 44.1kHz ・量子化ビット数 16 ビット
   ・４種類の楽器のドの音、１オクターブ上のドの音
   (ピアノ、バイオリン、リコーダー、トランペット)

2. 文献 [2] W.R. ベネット (1983) の楽器の音データ

・あまり見かけない楽器について正確な波形データが集められている。
→ このデータはコンデンサーマイクロホンの電圧を測定し、高速の A-D 変換器を用いて得られた。

7 Mathematica について

では音色の周波数解析をどのように行なったのだろうか？WAVE ファイルにレコーディングしたものを Mathematica という数式処理ソフトを使用 (文献 [5]) し

て読み込んだ。今回使用した機能については以下の通りである。

1. グラフィクスと同様にサウンド (音) も扱える。

(1) データをインポートするには

`Import["ファイル名"]`

WAVE ファイル等の音楽データを読み込みファイルをインポートして Mathematica の式に変換する。

(2) 信号のデータを音にするには

`ListPlay["リスト"]`

数値の並んだリストのデータを音として聞くこともできる。

2. 離散フーリエ変換 (DFT) も扱える。

(3) 離散フーリエ変換 (DFT) するには

`Fourier["リスト"]`

$\{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ を並べたリストを $\{C_j\}_{j=0}^{N-1}$ を並べたリストに返す。

ここまでが音の信号を解析する準備段階です。

8 実験開始 (周期の測定)

・楽器の信号を 1 秒間 (サンプル 44100 個) 取り出す。
1 秒間のサンプル $\{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ を離散フーリエ変換 (DFT) した $\{C_j\}_{j=0}^{N-1}$ を求める。
周期 T を求めるのは、

$$\sqrt{|C_j|^2 + |C_{N-j}|^2} = \sqrt{2}|C_j|$$

を極大とする j をさがす。周期 $T = \dfrac{1}{j}$ となる。

8.1　実際に採取した音について

・(例) バイオリンの音

< サンプリング周波数 44.1kHz ・量子化ビット数 16 ビット・ステレオ >

・では実際に Mathematica を使って実験してみよう。

1. ファイルに読み書きには作業フォルダを変更する必要がある。

```
SetDirectory["C:\Documents and Settings\User\Sotsuken"]
```

2. ”violin.wav”のファイルをインポート。

```
snd = Import["violin.wav"];
```

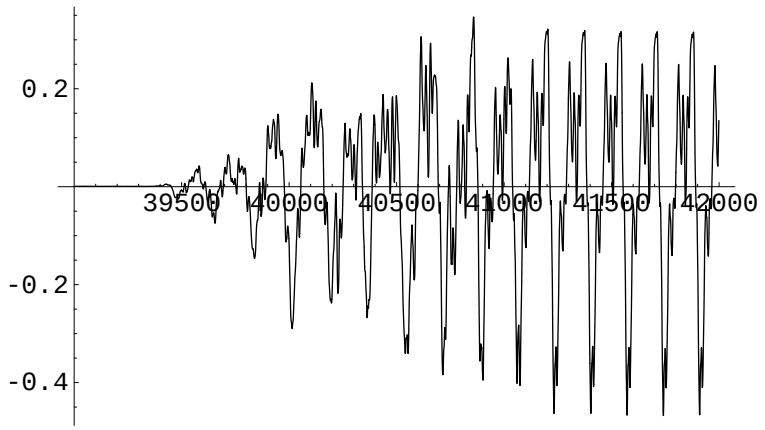
3. インポートした信号の入ったリストを得る。

```
tbl = snd[[1, 1, 1]];
```

4. バイオリンの最初の一秒間 (リストの長さ 44100 個) の波形の一部を見てみよう。

```
tb = Take[tbl, {1, 44100}];
g = ListPlot[tb, PlotRange -> All];
```

(バイオリンの最初の一秒間のグラフ)

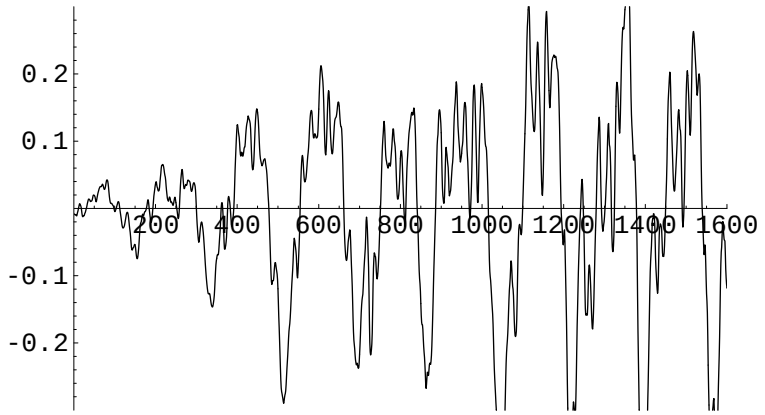


44100 個のサンプルの中で、39500 番目付近から振幅が大きくなっている。したがって振動がその付近から始まったといえる。録音を開始してからバイオリンを弾きひきはじめたからだと考えられる。楽器の信号のなかで、波が始まって十分強く、雑音のないところを 1 秒間取り出そう。このバイオリンのデータの場合は、(39500 ~) 番目から一秒間取り出すことにした。

5. バイオリンの音が鳴りだしてから 1600 個のサンプルの波形を見てみよう。

```
tb = Take[tbl, {39501, 39501+44100-1}];
ListPlot[tb, PlotJoined -> True,
PlotRange -> {{1, 1600}, {-0.3, 0.3}}
```

(バイオリンの 1600 個のサンプルの波形)



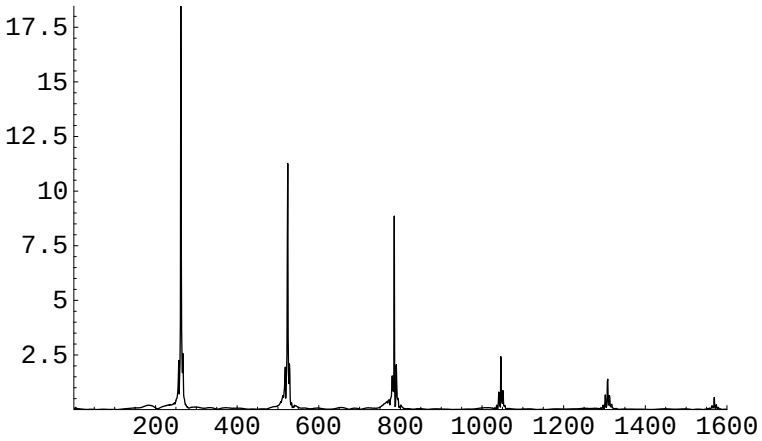
6. 音が鳴り出してから 1 秒間の信号を DFT して、得られた C_j の最初の 1600 個を見てみよう。

```
c = Fourier[tb];
g = ListPlot[Abs[c],
graph[c, c1_, c2_] :=
  ListPlot[Abs[c], PlotJoined -> True,
    PlotRange -> {{c1, c2}, {0, Max[Abs[c]]}}]
```

と定義しておけば、

```
 graph[c, 1, 1600]
```

(バイオリンを DFT した 1 ~ 1600 個)

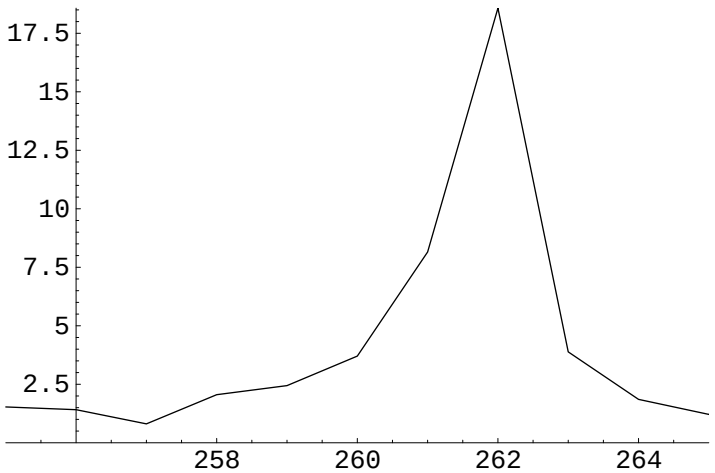


・等間隔でピークをむかえているようにみえる

7. ピークの一つが 200 ~ 300 付近に出ている。そこでさらにレンジをしぼってみよう。

```
graph[c, 250, 265]
```

(バイオリンの 250 ~ 265 個のリストの DFT した波形)



・フーリエ変換のあとのグラフのピークは振動数に対応してる

8. 一秒間のサンプルのなかでピークをむかえているのは 262 番目付近だ …

文献 [4]:Mathematica の冒険『フーリエ解析入門』

・上の図は Mathematica の Fourier 関数をそのまま利用した。Mathematica の Fourier 関数は最初のデータを 1 ではなく 0 から数えるので 1 ずれているのだ。

したがって 1 ずれた値を考慮して、このバイオリンの信号は、を約 **261Hz** といってよい。よってバイオリンの周期

$$T = \frac{1}{261} = 0.00383142(s)$$

コメント ; このバイオリンの音は約 261Hz だからドの音に相当する。つまり音階がわからなくても離散フーリエ変換 (DFT) すれば音の高さがわかってしまうわけだ。

$\mathrm{Max}\sqrt{|C_j|^2 + |C_{N-j}|^2} = \sqrt{2}|C_j|$ をさがすには。

```
FindMax[c_] := (imax = 1; max = c[[1]];
For[i = 1, i <= Length[c], i++,
If[c[[i]] > max, {max, imax} = {c[[i]], i}]]; {imax, max})
```

と関数を定義しておけば、

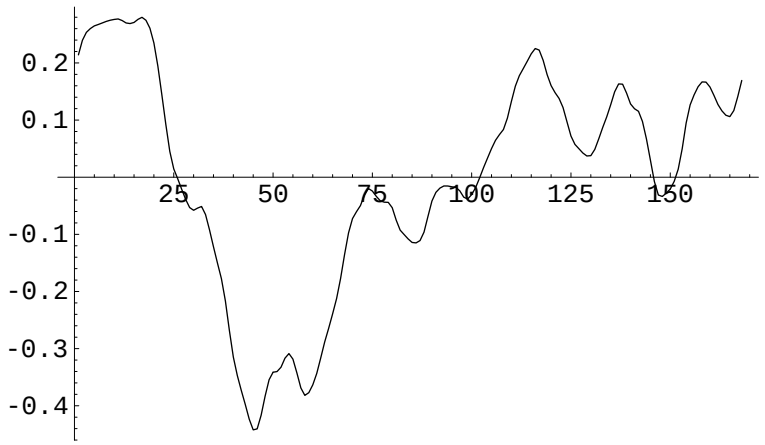
```
FindMax[Abs[c]]
{262, 18.4701}
```

*ところで、なぜ $\sqrt{|C_j|^2 + |C_{N-j}|^2} = \sqrt{2}|C_j|$ を極大とする j 番目を探せば、周波数が求まるかは後の章でふれることにする。

9. 1 周期分のデータを取り出すこともできる。

```
smprate = 44100;   freq = 261;   t = 1/freq;
n1 = 39501;       n = Floor[t*smprate];
tb2 = Table[tb[[i + n1]], {i, 1, n}];
ListPlot[tb2, PlotJoined -> True]
```

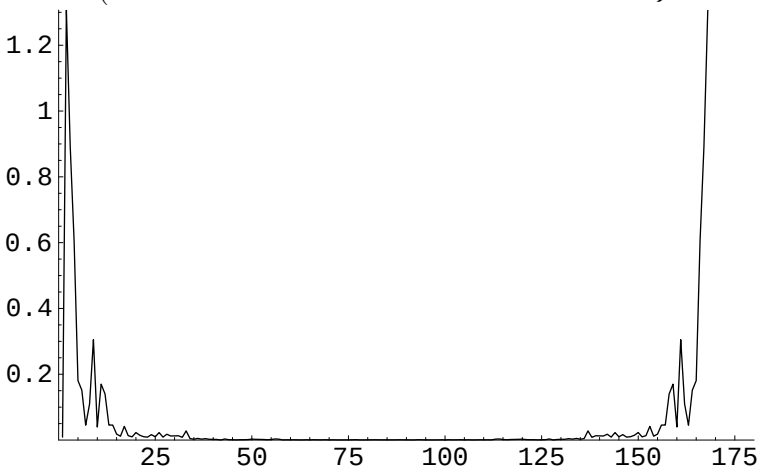
(バイオリンの 1 周期分の波形)



10. バイオリンの 1 周期分を DFT した波形を見てみよう。

```
tb4 = Fourier[tb2]; tb5 = Abs[tb4];
PlotRange -> {{0, 180}, {0, Max[tb5]}}
```

(バイオリンの 1 周期分を DFT した波形)

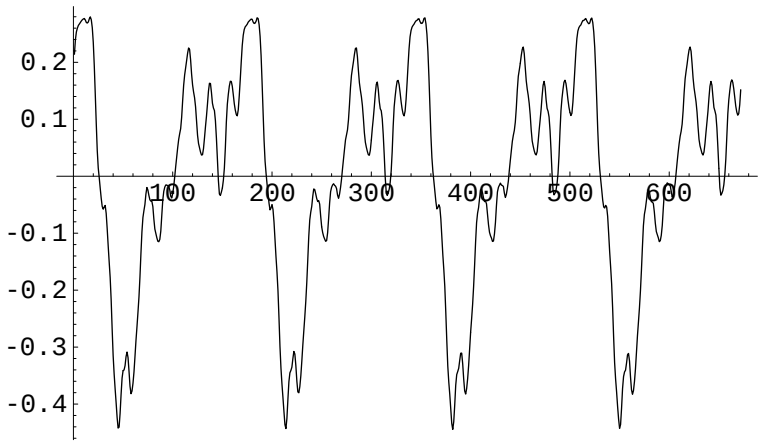


11. 4 周期分データを取り出すには

```
n = Floor[t*smprate*4];
```

とする。

(バイオリンの 4 周期分の波形)



8.2　文献 [2] 楽器の音データ ~ はたして音は聞けるのだろうか？ ~

文献 [2]W.R. ベネットに記載されている楽器についての正確な 1 周期分のデータをサウンド化することを目標とする。**BACH TRUMPET** の 1 周期分の音データを例とする。データ関しては 1 番目が楽器の名前、2 番目が周波数、3 番目がリストの数、4 番目以降が音の信号である。
BACH TRUMPET < サンプリング周波数 10.409kHz ・モノラル >

”bach-trumpet.txt”597.672Hz　168 データ

```
{BACH TRUMPET,597.672,168,-5, 97, 195, 280, 367, 450, 530, 610,
680, 755, 807, 857, 898, 935, 967, 982, 997, 1000, 995, 987,
965, 940, 910, 875,835, 797,742, 695, 637, 585, 527, 475, 417,
357,302, 247, 187, 130,85,7, -10, -50, -80, -110, -140, -160,
-180, -193, -203, -200,-200,-193, -170, -155, -130, -93, -55,
 -12, 35, 77, 125, 177, 227,277, 325, 367, 408, 450,490, 517,
545, 567, 580, 587, 590, 590, 580, 560, 540, 515, 485, 450,
408, 367, 327,285, 240, 190, 147, 97,55, 15, -35, -65, -100,
-133, -155, -180, -200, -215, -230, -233, -245, -245, -242,
-245, -242, -240, -238, -235, -238, -235,-235, -242, -253,
-260, -265, -282, -300, -320, -343, -363, -390, -413, -440,
-463, -490, -513, -535, -557, -583, -603, -623, -643, -660,
-680, -690, -715, -733, -753, -773, -793, -810, -830, -845,
-857, -873, -875, -875, -882, -873, -870, -857, -835, -810,
-785, -755, -720, -673, -623, -563, -500, -433, -355, -272,
-193, -110, -5}
```

・同じように Mathematica で音を聞いてみよう。

1. 同じようにファイルに読み書きに作業フォルダを変更する。

```
SetDirectory["C:\Documents and Settings\User\Sotsuken"]
```

2. ”bach-trumpet1.txt”のファイルを読み込む。

```
L = ReadList["bach-trumpet.txt"][[1]]
```

3. 1 番目から 3 番目の音のデータ以外のものを削除する。

```
S = Drop[L, {1, 3}];
```

4. 1 周期分のデータを 100 個つなげる。1 周期分のデータ

```
M = {}
For[i = 0, i < 100, i++, M = Join[M, S]];
```

5. 音をならしてみよう。

   サンプル周波数は
   597.672Hz × 168 個 = 100409Hz

```
snd = ListPlay[M, SampleRate -> Floor[L[[2]]*L[[3]]]]
```

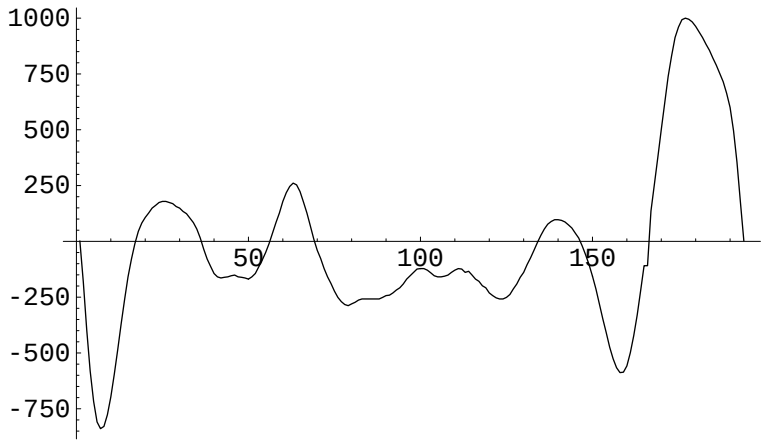
6. データをファイルへエキスポートして、WAVE ファイルの形式に変換する。

```
Export["bach-trumpet.wav", snd]
```

7. BACH TRUMPET の 1 周期分の波形をみてみよう。

```
s = Import["bach-trumpet.wav"]
tbl = s[[1, 1]];
ListPlot[S, PlotJoined -> True]
```

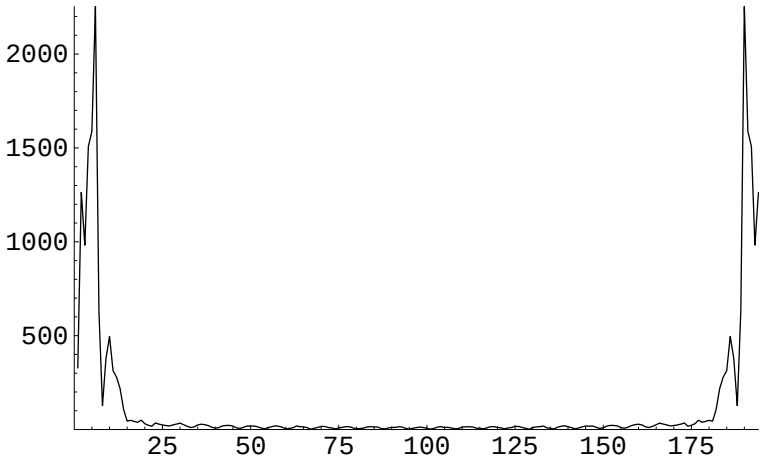
(BACH TRUMPET の 1 周期分の波形)



8. BACH TRUMPET の 1 周期分の DFT してグラフ化したもの。

```
c = Fourier[S];
d = Abs[c];
ListPlot[d, PlotJoined -> True,
 PlotRange -> {{0, Length[c]}, {0, Max[d]}}]
```

(BACH TRUMPET の 1 周期分を DFT した波形)



9　基本周波数 (n=1) の求め方の裏づけ

正弦波

$$u(t) = \exp(2\pi i f t) \tag{10}$$

を考える。
時間 T で記録して Fourier 級数展開する。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp(2\pi i n t)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \exp(2\pi i f t)\exp(2\pi i n t)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{2\pi i t(f-\frac{n}{T})\}dt \end{aligned} \tag{11}$$

ここで

$$A = A_n = 2\pi(f - \frac{n}{T})$$

とおくと

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp(iA_n t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1}{iA_n}[\exp(iA_n t)]_0^T$$

$$= \frac{1}{iA_n T}\{\exp(iA_n t) - 1\}$$

したがって

$$|C_n| = \frac{1}{|A_n|T}|\exp(iA_n t) - 1|$$

$$= \frac{1}{|A_n|T}|\cos A_n T + i\sin A_n T - 1|$$

$$= \frac{1}{|A_n|T}\sqrt{(1-\cos A_n T)^2 + \sin^2 A_n T}$$

$$= \frac{1}{|A_n|T}\sqrt{2(1-\cos A_n)}$$

ところで

$$(1-\cos A_n T) = 2\sin^2\frac{A_n T}{2}$$

より

$$|C_n| = \frac{1}{|A_n|T}\cdot 2\left|\sin\frac{A_n T}{2}\right| \tag{12}$$

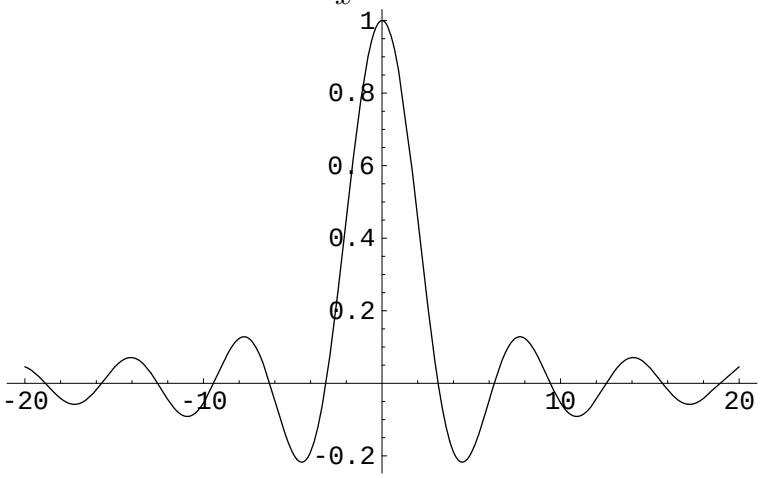
よって

$$|C_n| = \left|\frac{\sin\dfrac{A_n T}{2}}{\dfrac{A_n T}{2}}\right| \tag{13}$$

ではここで $y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフを考えてみよう。

$y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ

($y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ)



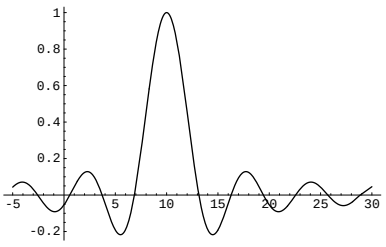
$x = 0$ で最大となる。

したがって (11) の A_n つまり $|f - \dfrac{n}{T}|$ がもっとも小さくなるとき、$|C_n|$ が最大となる。

$$\therefore \quad f \fallingdotseq \frac{n}{T}$$

$y = \dfrac{\sin(x-10)}{x-10}$ のグラフ

($y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフ)

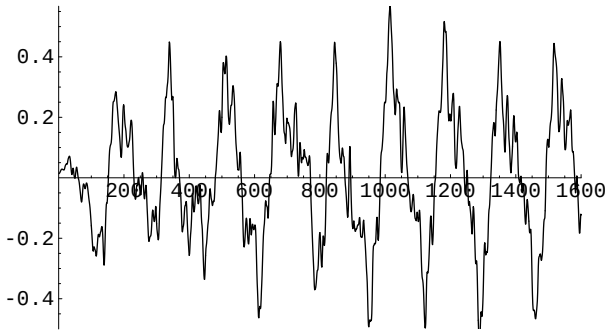


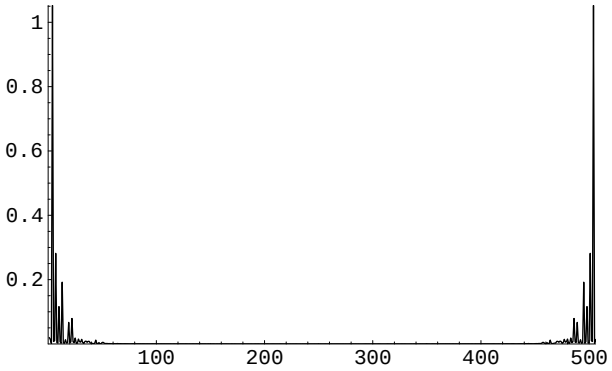
$x = 10$ で最大となる。

10　実験結果

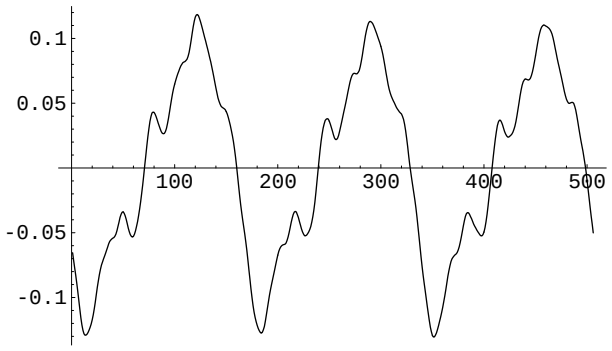
10.1　採取した音

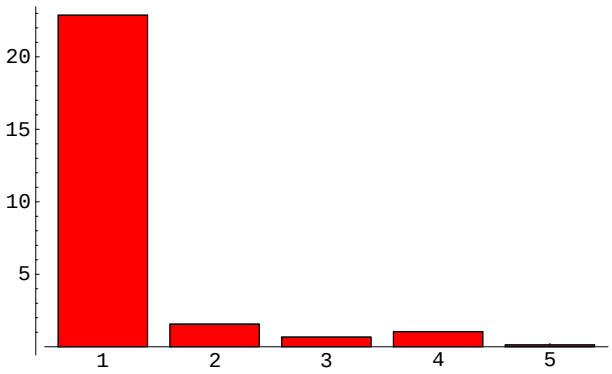
(a) ピアノのドの音 (f=261)





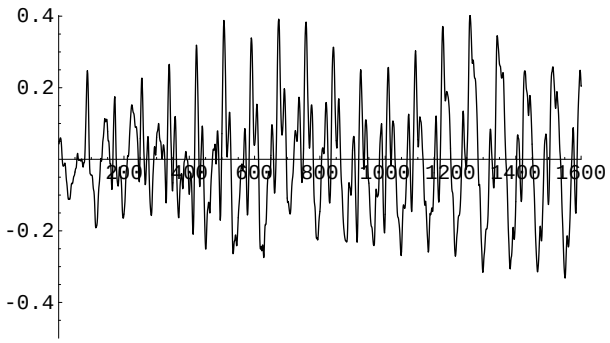
（１）時間波形　　（２）DFT した図

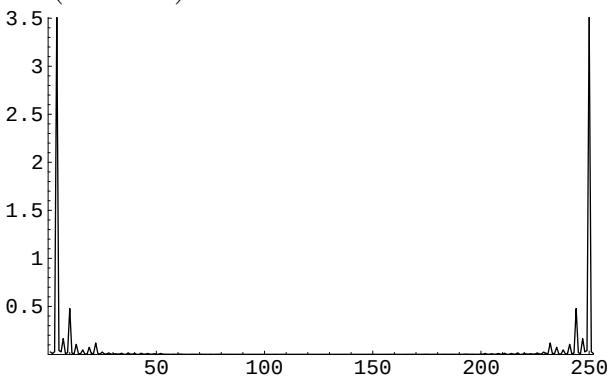




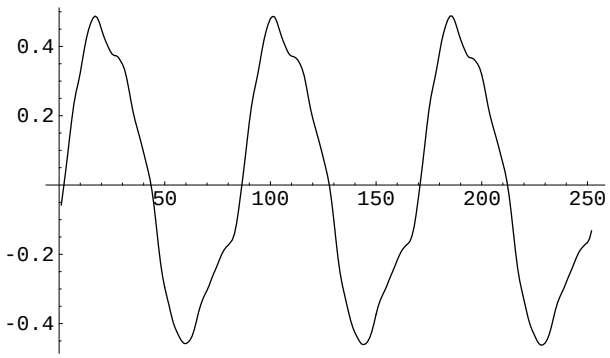
（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

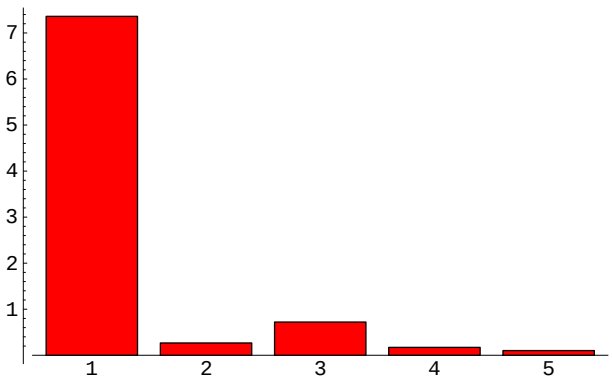
(b) ピアノの1オクターブ上のドの音 (f=523)





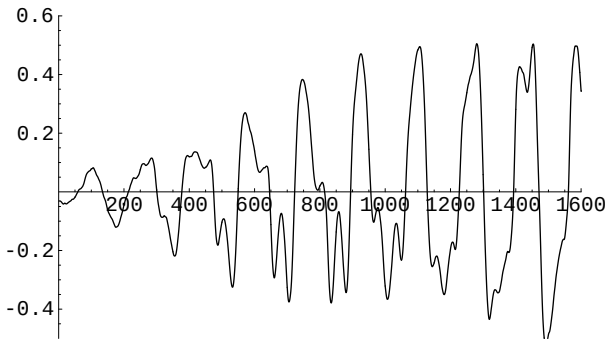
（１）時間波形　　（２）DFT した図

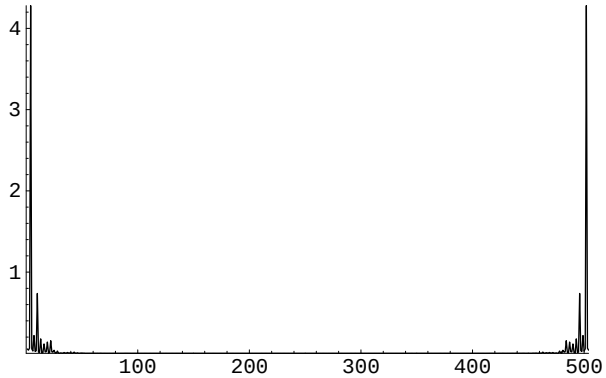




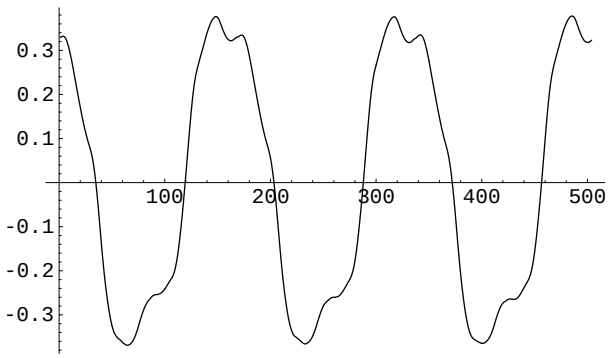
（３）3周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

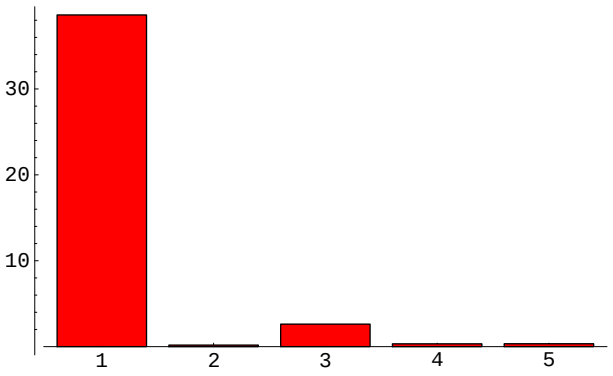
(c) リコーダーのドの音 (f=262)





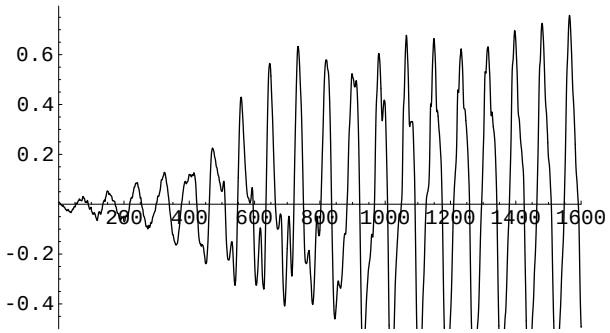
（１）時間波形　　（２）DFT した図

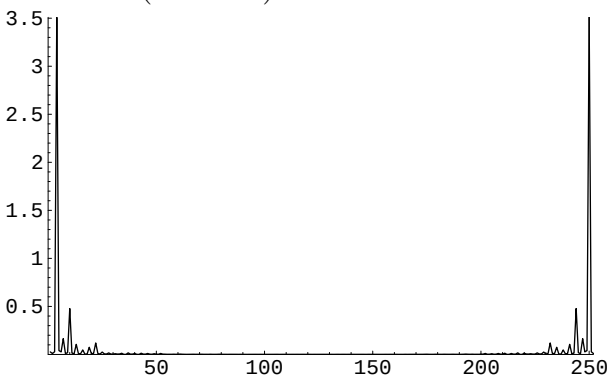




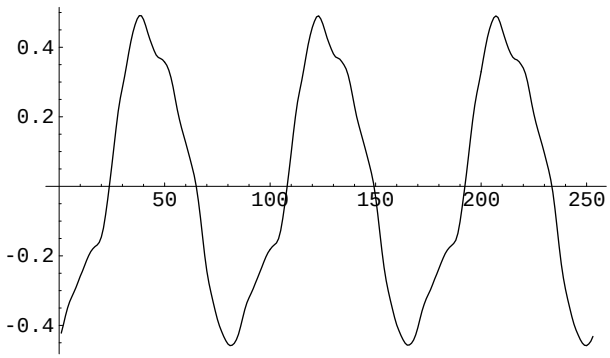
（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

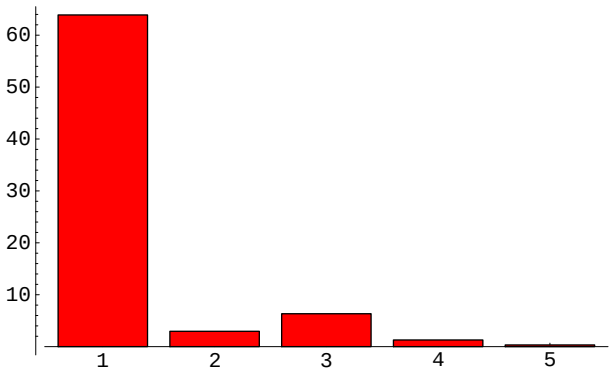
(d) リコーダーの1オクターブ上のドの音 (f=523)





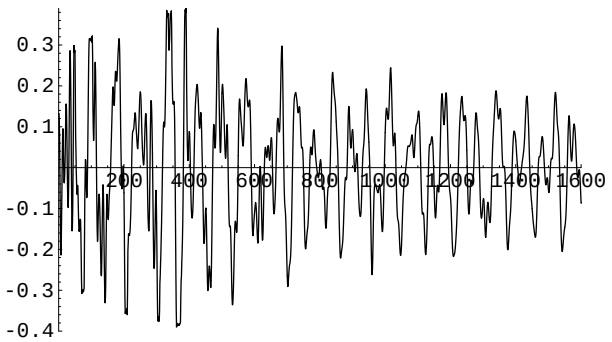
（１）時間波形　　（２）DFTした図

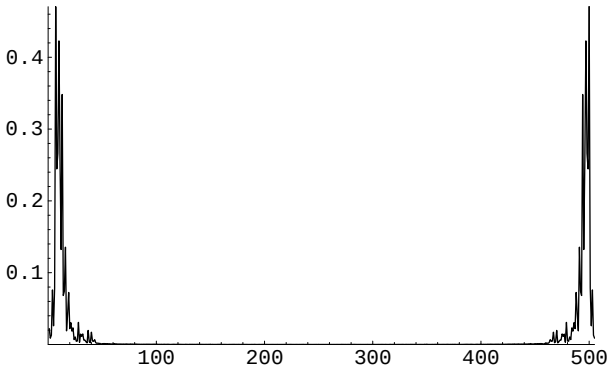




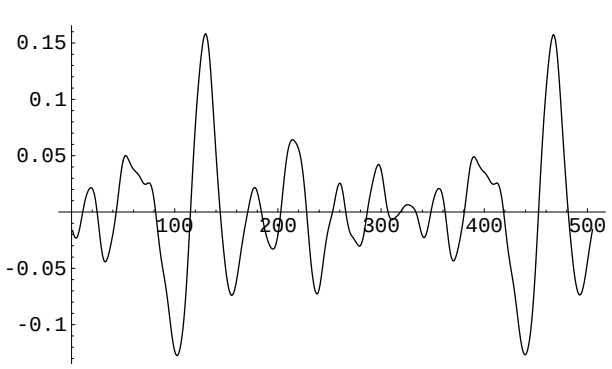
（３）3周期分の波形　　（４）nとC_nの関係

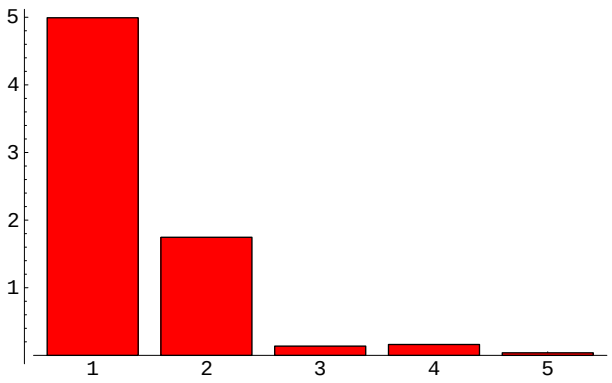
(e) 三味線のドの音 (f=523)





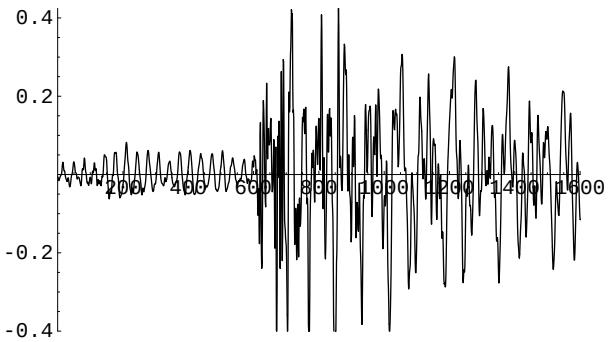
（１）時間波形　　（２）DFT した図



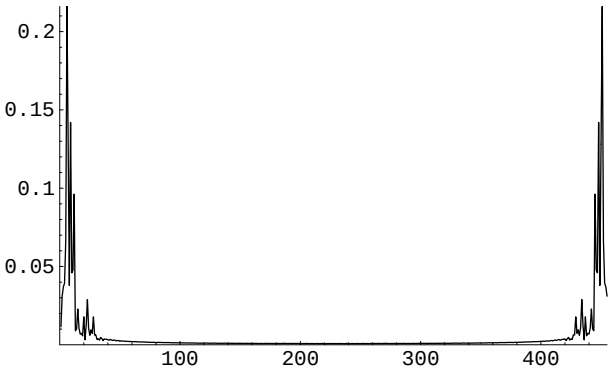


（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

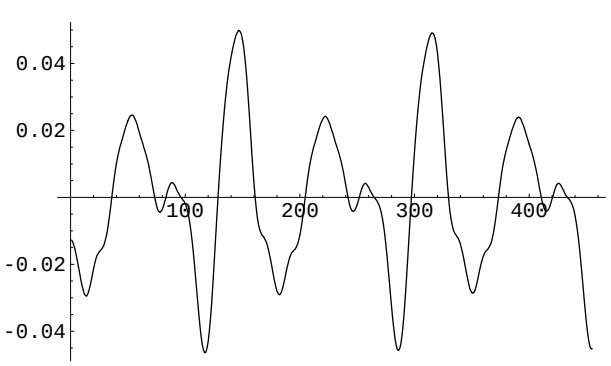
(f) 三味線の1オクターブ上のドの音 (f=523)



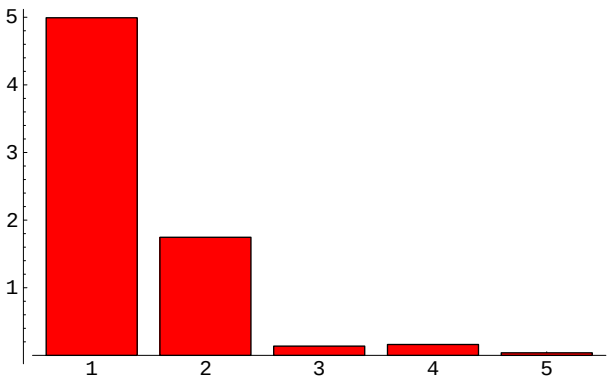
（１）時間波形



（２）DFTした図

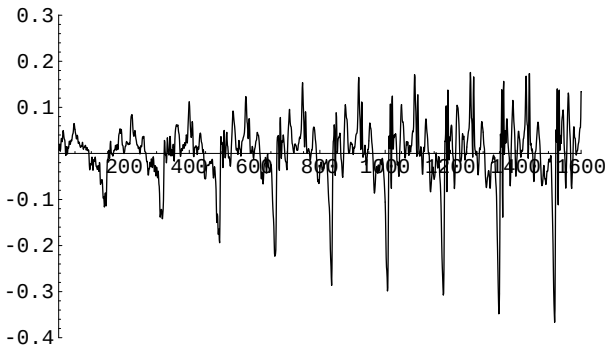


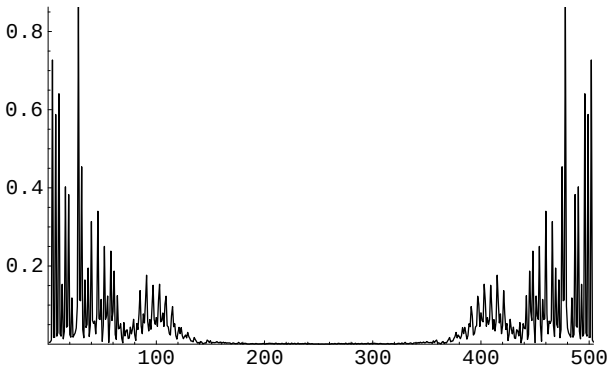
（３）3周期分の波形



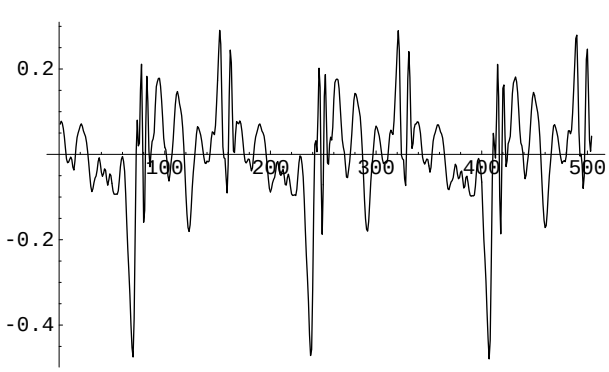
（４）nとC_nの関係

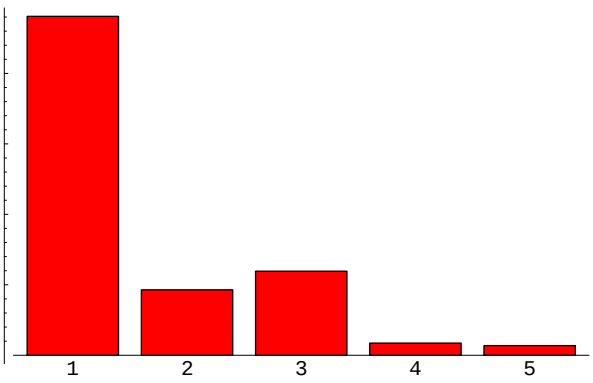
(g) ハーモニカのドの音 (f=784)





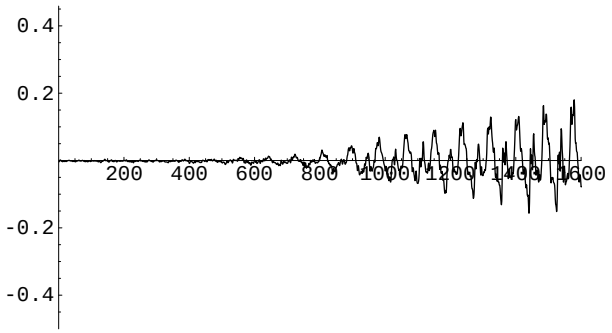
（１）時間波形　　（２）DFT した図



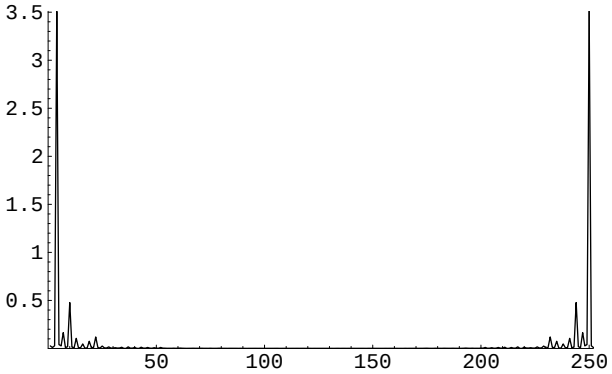


（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

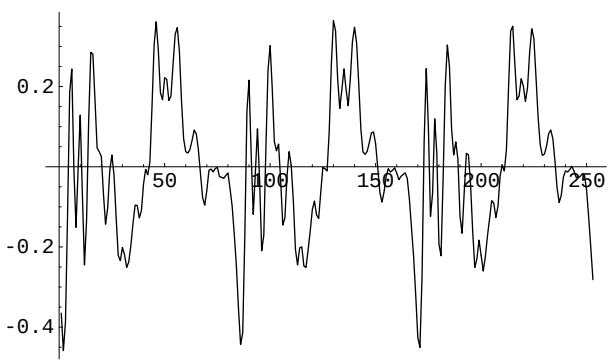
(h) ハーモニカの1オクターブ上のドの音 (f=1046)



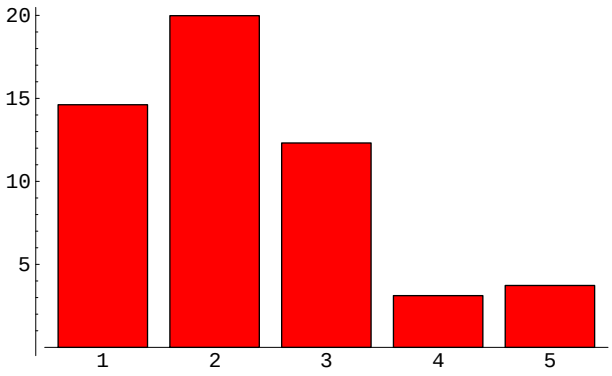
（１）時間波形



（２）DFT した図

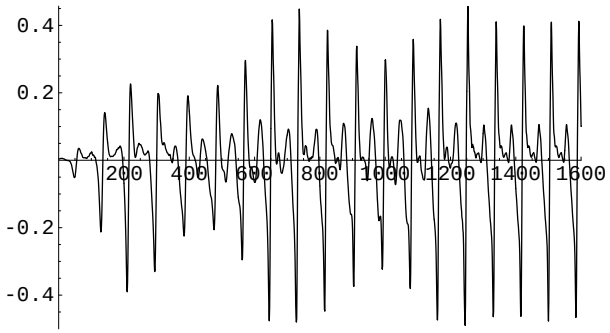


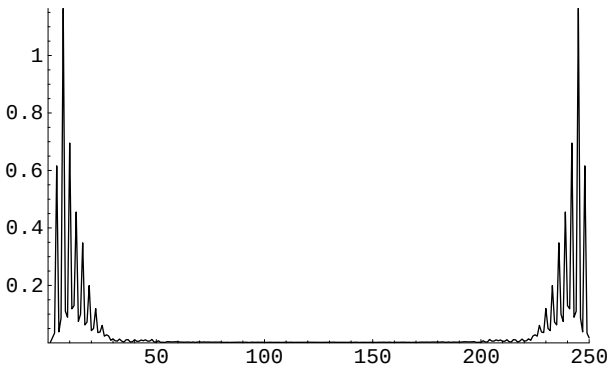
（３）3周期分の波形



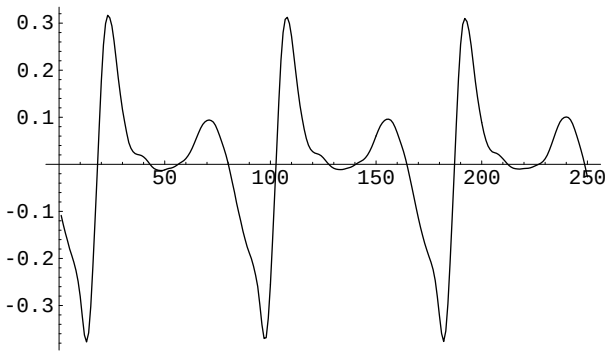
（４）n と C_n の関係

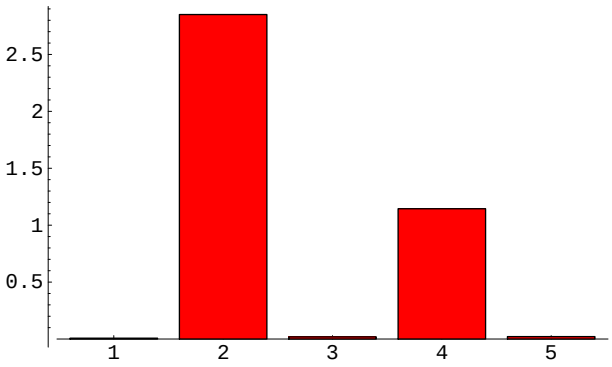
(i) トランペットのドの音 (f=1046)





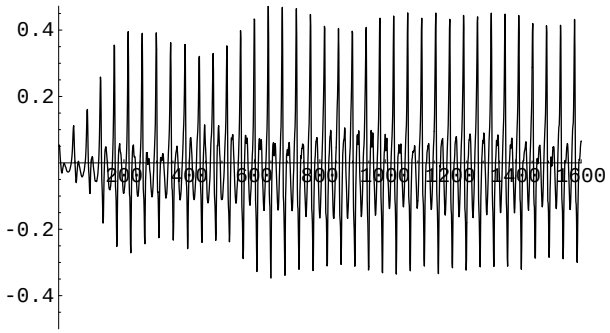
（１）時間波形　　（２）DFT した図

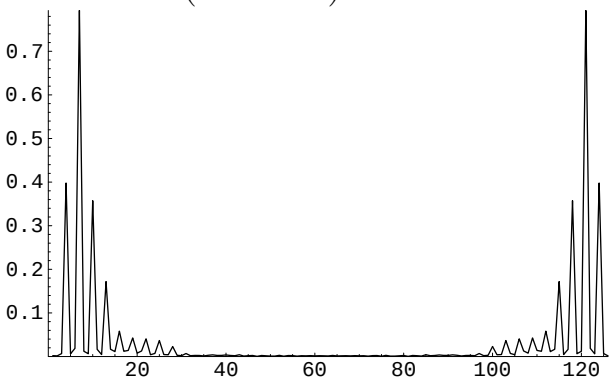




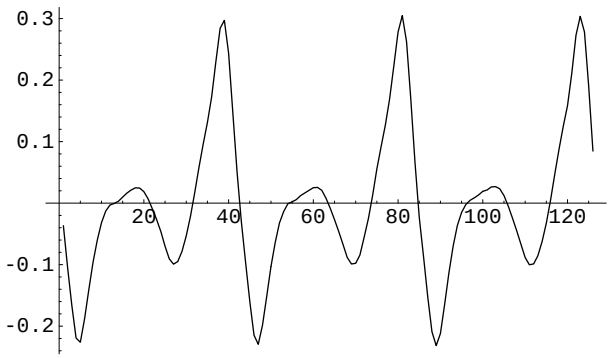
（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

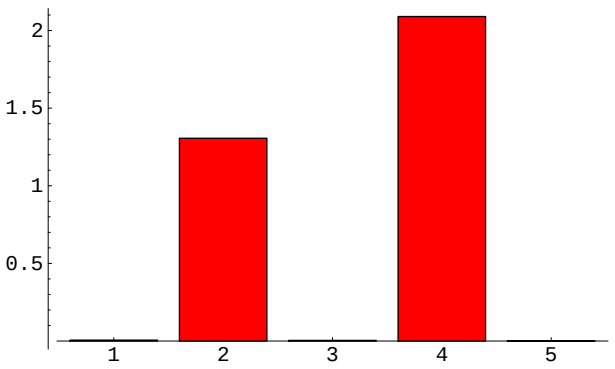
(j) トランペットの1オクターブ上のドの音 (f=2091)





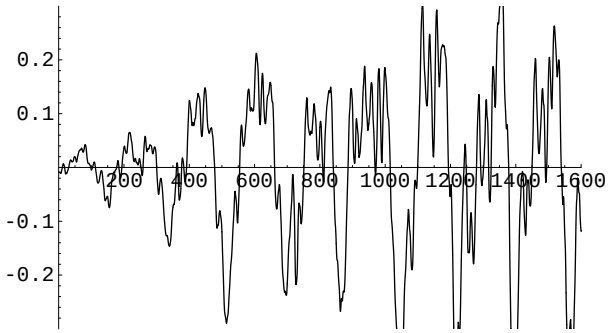
（１）時間波形　　（２）DFTした図

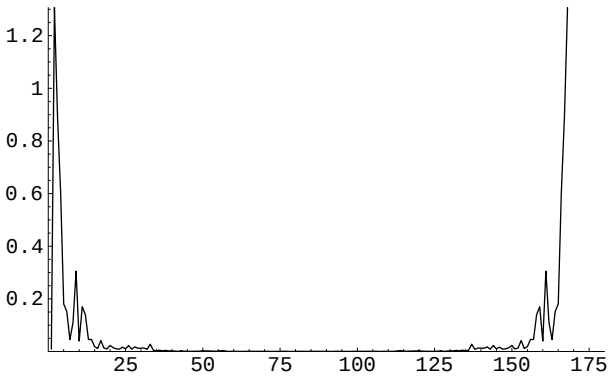




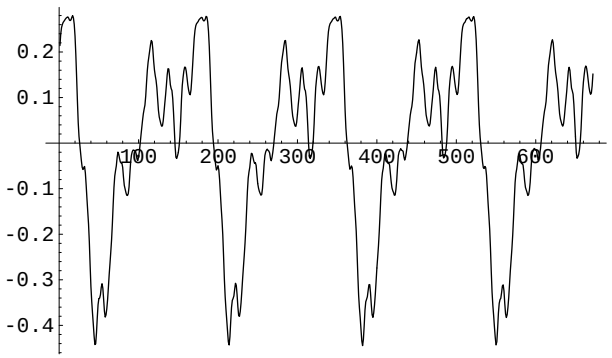
（３）3周期分の波形　　（４）nとC_nの関係

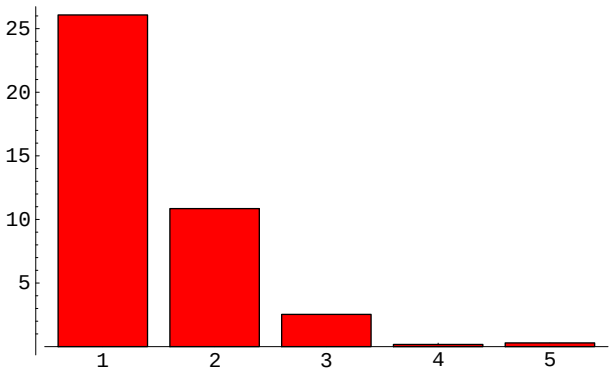
(k) バイオリンのドの音 (f=261)





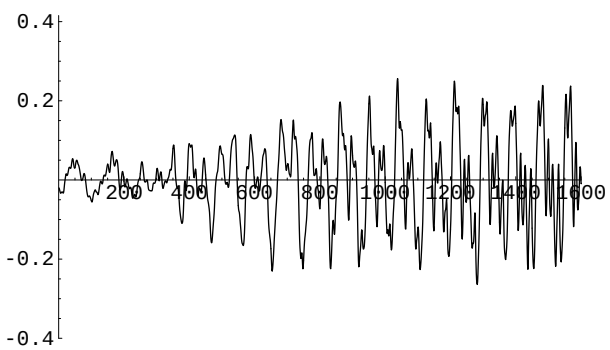
（１）時間波形　　（２）DFT した図



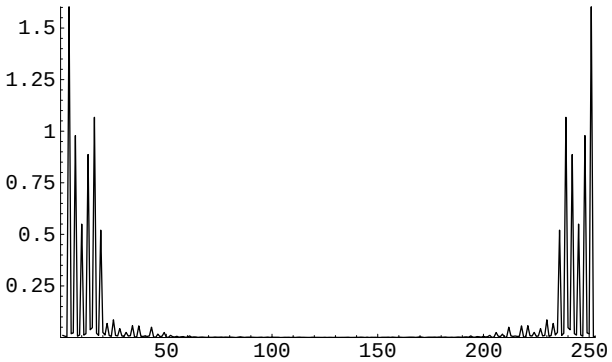


（３）3 周期分の波形　　（４）n と C_n の関係

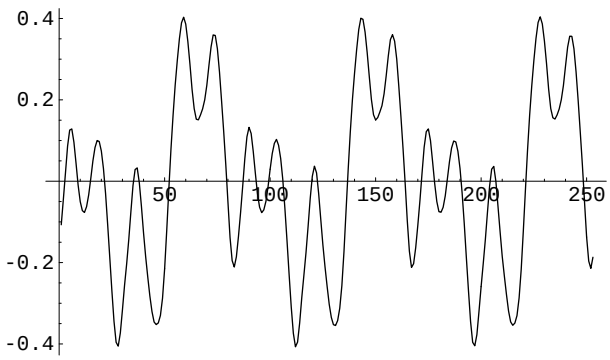
(l) バイオリンの1オクターブ上のドの音 (f=523)



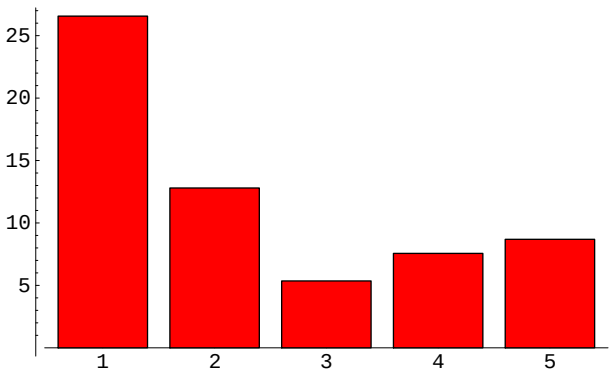
（１）時間波形



（２）DFTした図



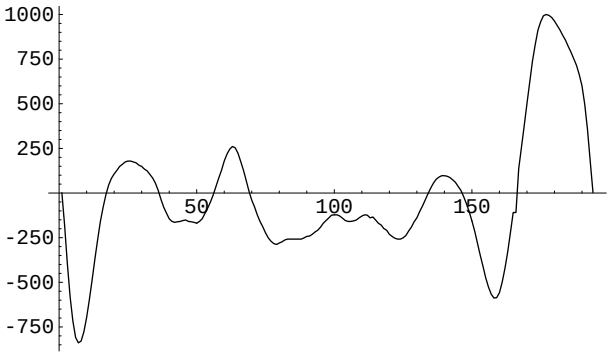
（３）3周期分の波形

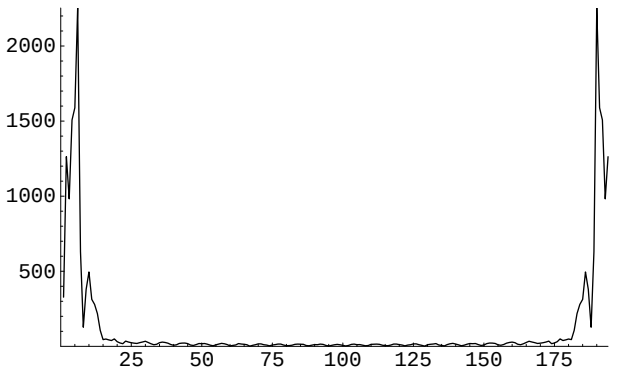


（４）nとC_nの関係

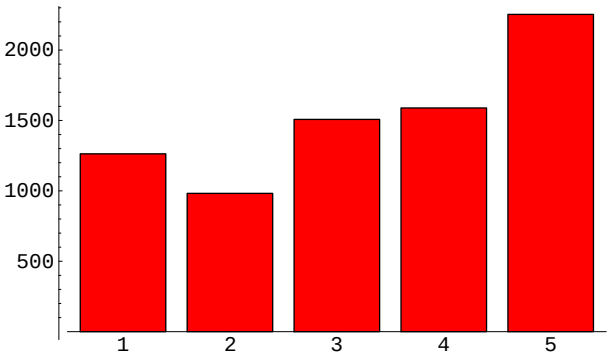
10.2　文献 [2] W.R. ベネット (1983) の楽器の音データ

(a) Oboe の音 (f=259.581)



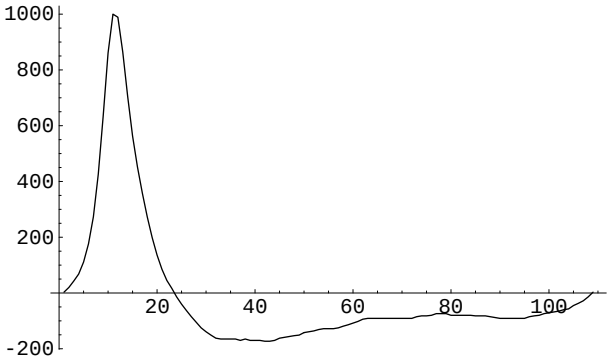


（１）1 周期分の波形　　（２）DFT した図

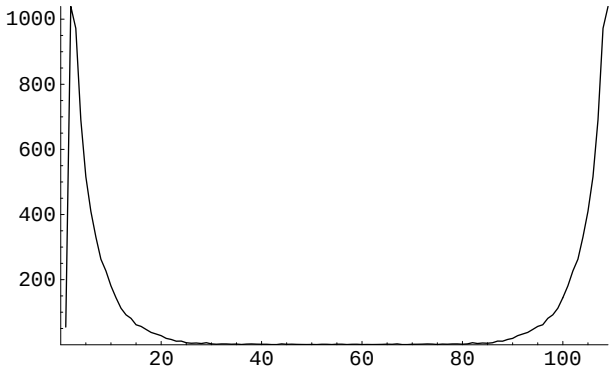


（３）n と C_n の関係

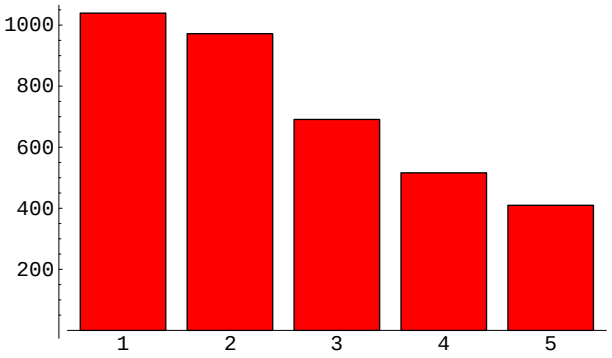
(b) Mode-locked-garden-hose の音 (f=307.692)



（１）１周期分の波形

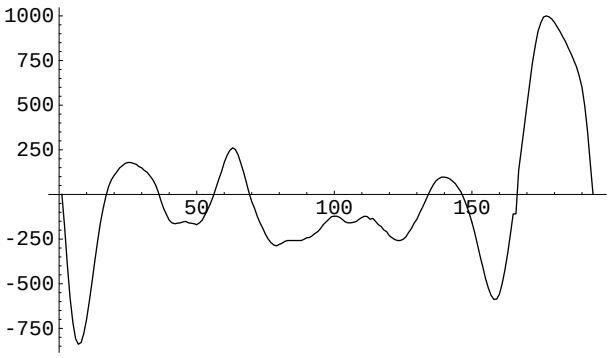


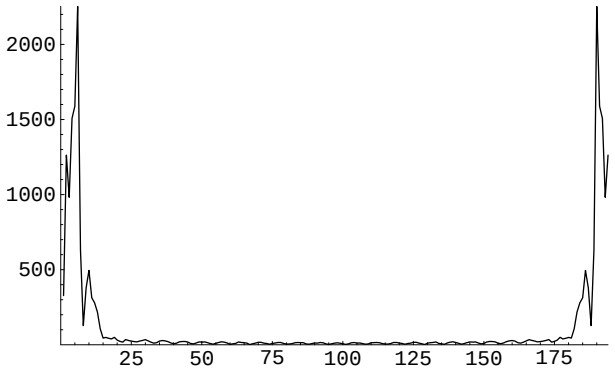
（２）DFT した図



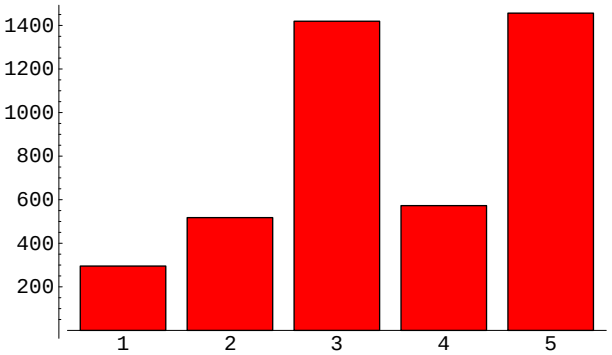
（３）n と C_n の関係

(c) Piccolo の音 (f=593.877)



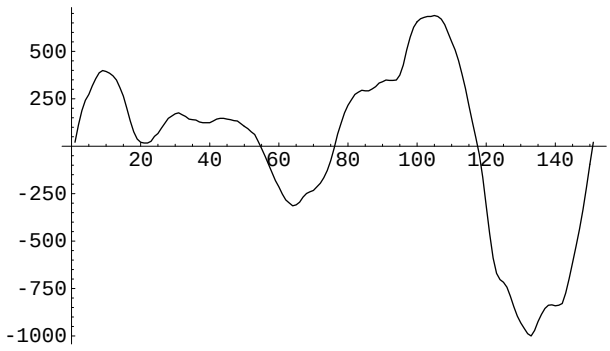


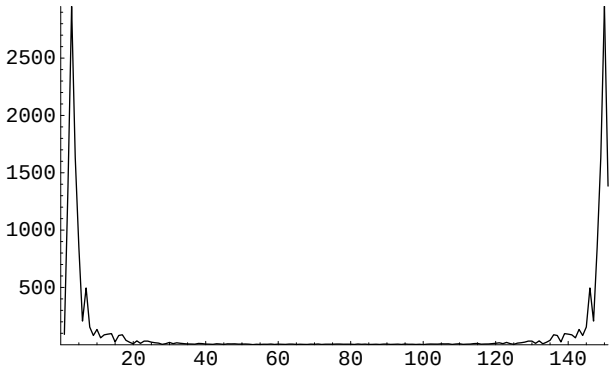
（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図



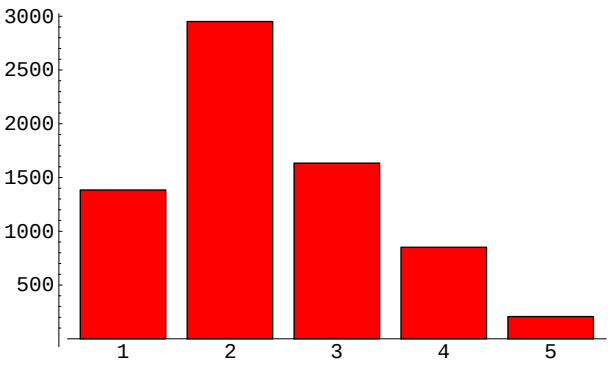
（３）n と C_n の関係

(d) French-horn-loud の音 (f=222.488)



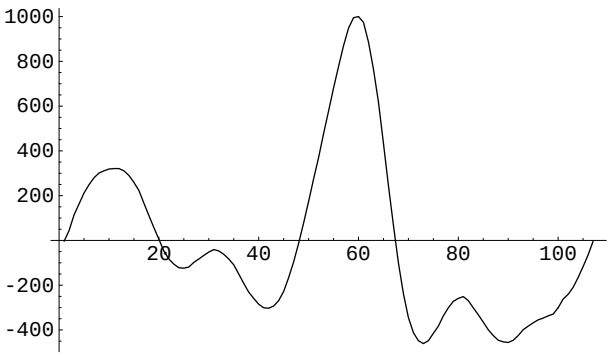


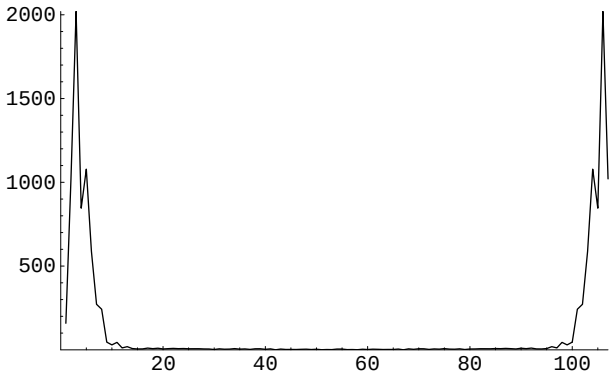
（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図



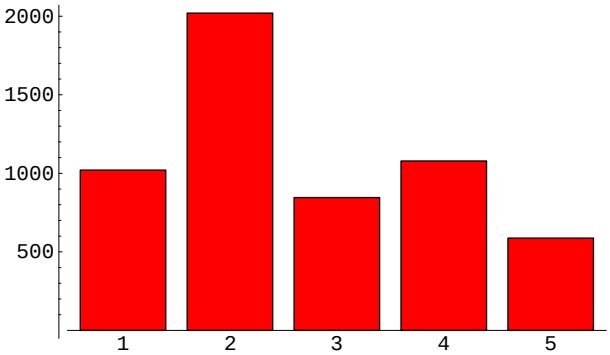
（３）n と C_n の関係

(e) F-cornet の音 (f=316.075)



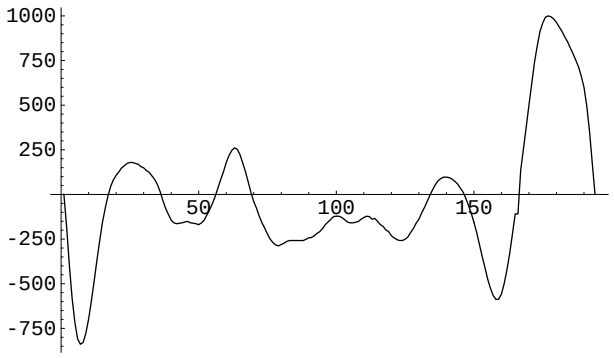


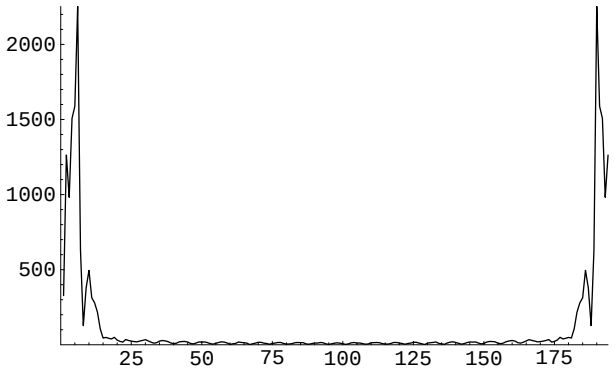
（１）1 周期分の波形　　（２）DFT した図



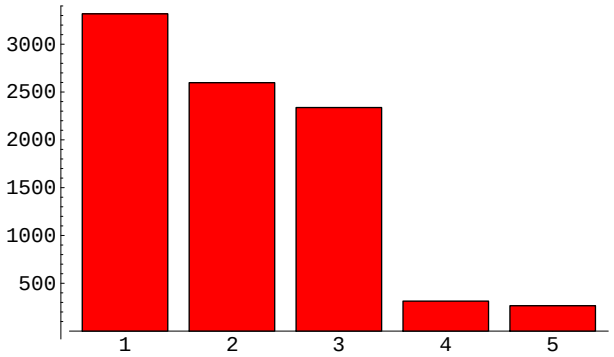
（３）n と C_n の関係

(f) Bach-trumpet の音 (f=597.672)



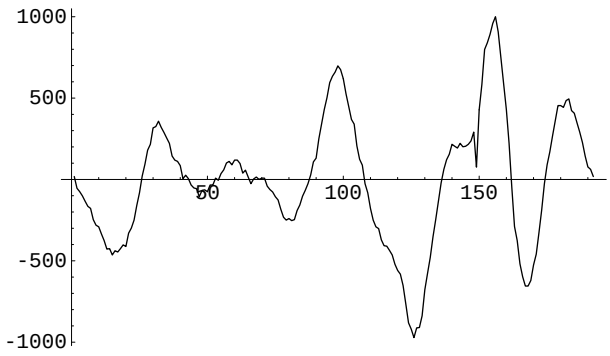


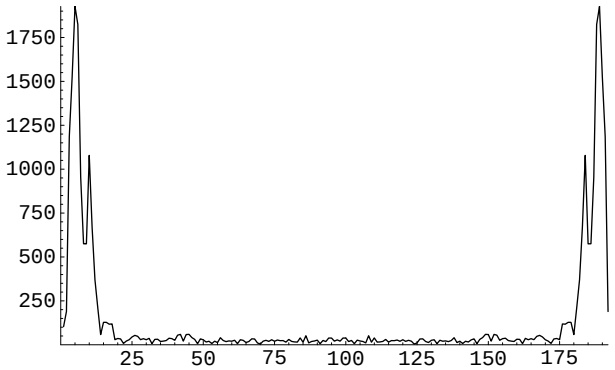
（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図



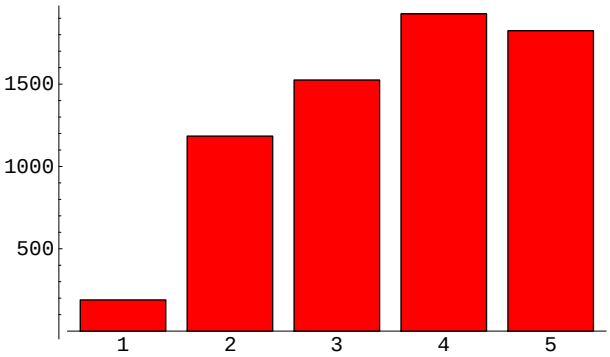
（３）n と C_n の関係

(g) Flute の音 (f=262.046)



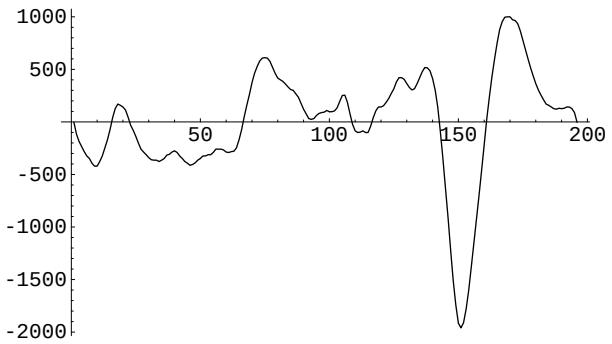


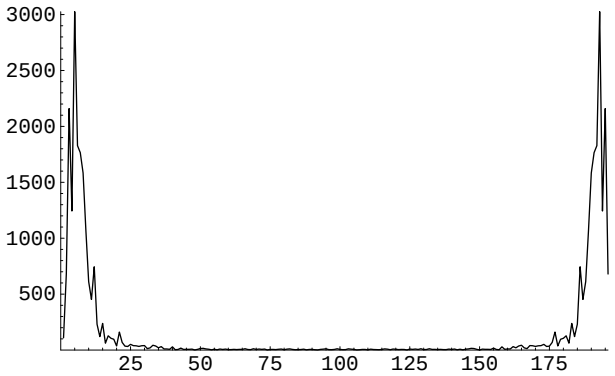
（１）1 周期分の波形　　（２）DFT した図



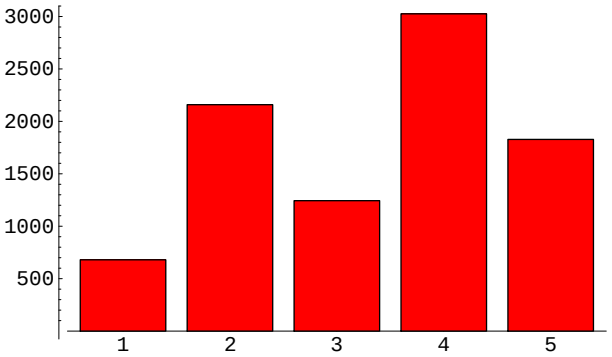
（３）n と C_n の関係

(h) Ophicleide の音 (f=85.1026)



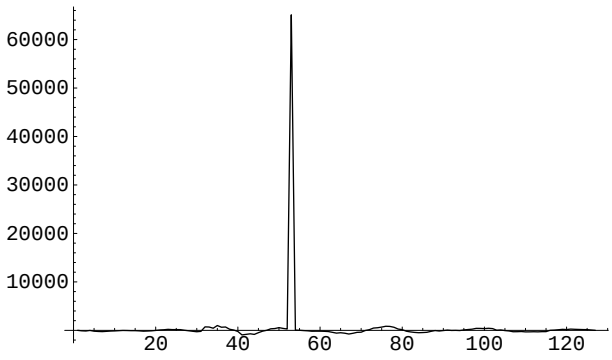


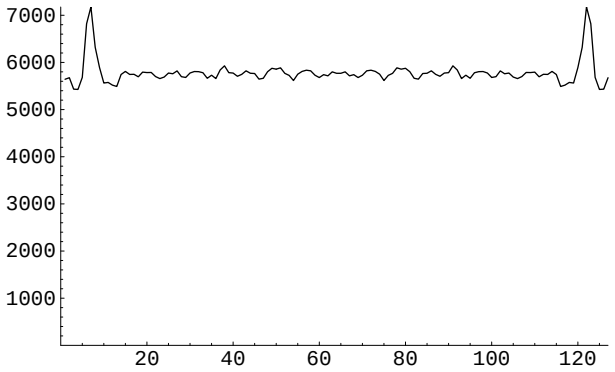
（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図



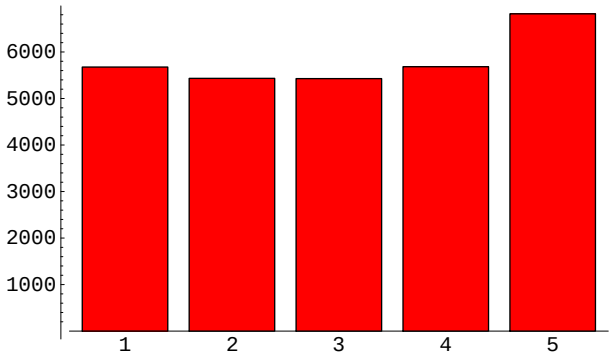
（３）n と C_n の関係

(i) Rohr-schalmei の音 (f=259.674)



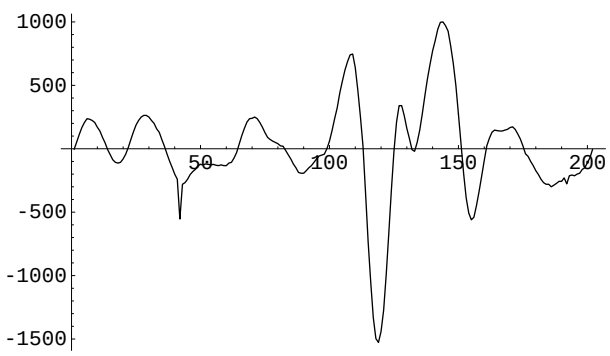


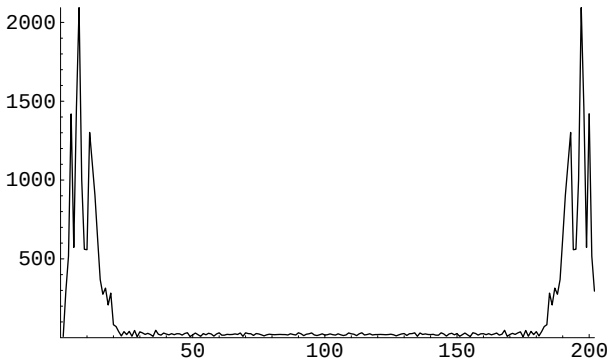
（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図



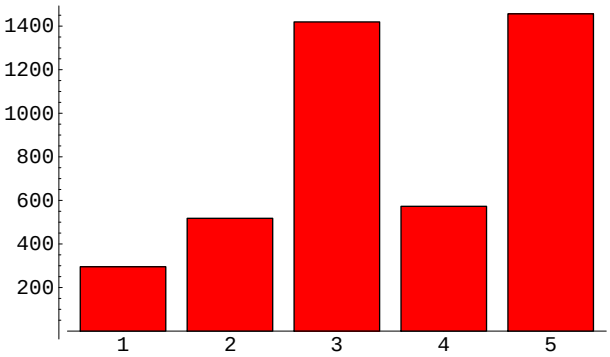
（３）n と C_n の関係

(j) Serpent の音 (f=61.7021)



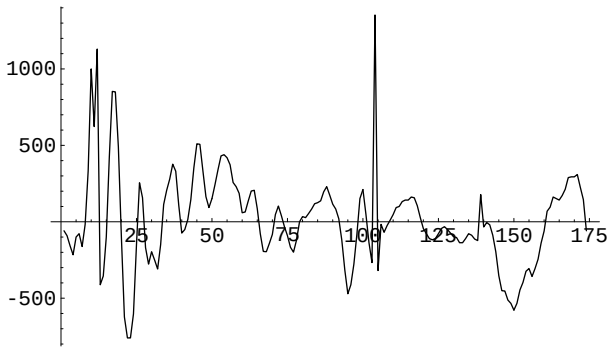


（１）１周期分の波形　　（２）DFT した図

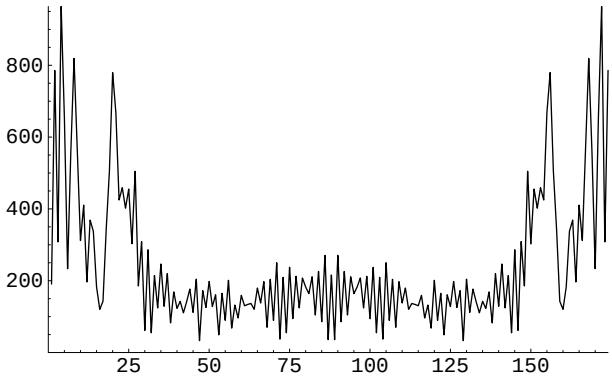


（３）n と C_n の関係

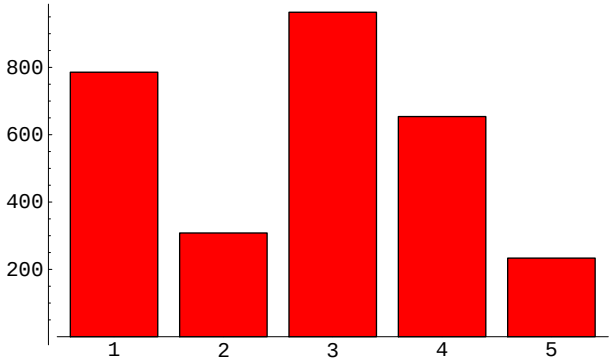
(k) Krummhorn の音 (f=192.521)



（１）１周期分の波形



（２）DFT した図



（３）n と C_n の関係

参考文献

[1] 藤田 宏, 吉田耕作, 『現代解析入門』, 岩波書店 (1991).

[2] W.R. ベネット, 『パソコンプログラム理科系のための問題演習』, 現代数学社 (1983).

[3] 平野 拓一, 『音色の周波数解析』, http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/

[4] H. Yanase, Mathematica の冒険『フーリエ解析入門』, http://www.wasurena.sakura.ne.jp/%7Emc2lv/Math/FourieA/FourieA.htm

[5] S.Wolfram, 『Mathematica ブック』, 東京書籍 (2002).

[6] 奥村 晴彦, 『LaTeX 2_ε 美文書作成入門』, 技術評論社 (2000).

[7] 山田修司, 『Mathematica で楽しむ　数理科学』, 牧野書店 (2002).