一般流束条件での
定常Navier-Stokes方程式の数値解析

明治大学大学院
理工学研究科　基礎理工学専攻　数学系
福嶋　剛史
指導教員　森本　浩子教授

2005年2月25日

目 次

1 初めに

1.1 初めに

本論文では以下のような定常 Navier-Stokes 方程式を考える.

$$\begin{cases} -\nu\triangle\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\dfrac{1}{\rho}\nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ -\text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ω は流体の占める 2 次元有界領域, $\partial\Omega$ はその境界, ρ は流体の密度, $\nu>0$ は粘性係数, $\mathbf{u}=(u,v)^T$ は未知の 2 次元速度ベクトル, p は未知の圧力, $\mathbf{f}=(f,g)^T$ は既知の滑らかな関数で単位質量あたりに働く外力, $\mathbf{b}(x,y)$ は Dirichlet 境界条件に対応する与えられた関数とする.

ただし, $\mathbf{b}(x,y)$ は Gauss の発散定理

$$\iint_\Omega \text{div } \mathbf{u}\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS=0,$$

により,

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS=0,$$

をみたさなければならない.

ここで, $\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} dS$ は $\partial\Omega$ における境界積分を表す記号とする.

また, 境界 $\partial\Omega$ の連結成分が複数個, すなわち

$$\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\cdots\cup\Gamma_N \quad (\ \Gamma_i \text{ は連結成分}),$$

の場合, 上の条件は以下のように書き表せる.

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_i}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS=0.$$

この条件を一般流束条件という.

各 i $(i=1,2,\cdots,N)$ について

$$\int_{\Gamma_i}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dS=0.$$

をみたすならば, 一般流束条件をみたす. このときは Navier-Stokes 方程式の解の存在が解析的に示されている. (H.Fujita , O.A.Ladyzhenskaya)

しかし, この条件が成立せず, 一般流束条件のみが成立する場合は, 解が一般的にあるかどうかは知られていない.

そこで, 本論文では一般流束条件のみが成立するような問題を考え, その問題に対して 2 つの数値実験を行ったので紹介する.

領域 Ω を以下のような円環領域に設定する.

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; a < |\mathbf{x}| < 1\}$$

ただし a は $0 < a < 1$ をみたす定数とする. また, 境界 Γ_1 , Γ_2 を次のようにおく.

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = a\}$$

$$\Gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = 1\}$$

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ を動径方向, 偏角方向の単位ベクトルとして, μ , ω_1 , ω_2 は与えられた定数, $R_1 = a$, $R_2 = 1$ とする.

Navier-Stokes 方程式の境界値 $\mathbf{b}$ を

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{R_i}\mathbf{e}_r + R_i\omega_i\mathbf{e}_\theta \ \text{ on } \Gamma_i \ \ (\mu \neq 0 \ , \ i = 1, 2),$$

とすると, $\mathbf{b}$ は一般流束条件のみをみたす.

なぜなら, 外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ が

$$\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{e}_r & \text{on } \Gamma_1 \\ \mathbf{e}_r & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\mu}{a}\mathbf{e}_r + a\omega_i\mathbf{e}_\theta\right) \cdot (-\mathbf{e}_r) \, dS \\ &= -\int_{\Gamma_1} \frac{\mu}{a} \, dS = -\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{a} a \, d\theta \\ &= -2\pi\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\Gamma_2} (\mu\mathbf{e}_r + \omega_i\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_r \, dS \\ &= \int_{\Gamma_2} \mu \, dS = \int_0^{2\pi} \mu \, d\theta \\ &= 2\pi\mu. \end{aligned}$$

よって, $\mu \neq 0$ ならば, 一般流束条件のみをみたす.

上の $\mathbf{b}$ に対して, $\nu = \rho = 1$, $\mathbf{f} = 0$ である場合は以下のような厳密解 u_0 が存在することが H.Morimoto[7] で示されている.

$$u_0 = \frac{\mu}{r}\mathbf{e}_r + b(\mu, r)\mathbf{e}_\theta$$

ただし, r は各点の原点からの距離で, $b(\mu, r)$ は μ の値によって以下のように変わる.

(1) $\mu \neq -2\nu$ のとき,

$$b(\mu, r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^{1+\frac{\mu}{\nu}},$$

$$c_1 = \frac{\omega_1 a^2 - \omega_2 a^{2+\frac{\mu}{\nu}}}{1 - a^{2+\frac{\mu}{\nu}}} \ , \ c_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1 a^2}{1 - a^{2+\frac{\mu}{\nu}}}.$$

(2) $\mu = -2\nu$ のとき,

$$b(\mu, r) = \frac{1}{r}(c_1 + c_2 \log r),$$

$$c_1 = \omega_2 \ , \ c_2 = \frac{\omega_1 a^2 - \omega_2}{\log a}.$$

1つ目の数値実験としては, 数値計算で求めたNavier-Stokes方程式の解がどの程度厳密解を近似しているかを確認する. そのために, 有限要素法における要素分割数と, 数値解と厳密解との誤差の相関関係を可視化してみる.

今度は, 上の境界値に摂動を加えた場合を考える.

$$\mathbf{b} = \Big(\frac{\mu}{R_i} + \varphi_i(\theta)\Big)\mathbf{e}_r + (R_i\omega_i + \psi_i(\theta))\mathbf{e}_\theta \ \text{ on } \Gamma_i, \ (i = 1, 2)$$

ただし, $\varphi_i(\theta)$, $\psi_i(\theta)$ は周期 2π の滑らかな関数で, 以下の条件をみたす.

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i(\theta) d\theta = 0 \ , \ \int_0^{2\pi} \psi_i(\theta) d\theta = 0$$

摂動を加えた場合も同様に $\mu \neq 0$ のときは, 一般流束条件のみをみたす.

このとき, $\nu, a, \omega_1, \omega_2$ が以下の条件

$$|\omega_1 - \omega_2| \frac{a^2}{1 - a^2} (\log a)^2 < 2\nu$$

をみたしている場合, ある1次元可算集合 M に対し, 任意の $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ として, φ_i , ψ_i $(i = 1, 2)$ が十分小さいならばNavier-Stokes方程式の解が存在することが H.Morimoto and S.Ukai[8] で示されている.

2つ目の数値実験は, このことを確認するとともに, この条件を満たさない場合でも解が存在するかどうかについて調べることである. 本論文では,

$$\nu = \rho = 1 \ , \ a = 0.5 \ , \ \mathbf{f} = 0,$$

$$(\ \varphi_i(\theta), \psi_i(\theta)\ ) = (AR_i \cos\theta, BR_i \sin\theta) \ \ (\ A, B \text{ は任意の実数}).$$

と固定して考える. このとき条件式を ω_1, ω_2 について整理すると

$$|\omega_1 - \omega_2| < \frac{6}{(\log 2)^2} \fallingdotseq 12,488.$$

となるので, パラメータ $\mu, \omega_1, \omega_2, A, B$ を色々変えた場合の解について調べる.

この論文の概略は以下のとおりである. まず, 第2節で準備として記号と関数空間を設定し, 第3節で定常Stokes方程式を3角形有限要素を用いた有限要素法により数値的に解く. 第4節ではStokes方程式の数値解を初期値として, Newton法を用いることでNavier-Stokes方程式の近似解を求める. 第5節では, 数値実験の問題設定と実験結果を紹介する. 第6節では, 実験で用いたプログラムを紹介する.

2　準備

2.1　記号と関数空間の説明

本節では記号と関数空間の説明を行う.
考える領域 Ω は流体の占める 2 次元有界領域, $\partial\Omega$ はその境界とする.
本論文では,

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; a < |\mathbf{x}| < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = a\}\ ,\ \Gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = 1\}$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

とする. ただし a は $0 < a < 1$ をみたす定数.
また, $R_1 = a$, $R_2 = 1$ とおく.
ρ は流体の密度とする.
$\nu > 0$ は粘性係数とする.
$\mathbf{u} = (u, v)^T$ は未知の 2 次元速度ベクトルとする.
p は未知の圧力とする.
$\mathbf{f} = (f, g)^T$ は既知の滑らかな関数で単位質量あたりに働く外力とする.
$\mathbf{b}(x, y)$ は Dirichlet 境界条件に対応する与えられた関数とする.
本論文では, 摂動を考慮しない場合は,

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{R_i}\mathbf{e}_r + R_i\omega_i\mathbf{e}_\theta \ \text{ on } \Gamma_i,\ (i = 1, 2)$$

摂動を考慮する場合は,

$$\mathbf{b} = \Big(\frac{\mu}{R_i} + A\cos\theta\Big)\mathbf{e}_r + (R_i\omega_i + B\sin\theta)\mathbf{e}_\theta \ \text{ on } \Gamma_i,\ (i = 1, 2)$$

とする. ただし μ , ω_1 , ω_2 , A , B は与えられた定数, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ は動径方向, 偏角方向の単位ベクトルとする.
関数空間 $L^2(\Omega), H^1(\Omega)$ を以下の式で定義する.

$$L^2(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ \iint_\Omega |u|^2\, dx\, dy < \infty\Big\}$$

$$H^1(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\Big\}$$

3 定常 Stokes 方程式

3.1 問題設定と弱定式化

Navier-Stokes 方程式の近似解を求めるためには, まず Stokes 方程式の近似解を求める必要がある.

領域 Ω を三角形分割したのち, Rits-Galerkin 法により近似方程式を作成し, それを解いて有限要素解を求める. 考える Stokes 方程式は以下のようなものである.

$$\begin{aligned}
\nu\triangle u(x,y) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) + f &= 0 && \text{in } \Omega,\\
\nu\triangle v(x,y) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}(x,y) + g &= 0 && \text{in } \Omega,\\
-\text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega,\\
\mathbf{u}(x,y) &= \mathbf{b}(x,y) && \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

次に, この問題に対する弱形式を考える. u^*, v^* は $\partial\Omega$ 上で 0 をみたす区分的双 2 次関数, p^* は区分的双 1 次関数とする.

上の第 1 式から第 3 式の両辺にそれぞれ u^*, v^*, p^* を掛けて Ω 上積分すると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
\nu\iint_\Omega (\triangle u)u^*\,dx\,dy - \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial x}u^*\,dx\,dy + \iint_\Omega fu^*\,dx\,dy &= 0,\\
\nu\iint_\Omega (\triangle v)v^*\,dx\,dy - \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial y}v^*\,dx\,dy + \iint_\Omega gv^*\,dx\,dy &= 0,\\
-\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}p^*\,dx\,dy - \iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}p^*\,dx\,dy &= 0
\end{aligned}$$

Green の公式, Gauss の公式, u^*, v^* が境界で 0 になることより, 上 2 式を次のように変形できる.

$$\begin{aligned}
-\nu\iint_\Omega (\nabla u\cdot\nabla u^*)\,dx\,dy + \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial u^*}{\partial x}p\,dx\,dy + \iint_\Omega fu^*\,dx\,dy &= 0,\\
-\nu\iint_\Omega (\nabla v\cdot\nabla v^*)\,dx\,dy + \frac{1}{\rho}\iint_\Omega \frac{\partial v^*}{\partial y}p\,dx\,dy + \iint_\Omega gv^*\,dx\,dy &= 0.
\end{aligned}$$

ここで, $E, F \in H^1(\Omega)$, $G, H \in L^2(\Omega)$ に対して, 以下の記号を定義する.

$$\begin{cases}
\langle E, F\rangle &= \displaystyle\iint_\Omega \left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy,\\
{}_x[F, G] &= \displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial x}G\,dx\,dy,\\
{}_y[F, G] &= \displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial y}G\,dx\,dy,\\
(G, H) &= \displaystyle\iint_\Omega GH\,dx\,dy.
\end{cases}$$

これらの記号を用いると定常 Stokes 方程式の弱形式は次のように表せる.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\nu\langle u^*, u\rangle + \dfrac{1}{\rho}{}_x[u^*, p] + (u^*, f) &=& 0, \\ -\nu\langle v^*, v\rangle + \dfrac{1}{\rho}{}_y[v^*, p] + (v^*, g) &=& 0, \\ -{}_x[u^*, p] - {}_y[v^*, p] &=& 0. \end{array}\right.$$

3.2 離散化したときの弱形式

本節では各３角形要素（有限要素） e について離散化した場合の弱形式を作成する.

上で表した定常 Stokes 方程式の弱形式において, $u, v, p, f, g, u^*, v^*, p^*$ の近似関数をそれぞれ, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{u^*}, \hat{v^*}, \hat{p^*}$ として離散化すると, 以下の弱形式を得る.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_e \left\{-\nu\langle \hat{u}^*, \hat{u}\rangle_e + \frac{1}{\rho}{}_x[\hat{u}^*, \hat{p}]_e + (\hat{u}^*, \hat{f})_e\right\} &=& 0, \\ \displaystyle\sum_e \left\{-\nu\langle \hat{v}^*, \hat{v}\rangle_e + \frac{1}{\rho}{}_y[\hat{v}^*, \hat{p}]_e + (\hat{v}^*, \hat{g})_e\right\} &=& 0, \\ \displaystyle\sum_e \{-{}_x[\hat{u}^*, \hat{p}]_e - {}_y[\hat{v}^*, \hat{p}]_e\} &=& 0. \end{array}\right.$$

ただし,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle E, F\rangle_e &=& \displaystyle\iint_e \left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\, dy, \\ {}_x[F, G]_e &=& \displaystyle\iint_e \frac{\partial F}{\partial x} G\, dx\, dy, \\ {}_y[F, G]_e &=& \displaystyle\iint_e \frac{\partial F}{\partial y} G\, dx\, dy, \\ (G, H)_e &=& \displaystyle\iint_e GH\, dx\, dy. \end{array}\right.$$

とする. ($E, F \in H^1(e),\ G, H \in L^2(e)$)

この式をさらに変形して, 具体的に形が見えるようにする. その前に変形するために必要な事柄を説明する.

３角形要素 e について, 頂点を P_0, P_1, P_2 , 辺 P_1P_2 の中点を P_3 , 辺 P_2P_0 の中点を P_4 , 辺 P_0P_1 の中点を P_5 とする.

また, 流速 u, v は各要素の頂点と中点で, 圧力 p は頂点のみで考えることにする.

P_0 , P_1 , P_2 の座標を各々 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) として, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ を以下の式で定義する.

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0(x, y) = \dfrac{(x_1y_2 - x_2y_1)}{D} + \dfrac{(y_1 - y_2)}{D}x + \dfrac{(x_2 - x_1)}{D}y, \\ \lambda_1(x, y) = \dfrac{(x_2y_0 - x_0y_2)}{D} + \dfrac{(y_2 - y_0)}{D}x + \dfrac{(x_0 - x_2)}{D}y, \\ \lambda_2(x, y) = \dfrac{(x_0y_1 - x_1y_0)}{D} + \dfrac{(y_0 - y_1)}{D}x + \dfrac{(x_1 - x_0)}{D}y. \end{array}\right.$$

ただし, D は P_0P_1 , P_0P_2 を２辺とする平行四辺形の面積で, 次の式で表される.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

このとき $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ は

$$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

をみたすので, １次の基底となっている.

また, ２次の基底 $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$ は１次の基底を用いて, 以下のように定義できる.

$$\begin{cases} \phi_0 = \lambda_0(2\lambda_0 - 1), \\ \phi_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \\ \phi_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \\ \phi_3 = 4\lambda_1\lambda_2, \\ \phi_4 = 4\lambda_2\lambda_0, \\ \phi_5 = 4\lambda_0\lambda_1. \end{cases}$$

ϕ_i は, $\phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \cdots, 5)$ を満たしている.

S を要素 e の面積とすると, $S = D/2$ であり, 面積座標の積分公式

$$\iint_e \lambda_0^l \lambda_1^m \lambda_2^n \, dx \, dy = 2S \frac{l!m!n!}{(l + m + n + 2)!} \qquad (l, m, n \geq 0)$$

が成立する.

定数 α_i , β_i を,

$$\begin{cases} \alpha_0 := \dfrac{y_1 - y_2}{D}, \\ \alpha_1 := \dfrac{y_2 - y_0}{D}, \\ \alpha_2 := \dfrac{y_0 - y_1}{D}, \\ \beta_0 := \dfrac{x_2 - x_1}{D}, \\ \beta_1 := \dfrac{x_0 - x_2}{D}, \\ \beta_2 := \dfrac{x_1 - x_0}{D}, \end{cases}$$

と定義する. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i(2\lambda_i - 1)\right) \\ &= (4\lambda_i - 1)\alpha_i, \qquad (i = 0, 1, 2) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4\lambda_1\lambda_2) \\ &= 4\alpha_1\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_1, \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial x} &= 4\alpha_2\lambda_0 + 4\alpha_0\lambda_2, \\ \frac{\partial \phi_5}{\partial x} &= 4\alpha_0\lambda_1 + 4\alpha_1\lambda_0, \end{aligned}$$

が成立する.

ϕ_i の y についての微分も α_i を β_i に置き換えれば, 同様の結果を得る.

また α_i , β_i の定義式より

$$\begin{aligned}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 &= \frac{1}{D}\{(y_1-y_2)+(y_2-y_0)+(y_0-y_1)\}\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_0+\beta_1+\beta_2 &= \frac{1}{D}\{(x_2-x_1)+(x_0-x_2)+(x_1-x_0)\}\\ &= 0\end{aligned}$$

となる.

c_i $(i=0,1,2)$ を以下のように定義する.

$$\begin{cases} c_0 := \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2,\\ c_1 := \alpha_2\alpha_0+\beta_2\beta_0,\\ c_2 := \alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1. \end{cases}$$

さらに, $\bar{c} := c_0+c_1+c_2$ とする.

上に挙げた, 1 次の基底 λ_i , 2 次の基底 ϕ_i を用いると $\hat{u},\hat{v},\hat{p},\hat{f},\hat{g},\hat{u^*},\hat{v^*},\hat{p^*}$ は次のように表される.

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_{i=0}^{5} u_i\phi_i(x,y), & \hat{u}^* &= \sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i(x,y),\\ \hat{v} &= \sum_{i=0}^{5} v_i\phi_i(x,y), & \hat{v}^* &= \sum_{i=0}^{5} v_i^*\phi_i(x,y),\\ \hat{p} &= \sum_{i=0}^{2} p_i\lambda_i(x,y), & \hat{p}^* &= \sum_{i=0}^{2} p_i^*\lambda_i(x,y),\\ \hat{f} &= \sum_{i=0}^{5} f_i\phi_i(x,y), & \hat{g}^* &= \sum_{i=0}^{5} g_i^*\phi_i(x,y).\end{aligned}$$

ただし, u_i などは u の各頂点 P_i における値を表すものとして用いている.

この関係式を上の弱形式に代入する.

$$\begin{aligned}\langle\hat{u}^*,\hat{u}\rangle_e &= \left\langle\sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i,\sum_{j=0}^{5} u_j\phi_j\right\rangle_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} u_i^*\langle\phi_i,\phi_j\rangle_e u_j\\ &= \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T}\hat{A}_e\hat{\mathbf{u}}_e.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\hat{v}^*,\hat{v}\rangle_e &= \left\langle\sum_{i=0}^{5} v_i^*\phi_i,\sum_{j=0}^{5} v_j\phi_j\right\rangle_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} v_i^*\langle\phi_i,\phi_j\rangle_e v_j\\ &= \hat{\mathbf{v}}_e^{*^T}\hat{A}_e\hat{\mathbf{v}}_e.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_x[\hat{u}^*, \hat{p}]_e &= \left[\sum_{i=0}^{5} u_i^* \phi_i, \sum p_j \lambda_j\right]_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{2} u_i^* \ {}_x[\phi_i, \lambda_j]_e p_j \\
&= \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T} \hat{B}_e \hat{\mathbf{p}}_e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_y[\hat{v}^*, \hat{p}]_e &= \left[\sum_{i=0}^{5} v_i^* \phi_i, \sum_{j=0}^{2} p_j \lambda_j\right]_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{2} v_i^* \ {}_y[\phi_j, \lambda_i]_e p_j \\
&= \hat{\mathbf{v}}_e^{*^T} \hat{C}_e \hat{\mathbf{p}}_e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_x[\hat{u}, \hat{p}^*]_e &= \left[\sum_{j=0}^{5} u_j \phi_j, \sum_{i=0}^{2} p_i^* \lambda_i\right]_e = \sum_{j=0}^{5}\sum_{i=0}^{2} p_i^* \ {}_x[\phi_j, \lambda_i]_e u_j \\
&= \hat{\mathbf{p}}_e^{*^T} \hat{B}_e{}^T \hat{\mathbf{u}}_e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_y[\hat{v}, \hat{p}^*]_e &= \left[\sum_{j=0}^{5} v_j \phi_j, \sum_{i=0}^{2} p_i^* \lambda_i\right]_e = \sum_{j=0}^{5}\sum_{i=0}^{2} p_i^* \ {}_y[\phi_j, \lambda_i]_e v_j \\
&= \hat{\mathbf{p}}_e^{*^T} \hat{C}_e{}^T \hat{\mathbf{v}}_e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{u}^*, f)_e &= \left(\sum_{i=0}^{5} u_i^* \phi_i, \sum_{j=0}^{5} f_j \phi_j\right)_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} u_i^* \ (\phi_i, \phi_j)_e f_j \\
&= \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T} \hat{D}_e \hat{\mathbf{f}}_e.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{u}^*, g)_e &= \left(\sum_{i=0}^{5} u_i^* \phi_i, \sum_{j=0}^{5} g_j \phi_j\right)_e = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} u_i^* \ (\phi_i, \phi_j)_e g_j \\
&= \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T} \hat{D}_e \hat{\mathbf{g}}_e.
\end{aligned}
$$

各々代入すると, 以下の方程式を得る.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sum_e \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T} \left\{\nu\rho \hat{A}_e \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{B}_e \hat{\mathbf{p}}_e - \rho \hat{D}_e \hat{\mathbf{f}}_e\right\} &= 0, \\
\sum_e \hat{\mathbf{v}}_e^{*^T} \left\{\nu\rho \hat{A}_e \hat{\mathbf{v}}_e - \hat{C}_e \hat{\mathbf{p}}_e - \rho \hat{D}_e \hat{\mathbf{g}}_e\right\} &= 0, \\
\sum_e \hat{\mathbf{p}}_e^{*^T} \left\{-\hat{B}_e{}^T \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{C}_e{}^T \hat{\mathbf{v}}_e\right\} &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

ただし, 各 e に対して, $\hat{\mathbf{u}}_e, \hat{\mathbf{u}}_e^*, \hat{\mathbf{v}}_e, \hat{\mathbf{v}}_e^*, \hat{\mathbf{p}}_e, \hat{\mathbf{p}}_e^*, \hat{\mathbf{f}}_e, \hat{\mathbf{g}}_e$ は各頂点 P_i での値を並べた列ベクトルで, $\hat{A}_e, \hat{D}_e$ は6行6列の行列で, $\hat{B}_e, \hat{C}_e$ は6行3列の行列であり, 各成分は以下の式で定義する.

$$\begin{cases} (\hat{A}_e)_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_e = \displaystyle\iint_e \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx\,dy \\ (\hat{B}_e)_{ij} = {}_x[\phi_i, \lambda_j]^e = \displaystyle\iint_e \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\lambda_j \, dx\,dy \\ (\hat{C}_e)_{ij} = {}_y[\phi_i, \lambda_j]^e = \displaystyle\iint_e \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\lambda_j \, dx\,dy \\ (\hat{D}_e)_{ij} = (\phi_i, \phi_j)_e = \displaystyle\iint_e \phi_i \phi_j \, dx\,dy \end{cases}$$

次の節で実際に要素係数行列 $\hat{A}_e, \hat{B}_e, \hat{C}_e, \hat{D}_e$ を計算する.

3.3 要素係数行列の計算

この節では要素係数行列 $\hat{A}_e, \hat{B}_e, \hat{C}_e, \hat{D}_e$ を実際の計算により求めることにする.
$\hat{A}_e$ の各成分 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_e$ を求める. $\hat{A}_e$ の対称性より, 上半分 $(i \leq j)$ のところで考えればよい.
$i = 0, 1, 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_i \rangle_e &= \iint_e \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)^2 dx\,dy \\ &= \iint_e ((4\lambda_i - 1)\alpha_i)^2 + ((4\lambda_i - 1)\beta_i)^2 \, dx\,dy \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \iint_e (16\lambda_i^2 - 8\lambda_i + 1) \, dx\,dy \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) 2S \left[16\frac{2!}{4!} - 8\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \right] \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) S \end{aligned}$$

となる.
$i, j = 0, 1, 2 \quad i \neq j$ のとき,

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_j \rangle_e &= \iint_e \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) dx\,dy \\ &= \iint_e ((4\lambda_i - 1)\alpha_i)((4\lambda_j - 1)\alpha_j) + ((4\lambda_i - 1)\beta_i)((4\lambda_j - 1)\beta_j) \, dx\,dy \\ &= (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) \iint_e (16\lambda_i\lambda_j - 4\lambda_i - 4\lambda_j + 1) \, dx\,dy \\ &= (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) 2S \left[16\frac{1}{4!} - 4\frac{1}{3!} - 4\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \right] \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j) S \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned}
\langle\phi_0,\phi_3\rangle_e &= \iint_e (4\lambda_0-1)\alpha_0(4\alpha_1\lambda_2+4\alpha_2\lambda_1)+(4\lambda_0-1)\beta_0(4\beta_1\lambda_2+4\beta_2\lambda_1)\,dx\,dy \\
&= 4(\alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1)\iint_e (4\lambda_0-1)\lambda_2\,dx\,dy \\
&\quad +4(\alpha_0\alpha_2+\beta_0\beta_2)\iint_e (4\lambda_0-1)\lambda_1\,dx\,dy
\end{aligned}$$

ここで, $i\neq j$ のとき $(i,j=0,1,2)$

$$\begin{aligned}
\iint_e (4\lambda_i-1)\lambda_j\,dx\,dy &= \iint_e 4\lambda_i\lambda_j-\lambda_j\,dx\,dy \\
&= 2S\left[4\frac{1}{4!}-\frac{1}{3!}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので,

$$\langle\phi_0,\phi_3\rangle_e = 0$$

が成立する. また同様に,

$$\langle\phi_1,\phi_4\rangle_e = \langle\phi_2,\phi_5\rangle_e = 0$$

も成立する.

$$\begin{aligned}
\langle\phi_0,\phi_4\rangle_e &= \iint_e (4\lambda_0-1)\alpha_0(4\alpha_2\lambda_0+4\alpha_0\lambda_2)+(4\lambda_0-1)\beta_0(4\beta_2\lambda_0+4\beta_0\lambda_2)\,dx\,dy \\
&= 4(\alpha_0\alpha_2+\beta_0\beta_2)\iint_e (4\lambda_0-1)\lambda_0\,dx\,dy \\
&\quad +4(\alpha_0^2+\beta_0^2)\iint_e (4\lambda_0-1)\lambda_2\,dx\,dy \\
&= 4(\alpha_0\alpha_2+\beta_0\beta_2)\iint_e (4\lambda_0-1)\lambda_0\,dx\,dy \\
&= 4(\alpha_0\alpha_2+\beta_0\beta_2)2S\left[4\frac{2!}{4!}-\frac{1}{3!}\right] \\
&= \frac{4}{3}(\alpha_0\alpha_2+\beta_0\beta_2)S \\
&= \frac{4}{3}c_1 S.
\end{aligned}$$

また, c_i を用いて以下の結果も同様に得る.

$$\begin{cases} \langle \phi_0, \phi_5 \rangle_e = \dfrac{4}{3} c_2 S, \\ \langle \phi_1, \phi_3 \rangle_e = \dfrac{4}{3} c_0 S, \\ \langle \phi_1, \phi_5 \rangle_e = \dfrac{4}{3} c_2 S, \\ \langle \phi_2, \phi_3 \rangle_e = \dfrac{4}{3} c_0 S, \\ \langle \phi_2, \phi_4 \rangle_e = \dfrac{4}{3} c_1 S. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_3, \phi_3 \rangle_e &= \iint_e (4\alpha_1\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_1)^2 + (4\beta_1\lambda_2 + 4\beta_2\lambda_1)^2 \, dx\, dy \\ &= 16(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \iint_e \lambda_2^2 \, dx\, dy + 32(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) \iint_e \lambda_1\lambda_2 \, dx\, dy \\ &\quad +16(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \iint_e \lambda_1^2 \, dx\, dy \\ &= \frac{8}{3} \left\{ (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \right\} S \\ &= \frac{8}{3} \left\{ \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_1(\beta_1 + \beta_2) - \alpha_2(\alpha_0 + \alpha_1) - \beta_2(\beta_0 + \beta_1) \right\} S \\ &= -\frac{8}{3} \left\{ (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_0) + (\beta_0\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_0) \right\} S \\ &= -\frac{8}{3}(c_0 + c_1 + c_2) S \\ &= -\frac{8}{3} \bar{c} S. \end{aligned}$$

同様に,

$$\langle \phi_4, \phi_4 \rangle_e = \langle \phi_5, \phi_5 \rangle_e = -\frac{8}{3} \bar{c} S$$

が成立する.

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_3, \phi_4 \rangle_e &= \iint_e (4\alpha_1\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_1)(4\alpha_0\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_0) \\
&\quad +(4\beta_1\lambda_2 + 4\beta_2\lambda_1)(4\beta_0\lambda_2 + 4\beta_2\lambda_0)\, dx\, dy \\
&= 16(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) \iint_e \lambda_2^2\, dx\, dy + 16(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) \iint_e \lambda_0\lambda_2\, dx\, dy \\
&\quad +16(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) \iint_e \lambda_1\lambda_2\, dx\, dy + 16(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \iint_e \lambda_0\lambda_1\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{3}\left\{2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\right\} S \\
&= \frac{4}{3}\{2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) \\
&\quad - \alpha_2(\alpha_0 + \alpha_1) - \beta_2(\beta_0 + \beta_1)\} S \\
&= \frac{8}{3}(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1)S \\
&= \frac{8}{3}c_2 S.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_3, \phi_5 \rangle_e &= \iint_e (4\alpha_1\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_1)(4\alpha_0\lambda_1 + 4\alpha_1\lambda_0) \\
&\quad +(4\beta_1\lambda_2 + 4\beta_2\lambda_1)(4\beta_0\lambda_1 + 4\beta_1\lambda_0)\, dx\, dy \\
&= 16(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) \iint_e \lambda_1\lambda_2\, dx\, dy + 16(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \iint_e \lambda_0\lambda_2\, dx\, dy \\
&\quad +16(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) \iint_e \lambda_1^2\, dx\, dy + 16(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) \iint_e \lambda_0\lambda_1\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{3}\left\{2(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right\} S \\
&= \frac{8}{3}(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2)S \\
&= \frac{8}{3}c_1 S.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \phi_4, \phi_5 \rangle_e &= \iint_e (4\alpha_0\lambda_2 + 4\alpha_2\lambda_0)(4\alpha_0\lambda_1 + 4\alpha_1\lambda_0) \\
&\quad +(4\beta_0\lambda_2 + 4\beta_2\lambda_0)(4\beta_0\lambda_1 + 4\beta_1\lambda_0)\, dx\, dy \\
&= 16(\alpha_0^2 + \beta_0^2) \iint_e \lambda_1\lambda_2\, dx\, dy + 16(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1) \iint_e \lambda_0\lambda_2\, dx\, dy \\
&\quad +16(\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) \iint_e \lambda_0\lambda_1\, dx\, dy + 16(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) \iint_e \lambda_0^2\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{3}\left\{2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2) + (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0) + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right\} S \\
&= \frac{8}{3}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)S \\
&= \frac{8}{3}c_0 S.
\end{aligned}
$$

これで $\hat{A}_e$ の各成分 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_e$ を求めることができた.
次に $\hat{B}_e$ の各成分 ${}_x[\phi_i, \lambda_j]^e$ を求める.
$i = 0, 1, 2$ のとき,

$$\begin{aligned} {}_x[\phi_i, \lambda_i]^e &= \iint_e (4\lambda_i - 1)\alpha_i \lambda_i \, dx \, dy \\ &= \alpha_i \iint_e (4\lambda_i^2 - \lambda_i) \, dx \, dy \\ &= \alpha_i 2S \left[4\frac{2!}{4!} - \frac{1}{3!} \right] \\ &= \frac{1}{3}\alpha_i S \end{aligned}$$

が成立する.
$i, j = 0, 1, 2 \quad i \neq j$ のとき,

$$\begin{aligned} {}_x[\phi_i, \lambda_j]^e &= \iint_e (4\lambda_i - 1)\alpha_i \lambda_j \, dx \, dy \\ &= \alpha_i \iint_e (4\lambda_i \lambda_j - \lambda_j) \, dx \, dy \\ &= \alpha_i 2S \left[4\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成立する.

$$\begin{aligned} {}_x[\phi_3, \lambda_0]^e &= \iint_e (4\alpha_1 \lambda_2 - 4\alpha_2 \lambda_1)\lambda_0 \, dx \, dy \\ &= 4\alpha_1 \iint_e \lambda_0 \lambda_2 \, dx \, dy + 4\alpha_2 \iint_e \lambda_1 \lambda_0 \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2)S. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{cases} {}_x[\phi_4, \lambda_1]^e = \dfrac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_0)S. \\ {}_x[\phi_5, \lambda_2]^e = \dfrac{1}{3}(\alpha_0 + \alpha_1)S. \end{cases}$$

が成立する.

$$\begin{aligned} {}_x[\phi_3, \lambda_1]^e &= \iint_e (4\alpha_1 \lambda_2 - 4\alpha_2 \lambda_1)\lambda_1 \, dx \, dy \\ &= 4\alpha_1 \iint_e \lambda_1 \lambda_2 \, dx \, dy + 4\alpha_2 \iint_e \lambda_1^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)S. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{cases} {}_x[\phi_3, \lambda_2]^e &= \dfrac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2)S, \\ {}_x[\phi_4, \lambda_0]^e &= \dfrac{1}{3}(2\alpha_2 + \alpha_0)S, \\ {}_x[\phi_4, \lambda_2]^e &= \dfrac{1}{3}(\alpha_2 + 2\alpha_0)S, \\ {}_x[\phi_5, \lambda_0]^e &= \dfrac{1}{3}(\alpha_0 + 2\alpha_1)S, \\ {}_x[\phi_5, \lambda_1]^e &= \dfrac{1}{3}(2\alpha_0 + \alpha_1)S \end{cases}$$

が成立する.

これで $\hat{B}_e$ の各成分 ${}_x[\phi_i, \lambda_j]^e$ を求めることができた.

$\hat{C}_e$ の各成分 ${}_y[\phi_i, \lambda_j]^e$ については, $\hat{B}_e$ の各成分で α_i を β_i $(i = 0, 1, 2)$ と置き換えれば求まる.

最後に $\hat{D}_e$ の各成分 $(\phi_i, \phi_j)_e$ を求める.

$\hat{D}_e$ の対称性より, 上半分 $(i \leq j)$ のところで考えればよい.

$i = 0, 1, 2$ のとき,

$$\begin{aligned} (\phi_i, \phi_i)_e &= \iint_e (2\lambda_i^2 - \lambda_i)^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_e (4\lambda_i^4 - 4\lambda_i^3 + \lambda_i^2) \, dx \, dy \\ &= 2S \left[4\frac{4!}{6!} - 4\frac{3!}{5!} + \frac{2!}{4!} \right] \\ &= \frac{1}{30} S \end{aligned}$$

が成立する.

$i, j = 0, 1, 2 \quad i \neq j$ のとき,

$$\begin{aligned} (\phi_i, \phi_j)_e &= \iint_e (2\lambda_i^2 - \lambda_i)(2\lambda_j^2 - \lambda_j) \, dx \, dy \\ &= \iint_e (4\lambda_i^2\lambda_j^2 - 2\lambda_i^2\lambda_j - 2\lambda_i\lambda_j^2 + \lambda_i\lambda_j) \, dx \, dy \\ &= 2S \left[4\frac{2!2!}{6!} - 2\frac{2!}{5!} - 2\frac{2!}{5!} + \frac{1}{4!} \right] \\ &= -\frac{1}{180} S \end{aligned}$$

が成立する.

$$
\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_3)_e &= \iint_e (2\lambda_0^2 - \lambda_0)(4\lambda_1\lambda_2)\, dx\, dy \\
&= \iint_e (8\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_0\lambda_1\lambda_2)\, dx\, dy \\
&= 2S\left[8\frac{2!}{6!} - 4\frac{1}{5!}\right] \\
&= -\frac{1}{45}S.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
(\phi_1, \phi_4)_e = (\phi_2, \phi_5)_e = -\frac{1}{45}S
$$

が成立する.

$$
\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_4)_e &= \iint_e (2\lambda_0^2 - \lambda_0)(4\lambda_2\lambda_0)\, dx\, dy \\
&= \iint_e (8\lambda_0^3\lambda_2 - 4\lambda_0^2\lambda_2)\, dx\, dy \\
&= 2S\left[8\frac{3!}{6!} - 4\frac{2!}{5!}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
(\phi_0, \phi_5)_e = (\phi_1, \phi_3)_e = (\phi_1, \phi_5)_e = (\phi_2, \phi_3)_e = (\phi_2, \phi_4)_e = 0
$$

が成立する.

$$
\begin{aligned}
(\phi_3, \phi_3)_e &= \iint_e (4\lambda_1\lambda_2)^2\, dx\, dy \\
&= 16\iint_e \lambda_1^2\lambda_2^2\, dx\, dy \\
&= 16\left(2S\frac{2!2!}{6!}\right) \\
&= \frac{8}{45}S.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
(\phi_4, \phi_4)_e = (\phi_5, \phi_5)_e = \frac{8}{45}S
$$

が成立する.

$$
\begin{aligned}
(\phi_3, \phi_4)_e &= \iint_e (4\lambda_1\lambda_2)(4\lambda_2\lambda_0)\, dx\, dy \\
&= 16 \iint_e \lambda_0\lambda_1\lambda_2^2\, dx\, dy \\
&= 16\left(2S\frac{2!}{6!}\right) \\
&= \frac{4}{45}S.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
(\phi_3, \phi_5)_e = (\phi_4, \phi_5)_e = \frac{4}{45}S
$$

が成立する.

これで $\hat{D}_e$ の各成分 $(\phi_i, \phi_j)_e$ を求めることができた.

よって, 行列 $\hat{A}_e$, $\hat{B}_e$, $\hat{C}_e$, $\hat{D}_e$ の各成分を求めることができた.

計算結果をまとめる

要素係数行列 $\hat{A}_e$, $\hat{B}_e$, $\hat{C}_e$, $\hat{D}_e$ を表示する.

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix},
$$

$$
S = \frac{1}{2}D,
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_0 := \dfrac{y_1 - y_2}{D}, \\
\alpha_1 := \dfrac{y_2 - y_0}{D}, \\
\alpha_2 := \dfrac{y_0 - y_1}{D}, \\
\beta_0 := \dfrac{x_2 - x_1}{D}, \\
\beta_1 := \dfrac{x_0 - x_2}{D}, \\
\beta_2 := \dfrac{x_1 - x_0}{D}, \\
c_0 := \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2, \\
c_1 := \alpha_2\alpha_0 + \beta_2\beta_0, \\
c_2 := \alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1, \\
\bar{c} := c_0 + c_1 + c_2,
\end{cases}
$$

とすると,

$$\hat{A}_e = \frac{S}{3}\begin{bmatrix} 3(\alpha_0^2+\beta_0^2) & -c_2 & -c_1 & 0 & 4c_1 & 4c_2 \\ -c_2 & 3(\alpha_1^2+\beta_1^2) & -c_0 & 4c_0 & 0 & 4c_2 \\ -c_1 & -c_0 & 3(\alpha_2^2+\beta_2^2) & 4c_0 & 4c_1 & 0 \\ 0 & 4c_0 & 4c_0 & -8\bar{c} & 8c_2 & 8c_1 \\ 4c_1 & 0 & 4c_1 & 8c_2 & -8\bar{c} & 8c_0 \\ 4c_2 & 4c_2 & 0 & 8c_1 & 8c_0 & -8\bar{c} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_e = \frac{S}{3}\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 & 2\alpha_1+\alpha_2 \\ 2\alpha_2+\alpha_0 & \alpha_2+\alpha_0 & \alpha_2+2\alpha_0 \\ \alpha_0+2\alpha_1 & 2\alpha_0+\alpha_1 & \alpha_0+\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_e = \frac{S}{3}\begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ \beta_1+\beta_2 & \beta_1+2\beta_2 & 2\beta_1+\beta_2 \\ 2\beta_2+\beta_0 & \beta_2+\beta_0 & \beta_2+2\beta_0 \\ \beta_0+2\beta_1 & 2\beta_0+\beta_1 & \beta_0+\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_e = \frac{S}{180}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 32 & 16 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix}$$

3.4 近似方程式の作成

領域を 3 角形分割したとき, 各要素と, 各要素の頂点と各辺の中点 (節点) に 0 から番号付けをしていく. この番号を要素番号, 全体節点番号という. ただし第 0 全体節点は要素の頂点にとることにする.

流速は全ての節点 (要素の頂点と辺の中点) で値を計算するが, 圧力は要素の頂点でのみ値を計算する.

そこで, 第 i 全体節点における未知数の個数を第 i 全体節点における自由度と呼び f_i で書くことにする. (大まかに言うと, 頂点では自由度 3 , 中点では自由度 2) 第 0 全体節点は頂点としたので, $f_0 = 3$ である. 全節点の自由度を足し合わせた値が未知数の総数になる. 未知数の総数を N とおく.

ここで, 第 i 節点における累積節点番号 $cum[i]$ を以下の式で定義する.

$$cum[0] = 0,\ cum[i] = \sum_{n=0}^{i-1} f_n \quad (i \leq 1).$$

そして, 全節点での u, v, p (ただし p は要素の頂点のみ) を並べた N 次ベクトルを考える. 第 i 全体節点での u の値がこのベクトルの第 $cum[i]$ 成分に, v の値が $cum[i]+1$ 成分に, p の値が $cum[i]+2$ 成分に対応する. このベクトルに関する連立 1 次方程式を作成する.

$\hat{A}_e$ を N 次に拡大した行列を A_e^* とする. 局所節点番号 (前に挙げた, 要素における節点 P_0 から P_5 のこと) と全体節点番号の対応付けをもとに $\hat{A}_e$ の各成分を A_e^* に対応させる.

そして, 全要素について足し合わせた行列を A とする. 他の行列やベクトルも同様に拡大して全要素について和をとると, 以下のような式を得る. (直接剛性法)

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{*T}(\nu\rho A\mathbf{u} - B\mathbf{p} - \rho D\mathbf{f}) &= 0 \\ \mathbf{v}^{*T}(\nu\rho A\mathbf{v} - C\mathbf{p} - \rho D\mathbf{g}) &= 0, \\ \mathbf{p}^{*T}(-B^T\mathbf{u} - C^T\mathbf{v}) &= 0. \end{cases}$$

ただし, 各記号については A に準じる.

さらに, $\mathbf{u}^{*T}, \mathbf{v}^{*T}, \mathbf{p}^{*T}$ の任意性より, 以下の近似方程式を得る.

$$\begin{cases} \nu\rho A\mathbf{u} - B\mathbf{p} - \rho D\mathbf{f} &= 0, \\ \nu\rho A\mathbf{v} - C\mathbf{p} - \rho D\mathbf{g} &= 0, \\ -B^T\mathbf{u} - C^T\mathbf{v} &= 0. \end{cases}$$

これは, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}$ の連立 1 次方程式であり, 境界条件を考慮してこれを解けば Stokes 方程式の数値解を得る.

4 定常 Navier-Stokes 方程式

4.1 非線形項の弱定式化

非線形項 $(\mathbf{u}\cdot\Delta)\mathbf{u}$ の弱形式について考える.

$$(\mathbf{u}\cdot\Delta)\mathbf{u} = \Big(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\Big)\mathbf{u} = (uu_x + vu_y\ ,\ uv_x + vv_y)^T.$$

第 1 成分について u^* を掛けて Ω 上で積分すると

$$\iint_\Omega u^*(uu_x + vu_y)\,dx\,dy = \iint_\Omega u^* uu_x\,dx\,dy + \iint_\Omega u^* vu_y\,dx\,dy.$$

第 2 成分について v^* を掛けて Ω 上で積分すると

$$\iint_\Omega v^*(uv_x + vv_y)\,dx\,dy = \iint_\Omega v^* uv_x\,dx\,dy + \iint_\Omega v^* vv_y\,dx\,dy.$$

この式を u, v, u^*, v^* の近似関数 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}^*, \hat{v}^*$

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \sum_{i=0}^{5} u_i\phi_i(x,y), & \hat{u}^* &= \sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i(x,y),\\
\hat{v} &= \sum_{i=0}^{5} v_i\phi_i(x,y), & \hat{v}^* &= \sum_{i=0}^{5} v_i^*\phi_i(x,y).
\end{aligned}$$

を用いて離散化する.

以下の記号を定義する.

$$\begin{aligned}
\kappa^x_{ijk} &:= \iint_e \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\,dx\,dy, & \kappa^y_{ijk} &:= \iint_e \phi_i\phi_j\frac{\partial\phi_k}{\partial y}\,dx\,dy,\\
S^{x1}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^x_{ikj}u_k, & S^{x2}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^x_{ijk}u_k,\\
S^{y1}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^y_{ikj}u_k, & S^{y2}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^y_{ijk}u_k,\\
T^{x1}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^x_{ikj}v_k, & T^{x2}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^x_{ijk}v_k,\\
T^{y1}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^y_{ikj}v_k, & T^{y2}_{ij} &:= \sum_{k=0}^{5}\kappa^y_{ijk}v_k,
\end{aligned}$$

$$\hat{S}^{x1}_e := [S^{x1}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{S}^{x2}_e := [S^{x2}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{S}^{y1}_e := [S^{y1}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{S}^{y2}_e := [S^{y2}_{ij}],$$
$$\hat{T}^{x1}_e := [T^{x1}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{T}^{x2}_e := [T^{x2}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{T}^{y1}_e := [T^{y1}_{ij}]\ \ ,\ \ \hat{T}^{y2}_e := [T^{y2}_{ij}].$$

k を固定して, 行列 $\kappa^x_{ijk}, \kappa^y_{ijk}$ を実際に計算する. 計算には Mathematica を用いた. 行列を求めるプログラムは (6) 節を参照のこと.

まず, κ^x_{ijk} を求める.

$$\kappa^x_{ij0} = \frac{\alpha_0 S}{1260}\begin{bmatrix} 78 & -9 & -9 & 12 & 48 & 48 \\ -9 & -18 & 11 & -16 & -20 & -32 \\ -9 & 11 & -18 & -16 & -32 & -20 \\ 12 & -16 & -16 & -96 & 16 & 16 \\ 48 & -20 & -32 & 16 & 160 & 80 \\ 48 & -32 & -20 & 16 & 80 & 160 \end{bmatrix}$$

$$\kappa^x_{ij1} = \frac{\alpha_1 S}{1260}\begin{bmatrix} -18 & -9 & 11 & -20 & -16 & -32 \\ -9 & 78 & -9 & 48 & 12 & 48 \\ 11 & -9 & -18 & -32 & -16 & -20 \\ -20 & 48 & -32 & 160 & 16 & 80 \\ -16 & 12 & -16 & 16 & -96 & 16 \\ -32 & 48 & -20 & 80 & 16 & 160 \end{bmatrix}$$

$$\kappa^x_{ij2} = \frac{\alpha_2 S}{1260}\begin{bmatrix} -18 & 11 & -9 & -20 & -32 & -16 \\ 11 & -18 & -9 & -32 & -20 & -16 \\ -9 & -9 & 78 & 48 & 48 & 12 \\ -20 & -32 & 48 & 160 & 80 & 16 \\ -32 & -20 & 48 & 80 & 160 & 16 \\ -16 & -16 & 12 & 16 & 16 & -96 \end{bmatrix}$$

$$\kappa^x_{ij3} = \frac{\alpha_1 S}{1260}\begin{bmatrix} 24 & 4 & -16 & -48 & -32 & -16 \\ 4 & 24 & -16 & -32 & -48 & -16 \\ -16 & -16 & 120 & 48 & 48 & -16 \\ -48 & -32 & 48 & 384 & 192 & 128 \\ -32 & -48 & 48 & 192 & 384 & 128 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2 S}{1260}\begin{bmatrix} 24 & -16 & 4 & -48 & -16 & -32 \\ -16 & 120 & -16 & 48 & -16 & 48 \\ 4 & -16 & 24 & -32 & -16 & -48 \\ -48 & 48 & -32 & 384 & 128 & 192 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \\ -32 & 48 & -48 & 192 & 128 & 384 \end{bmatrix}$$

$$\kappa^x_{ij4} = \frac{\alpha_0 S}{1260}\begin{bmatrix} 24 & 4 & -16 & -48 & -32 & -16 \\ 4 & 24 & -16 & -32 & -48 & -16 \\ -16 & -16 & 120 & 48 & 48 & -16 \\ -48 & -32 & 48 & 384 & 192 & 128 \\ -32 & -48 & 48 & 192 & 384 & 128 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_2 S}{1260}\begin{bmatrix} 120 & -16 & -16 & -16 & 48 & 48 \\ -16 & 24 & 4 & -16 & -48 & -32 \\ -16 & 4 & 24 & -16 & -32 & -48 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \\ 48 & -48 & -32 & 128 & 384 & 192 \\ 48 & -32 & -48 & 128 & 192 & 384 \end{bmatrix}$$

$$\kappa^x_{ij5} = \frac{\alpha_0 S}{1260}\begin{bmatrix} 24 & -16 & 4 & -48 & -16 & -32 \\ -16 & 120 & -16 & 48 & -16 & 48 \\ 4 & -16 & 24 & -32 & -16 & -48 \\ -48 & 48 & -32 & 384 & 128 & 192 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \\ -32 & 48 & -48 & 192 & 128 & 384 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_1 S}{1260}\begin{bmatrix} 120 & -16 & -16 & -16 & 48 & 48 \\ -16 & 24 & 4 & -16 & -48 & -32 \\ -16 & 4 & 24 & -16 & -32 & -48 \\ -16 & -16 & -16 & 128 & 128 & 128 \\ 48 & -48 & -32 & 128 & 384 & 192 \\ 48 & -32 & -48 & 128 & 192 & 384 \end{bmatrix}$$

行列 κ^y_{ijk} については, 行列 κ^x_{ijk} の係数 α_i を β_i $(i=0,1,2)$ と置き換えれば求まる.
まず, 第 1 成分の第 1 項について離散化した式を考える.

$$\begin{aligned}
\sum_e \iint_e \hat{u}^*\hat{u}\hat{u}_x\,dx\,dy &= \sum_e \iint_e \sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i \sum_{j=0}^{5} u_j\phi_j \sum_{k=0}^{5} u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x}\,dx\,dy \\
&= \sum_e \Big\{ \sum_{i,j,k=0}^{5} u_i^* \Big(\iint_e \phi_i\phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x}\,dx\,dy \Big)\ u_j u_k \Big\} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i,j,k=0}^{5} u_i^* \kappa^x_{ijk}\ u_j u_k \} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa^x_{ijk}\ u_k) u_j \} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} S^{x2}_{ij} u_j \} \\
&= \sum_e \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e .
\end{aligned}$$

第 1 成分の第 2 項についても同様に,

$$\begin{aligned}
\sum_e \iint_e \hat{u}^*\hat{v}\hat{u}_y\,dx\,dy &= \sum_e \iint_e \sum_{i=0}^{5} u_i^*\phi_i \sum_{j=0}^{5} v_j\phi_j \sum_{k=0}^{5} u_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y}\,dx\,dy \\
&= \sum_e \Big\{ \sum_{i,j,k=0}^{5} u_i^* \Big(\iint_e \phi_i\phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial y}\,dx\,dy \Big)\ v_j u_k \Big\} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa^y_{ijk}\ u_k) v_j \} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} S^{y2}_{ij} v_j \} \\
&= \sum_e \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e .
\end{aligned}$$

第２成分の第１項についても同様に,

$$\begin{aligned}
\sum_e \iint_e \hat{v}^*\hat{u}\hat{v}_x \, dx\, dy &= \sum_e \iint_e \sum_{i=0}^{5} v_i^* \phi_i \sum_{j=0}^{5} u_j \phi_j \sum_{k=0}^{5} v_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \, dx\, dy \\
&= \sum_e \Big\{ \sum_{i,j,k=0}^{5} v_i^* \Big(\iint_e \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \, dx\, dy \Big) \, u_j v_k \Big\} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \, v_k) u_j \} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{x2} u_j \} \\
&= \sum_e \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e .
\end{aligned}$$

第２成分の第２項についても同様に,

$$\begin{aligned}
\sum_e \iint_e \hat{v}^*\hat{v}\hat{v}_y \, dx\, dy &= \sum_e \iint_e \sum_{i=0}^{5} v_i^* \phi_i \sum_{j=0}^{5} v_j \phi_j \sum_{k=0}^{5} v_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \, dx\, dy \\
&= \sum_e \Big\{ \sum_{i,j,k=0}^{5} v_i^* \Big(\iint_e \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \, dx\, dy \Big) \, v_j v_k \Big\} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \, v_k) v_j \} \\
&= \sum_e \{ \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{y2} v_j \} \\
&= \sum_e \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e .
\end{aligned}$$

これより Navier-Stokes 方程式を離散化したときの弱形式は,

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_e \hat{\mathbf{u}}_e^{*^T} \Big\{ \nu\rho \hat{A}_e \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{B}_e \hat{\mathbf{p}}_e - \rho \hat{D}_e \hat{\mathbf{f}}_e + (\hat{S}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e + \hat{S}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e) \Big\} &= 0, \\
\displaystyle\sum_e \hat{\mathbf{v}}_e^{*^T} \Big\{ \nu\rho \hat{A}_e \hat{\mathbf{v}}_e - \hat{C}_e \hat{\mathbf{p}}_e - \rho \hat{D}_e \hat{\mathbf{g}}_e + (\hat{T}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e + \hat{T}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e) \Big\} &= 0, \\
\displaystyle\sum_e \hat{\mathbf{p}}_e^{*^T} \Big\{ -\hat{B}_e{}^T \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{C}_e{}^T \hat{\mathbf{v}}_e \Big\} &= 0.
\end{cases}$$

$\hat{S}_e^{x1}, \hat{S}_e^{x2}, \hat{S}_e^{y1}, \hat{S}_e^{y2}, \hat{T}_e^{x1}, \hat{T}_e^{x2}, \hat{T}_e^{y1}, \hat{T}_e^{y2}$ を拡大して全要素について和をとった行列を $S^{x1}, S^{x2}, S^{y1}, S^{y2}, T^{x1}, T^{x2}, T^{y1}, T^{y2}$ とする.

すると, 直接剛性法により以下のような近似方程式が得られる.

$$\begin{cases}
\nu\rho A\mathbf{u} - B\mathbf{p} - \rho D\mathbf{f} + \rho(S^{x2}\mathbf{u} + S^{y2}\mathbf{v}) &= 0, \\
\nu\rho A\mathbf{v} - C\mathbf{p} - \rho D\mathbf{g} + \rho(T^{x2}\mathbf{u} + T^{y2}\mathbf{v}) &= 0, \\
-B^T\mathbf{u} - C^T\mathbf{v} &= 0.
\end{cases}$$

4.2 Newton 法

近似方程式の非線形項 $\hat{S}_e^{x2}\hat{\mathbf{u}}_e$, $\hat{S}_e^{y2}\hat{\mathbf{v}}_e$, $\hat{T}_e^{x2}\hat{\mathbf{u}}_e$, $\hat{T}_e^{y2}\hat{\mathbf{v}}_e$ において, u_i , v_i に $u_i+\Delta u_i$, $v_i+\Delta v_i$ を代入する.

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_e = [\Delta u_i] \ , \ \Delta\hat{\mathbf{v}}_e = [\Delta v_i]$$

とおく.

また, $\Delta\hat{\mathbf{u}}_e$, $\Delta\hat{\mathbf{v}}_e$ の 2 次の項は切り捨てることにする.

$$\begin{aligned}
& \hat{S}_e^{x2}\hat{\mathbf{u}}_e\Big|_{\hat{\mathbf{u}}_e=\hat{\mathbf{u}}_e+\Delta\hat{\mathbf{u}}_e} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} \Big(\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x (u_k - \Delta u_k) \Big) (u_j - \Delta u_j) \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x u_k) u_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x u_k) \Delta u_j \\
& - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \Delta u_k) u_j + \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \Delta u_k) \Delta u_j \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x u_k) u_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x u_k) \Delta u_j - \sum_{k=0}^{5} (\sum_{j=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \ u_j) \Delta u_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} S_{ij}^{x2} u_j - \sum_{j=0}^{5} S_{ij}^{x2} \Delta u_j - \sum_{k=0}^{5} S_{ik}^{x1} \Delta u_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} \{ S_{ij}^{x2} u_j - S_{ij}^{x2} \Delta u_j - S_{ij}^{x1} \Delta u_j \} \\
= & \ \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{x2} \Delta\hat{\mathbf{u}}_e - \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{x1} \Delta\hat{\mathbf{u}}_e .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \hat{S}_e^{y2}\hat{\mathbf{v}}_e\Big|_{\hat{\mathbf{u}}_e=\hat{\mathbf{u}}_e+\Delta\hat{\mathbf{u}}_e\ ,\ \hat{\mathbf{v}}_e=\hat{\mathbf{v}}_e+\Delta\hat{\mathbf{v}}_e} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} \Big(\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y (u_k - \Delta u_k) \Big) (v_j - \Delta v_j) \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y u_k) v_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y u_k) \Delta v_j \\
& - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \Delta u_k) v_j + \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \Delta u_k) \Delta v_j \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y u_k) v_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y u_k) \Delta v_j - \sum_{k=0}^{5} (\sum_{j=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \ v_j) \Delta u_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} S_{ij}^{y2} v_j - \sum_{j=0}^{5} S_{ij}^{y2} \Delta v_j - \sum_{k=0}^{5} T_{ik}^{y1} \Delta u_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} u_i^* \sum_{j=0}^{5} \{ S_{ij}^{y2} v_j - S_{ij}^{y2} \Delta v_j - T_{ij}^{y1} \Delta u_j \} \\
= & \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e - \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{S}_e^{y2} \Delta\hat{\mathbf{v}}_e - \hat{\mathbf{u}}_e^{*T} \hat{T}_e^{y1} \Delta\hat{\mathbf{u}}_e .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \hat{T}_e^{x2}\hat{\mathbf{u}}_e\Big|_{\hat{\mathbf{u}}_e=\hat{\mathbf{u}}_e+\Delta\hat{\mathbf{u}}_e\ ,\ \hat{\mathbf{v}}_e=\hat{\mathbf{v}}_e+\Delta\hat{\mathbf{v}}_e} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} \Big(\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x (v_k - \Delta v_k) \Big) (u_j - \Delta u_j) \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x v_k) u_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x v_k) \Delta u_j \\
& - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \Delta v_k) u_j + \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \Delta v_k) \Delta u_j \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x v_k) u_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^x v_k) \Delta u_j - \sum_{k=0}^{5} (\sum_{j=0}^{5} \kappa_{ijk}^x \ u_j) \Delta v_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{x2} u_j - \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{x2} \Delta u_j - \sum_{k=0}^{5} S_{ik}^{x1} \Delta v_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} \{ T_{ij}^{x2} u_j - T_{ij}^{x2} \Delta u_j - S_{ij}^{x1} \Delta v_j \} \\
= & \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{x2} \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{x2} \Delta\hat{\mathbf{u}}_e - \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{S}_e^{x1} \Delta\hat{\mathbf{v}}_e .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \hat{T}_e^{y2}\hat{\mathbf{v}}_e\Big|_{\hat{\mathbf{v}}_e=\hat{\mathbf{v}}_e+\Delta\hat{\mathbf{v}}_e} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} \Big(\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y (v_k - \Delta v_k) \Big) (v_j - \Delta v_j) \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y v_k) v_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y v_k) \Delta v_j \\
& - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \Delta v_k) v_j + \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \Delta v_k) \Delta v_j \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y v_k) v_j - \sum_{j=0}^{5} (\sum_{k=0}^{5} \kappa_{ijk}^y v_k) \Delta v_j - \sum_{k=0}^{5} (\sum_{j=0}^{5} \kappa_{ijk}^y \ v_j) \Delta v_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \Big\{ \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{y2} v_j - \sum_{j=0}^{5} T_{ij}^{y2} \Delta v_j - \sum_{k=0}^{5} T_{ik}^{y1} \Delta v_k \Big\} \\
= & \sum_{i=0}^{5} v_i^* \sum_{j=0}^{5} \{ T_{ij}^{y2} v_j - T_{ij}^{y2} \Delta v_j - T_{ij}^{y1} \Delta v_j \} \\
= & \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{y2} \hat{\mathbf{v}}_e - \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{y2} \Delta\hat{\mathbf{v}}_e - \hat{\mathbf{v}}_e^{*T} \hat{T}_e^{y1} \Delta\hat{\mathbf{v}}_e.
\end{aligned}
$$

定常 Navier-Stokes 方程式に対する近似方程式は,

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\nu\rho A\mathbf{u} - B\mathbf{p} - \rho D\mathbf{f} + \rho(S^{x2}\mathbf{u} + S^{y2}\mathbf{v}) & = & 0, \\
\nu\rho A\mathbf{v} - C\mathbf{p} - \rho D\mathbf{g} + \rho(T^{x2}\mathbf{u} + T^{y2}\mathbf{v}) & = & 0, \\
-B^T\mathbf{u} - C^T\mathbf{v} & = & 0.
\end{array}
\right.
$$

この近似方程式を解くことができれば, Navier-Stokes 方程式の数値解を得られる. しかし, 非線形であるので Stokes 方程式の様に連立 1 次方程式に帰着できない. そこで, Stokes 方程式の数値解を初期値として Newton 法を用いることで Navier-Stokes 方程式の数値解を求める.

Stokes 方程式の数値解を $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{p}^0)$ とする.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^0 - \Delta\mathbf{u}^0, \\
\mathbf{v}^1 &= \mathbf{v}^0 - \Delta\mathbf{v}^0, \\
\mathbf{p}^1 &= \mathbf{p}^0 - \Delta\mathbf{p}^0,
\end{aligned}
$$

とおき, $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1, \mathbf{p}^1)$ を近似方程式の $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p})$ に代入する.
ただし, $\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\mathbf{v}^0, \Delta\mathbf{p}^0$ の 2 次の項は切り捨てる.

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\nu\rho A(\mathbf{u}^0 - \Delta\mathbf{u}^0) - B(\mathbf{p}^0 - \Delta\mathbf{p}^0) - \rho D\mathbf{f} & & \\
\quad + \rho(S^{x2}\mathbf{u}^0 - S^{x2}\Delta\mathbf{u}^0 - S^{x1}\Delta\mathbf{u}^0) + \rho(S^{y2}\mathbf{v}^0 - S^{y2}\Delta\mathbf{v}^0 - T^{y1}\Delta\mathbf{u}^0) & = & 0, \\
\nu\rho A(\mathbf{v}^0 - \Delta\mathbf{v}^0) - C(\mathbf{p}^0 - \Delta\mathbf{p}^0) - \rho D\mathbf{g} & & \\
\quad + \rho(T^{x2}\mathbf{u}^0 - T^{x2}\Delta\mathbf{u}^0 - S^{x1}\Delta\mathbf{v}^0) + \rho(T^{y2}\mathbf{v}^0 - T^{y2}\Delta\mathbf{v}^0 - T^{y1}\Delta\mathbf{v}^0) & = & 0, \\
-(B^T\mathbf{u}^0 - B^T\Delta\mathbf{u}^0) - (C^T\mathbf{v}^0 - C^T\Delta\mathbf{v}^0) & = & 0.
\end{array}
\right.
$$

これを $\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\mathbf{v}^0, \Delta\mathbf{p}^0$ について整理する.

$$
\begin{cases}
\rho S^{y2}\Delta\mathbf{v}^0 - B\Delta\mathbf{p}^0 & & \\
\quad +\rho(\nu A + S^{x1} + S^{x2} + T^{y1})\Delta\mathbf{u}^0 & = & \rho(\nu A + S^{x2})\mathbf{u}^0 + \rho S^{y2}\mathbf{v}^0 - B\mathbf{p}^0 - \rho D\mathbf{f}, \\
\rho T^{x2}\Delta\mathbf{u}^0 - C\Delta\mathbf{p}^0 & & \\
\quad +\rho(\nu A + S^{x1} + T^{y1} + T^{y2})\Delta\mathbf{v}^0 & = & \rho T^{x2}\mathbf{u}^0 + \rho(\nu A + T^{y2})\mathbf{v}^0 - C\mathbf{p}^0 - \rho D\mathbf{g}, \\
\qquad -B^T\Delta\mathbf{u}^0 - C^T\Delta\mathbf{v}^0 & = & -B^T\mathbf{u}^0 - C^T\mathbf{v}^0.
\end{cases}
$$

上の式は $(\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\mathbf{v}^0, \Delta\mathbf{p}^0)$ に関する連立一次方程式になっている. $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{p}^0$ は既知であるので右辺は既知量である.

よって, これを解くことで $(\Delta\mathbf{u}^0, \Delta\mathbf{v}^0, \Delta\mathbf{p}^0)$ が求まり, 第 1 ステップの近似値 $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1, \mathbf{p}^1)$ を得る.

第 1 ステップの近似値 $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1, \mathbf{p}^1)$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^2 &= \mathbf{u}^1 - \Delta\mathbf{u}^1, \\
\mathbf{v}^2 &= \mathbf{v}^1 - \Delta\mathbf{v}^1, \\
\mathbf{p}^2 &= \mathbf{p}^1 - \Delta\mathbf{p}^1,
\end{aligned}
$$

とおき, 近似方程式に代入すれば, 同様にして $(\Delta\mathbf{u}^1, \Delta\mathbf{v}^1, \Delta\mathbf{p}^1)$ が求まるので, 第 2 ステップ目の近似値 $(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2, \mathbf{p}^2)$ を得る. 以上の作業を繰り返すことにより, より厳密解に近い近似値が計算できる. (Newton 法)

最初の近似値, すなわち Stokes 方程式の解より出発して, 最終的には許容誤差内に入った時で反復を打ち切り, その時の近似値を Navier-Stokes 方程式の数値解とする.

よって Navier-Stokes 方程式の数値解を求めることができたので, 次節では具体例を挙げて数値実験を行う.

5　数値実験

5.1　実験の問題設定

Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} -\triangle \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= 0 & \text{in } \Omega, \\ -\text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

について考える. ($\nu = \rho = 1, \mathbf{f} = 0$ とした)
領域 Ω を以下のような円環領域とする.

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; a < |\mathbf{x}| < 1\}.$$

ただし a は $0 < a < 1$ をみたす定数である. また, Γ_1 , Γ_2 を次のようにおくと,

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = a\},$$

$$\Gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{x}| = 1\},$$

境界 $\partial\Omega$ は $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ となる.
また境界値, $\mathbf{b}(x, y)$ は Gauss の発散定理

$$\iint_\Omega \text{div } \mathbf{u}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS,$$

により, 条件

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0.$$

をみたさなければならない. この条件のことを一般流束条件という.
各 i $(i = 1, 2)$ について

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$$

をみたすならば, 一般流束条件をみたす. このときは Navier-Stokes 方程式の解の存在が解析的に示されている. (H.Fujita , O.A.Ladyzhenskaya)
しかし, この条件が成立せず, 一般流束条件のみが成立する場合は, 解が一般的にあるかどうかは知られていない. そこで, 境界値が特殊な場合 2 通りについて数値実験を行う.

5.1.1　数値実験１

Navier-Stokes 方程式と領域は上の通りで, 境界値を次のようにする.

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{R_i}\mathbf{e}_r + R_i\omega_i\mathbf{e}_\theta \quad \text{on } \Gamma_i \quad (\ \mu \neq 0\ ,\ i = 1, 2),$$

ただし, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は動径方向, 偏角方向の単位ベクトル, μ , ω_1 , ω_2 は与えられた定数, $R_1 = a$, $R_2 = 1$ とする.

このとき以下のような厳密解 u_0 が存在することが知られている. (H.Morimoto[7])

$$u_0 = \frac{\mu}{r}\mathbf{e}_r + b(\mu, r)\mathbf{e}_\theta.$$

ここで, r は各点の原点からの距離で, $b(\mu, r)$ は μ の値によって以下のように変わる.
(1) $\mu \neq -2\nu$ のとき,

$$b(\mu, r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^{1+\frac{\mu}{\nu}},$$

$$c_1 = \frac{\omega_1 a^2 - \omega_2 a^{2+\frac{\mu}{\nu}}}{1 - a^{2+\frac{\mu}{\nu}}}\ ,\ c_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1 a^2}{1 - a^{2+\frac{\mu}{\nu}}}.$$

(2) $\mu = -2\nu$ のとき,

$$b(\mu, r) = \frac{1}{r}(c_1 + c_2 \log r),$$

$$c_1 = \omega_2\ ,\ c_2 = \frac{\omega_1 a^2 - \omega_2}{\log a}.$$

また, このようにした $\mathbf{b}$ は一般流束条件のみをみたす.
なぜなら, 外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ が

$$\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{e}_r & \text{on } \Gamma_1 \\ \mathbf{e}_r & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\mu}{a}\mathbf{e}_r + a\omega_i \mathbf{e}_\theta\right)\cdot(-\mathbf{e}_r)\, dS \\ &= -\int_{\Gamma_1} \frac{\mu}{a}\, dS = -\int_0^{2\pi} \frac{\mu}{a} a\, d\theta \\ &= -2\pi\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \int_{\Gamma_2} (\mu\mathbf{e}_r + \omega_i\mathbf{e}_\theta)\cdot\mathbf{e}_r\, dS \\ &= \int_{\Gamma_2} \mu\, dS = \int_0^{2\pi} \mu\, d\theta \\ &= 2\pi\mu. \end{aligned}$$

よって, $\mu \neq 0$ ならば, 一般流束条件のみをみたす.

実験1としては, $a = 0.5$ を固定して, パラメータ μ, ω_1, ω_2 を動かして考える. このとき, 数値解の様子を確認するとともに, 有限要素法における要素分割数と, 数値解と厳密解との誤差の関係を図示してみる.

5.1.2　数値実験２

今度は, 実験１で考えた境界値に摂動 $\varphi_i(\theta)$, $\psi_i(\theta)$ を加えた場合を考える.

$$\mathbf{b} = \Big(\frac{\mu}{R_i} + \varphi_i(\theta)\Big)\mathbf{e}_r + (R_i\omega_i + \psi_i(\theta))\mathbf{e}_\theta \quad \text{on } \Gamma_i \quad (i = 1, 2),$$

ただし, $\varphi_i(\theta)$, $\psi_i(\theta)$ は周期 2π の滑らかな関数で, 以下の条件をみたす.

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i(\theta)d\theta = 0 \ , \quad \int_0^{2\pi} \psi_i(\theta)d\theta = 0$$

摂動を加えた場合も, 同様に $\mu \neq 0$ ならば一般流束条件のみをみたす.
このとき, $\nu, a, \omega_1, \omega_2$ が以下の条件

$$|\omega_1 - \omega_2|\frac{a^2}{1-a^2}(\log a)^2 < 2\nu$$

をみたしている場合, ある１次元可算集合 M が存在して, 任意の $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ に対し, φ_i , ψ_i $(i = 1, 2)$ が十分小さいならば Navier-Stokes 方程式の解が存在することが示されている. (H.Morimoto and S.Ukai[8])
実験２としては,

$$a = 0.5 \ , \ (\varphi_i(\theta), \psi_i(\theta)) = (AR_i\cos\theta, BR_i\sin\theta) \quad (i = 1, 2 \ , \ A \text{ と } B \text{ は任意の実数})$$

と固定して考える. このとき, パラメータ $\mu, \omega_1, \omega_2, A, B$ を動かした場合の数値解の存在と様子を調べる. また, 条件式を ω_1, ω_2 について整理すると

$$|\omega_1 - \omega_2| < \frac{6}{(\log 2)^2} \fallingdotseq 12.488$$

となるので, この式をみたす範囲とみたさない範囲両方について調べる.

5.2　実験結果

5.2.1　数値実験１の結果

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{R_i}\mathbf{e}_r + R_i\omega_i\mathbf{e}_\theta \quad \text{on } \Gamma_i \quad (i = 1, 2),$$

境界値 $\mathbf{b}$ が上記のとき,
[case 1-1] $\mu = \omega_1 = \omega_2 = 1$
[case 1-2] $\mu = 10$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$
[case 1-3] $\mu = 1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 7$
[case 1-4] $\mu = 1$, $\omega_1 = -10$, $\omega_2 = 10$
の４つの場合について, 流速のベクトル場と等圧線, 加えて厳密解と数値解の誤差と, 要素分割数との関係について図示してみる.
ただし, 流速については見やすくするために長さを d 倍に調整し, 圧力については高低がわかるように色をつけた. (倍率 d は各グラフに併記 , 圧力の高低は 青 < 水 < 緑 < 深紅 < 赤 , 実線 < 点線 とした.)

[case 1-1] $(\mu = \omega_1 = \omega_2 = 1)$ **の場合**

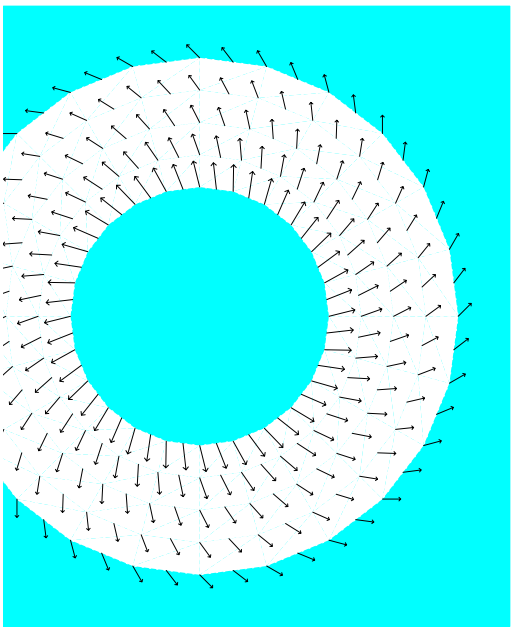


図 1: 数値解の流速 (d = 0.05)

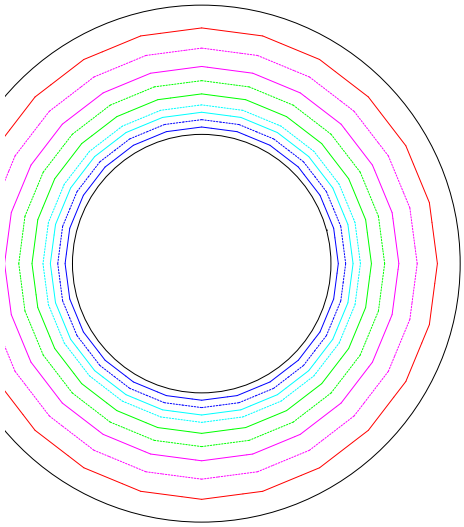


図 2: 数値解の等圧線

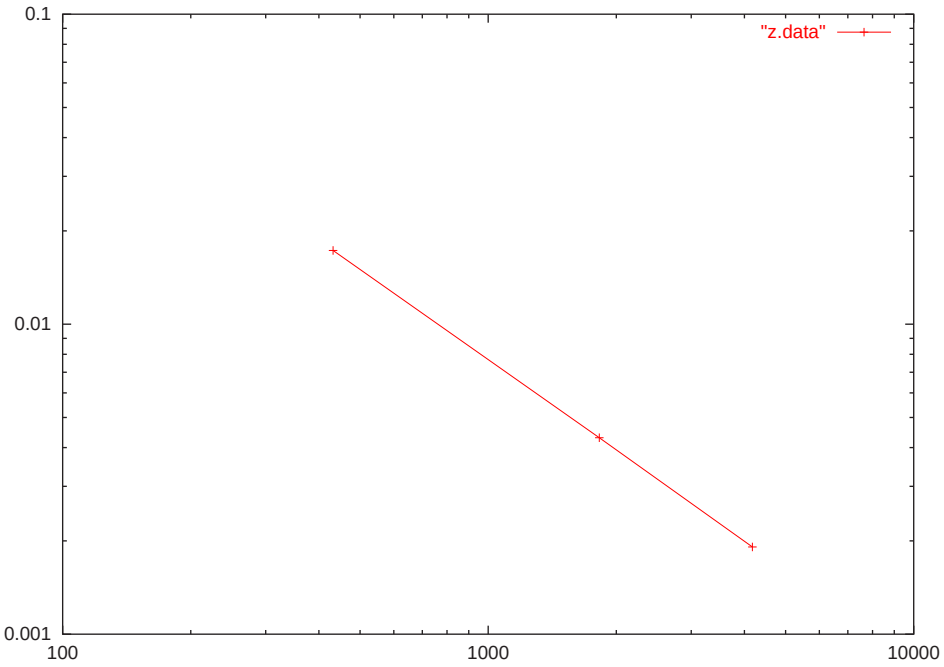


図 3: 要素分割数 (横軸) と誤差 (縦軸) を両側対数グラフ上にプロット

[case 1-2] $(\mu = 10\ ,\ \omega_1 = \omega_2 = 1)$ **の場合**

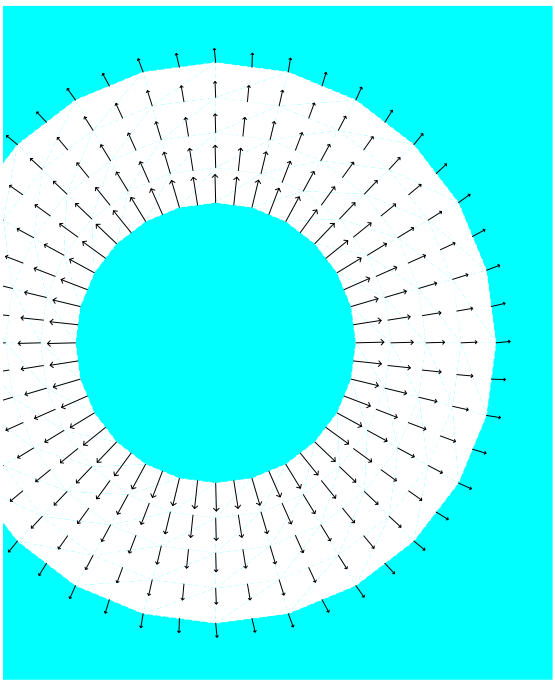


図 4: 数値解の流速 (d = 0.005)

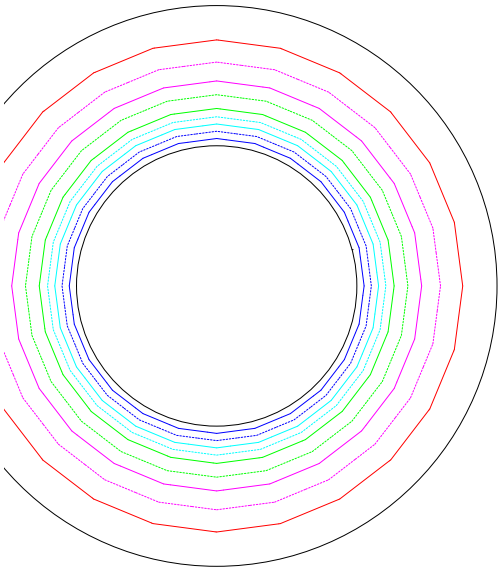


図 5: 数値解の等圧線

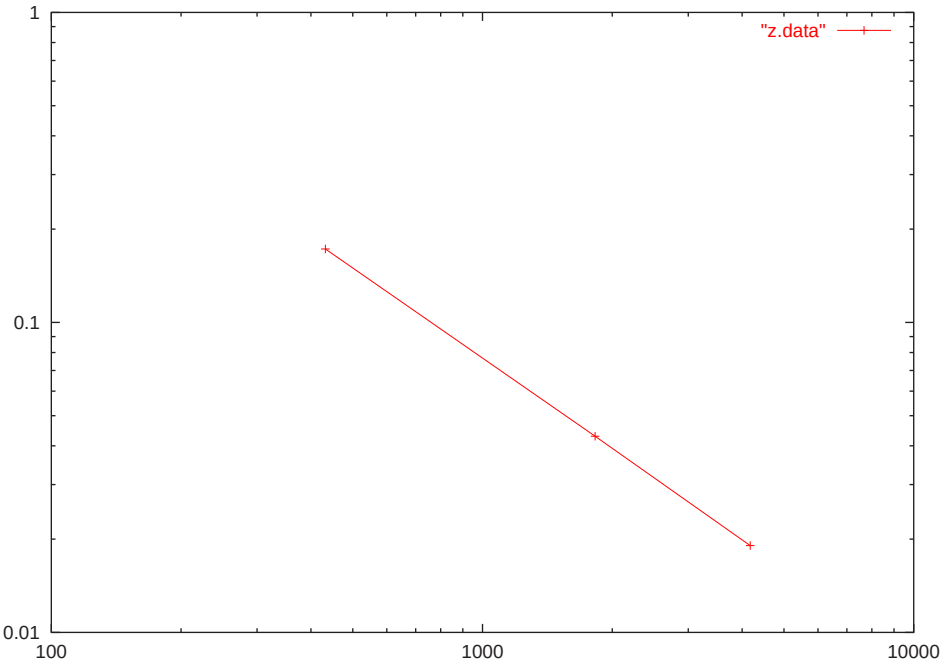


図 6: 要素分割数 (横軸) と誤差 (縦軸) を両側対数グラフ上にプロット

[case 1-3] $(\mu = 1\ ,\ \omega_1 = 3\ ,\ \omega_2 = 7)$ **の場合**

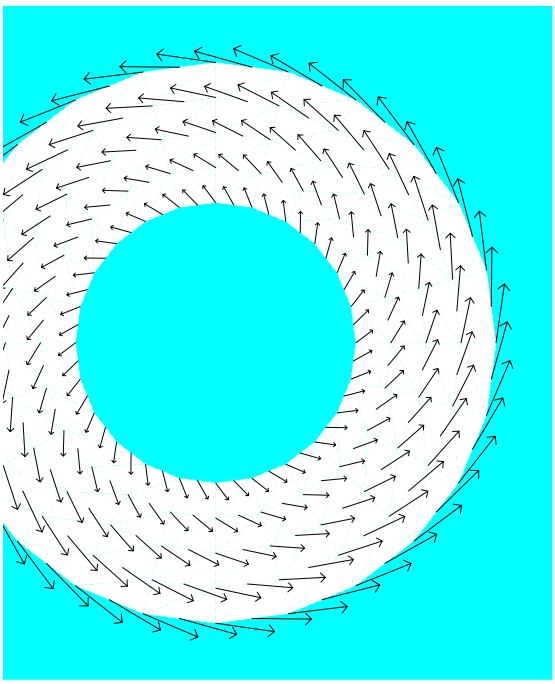


図 7: 数値解の流速 $(\mathrm{d} = 0.03)$

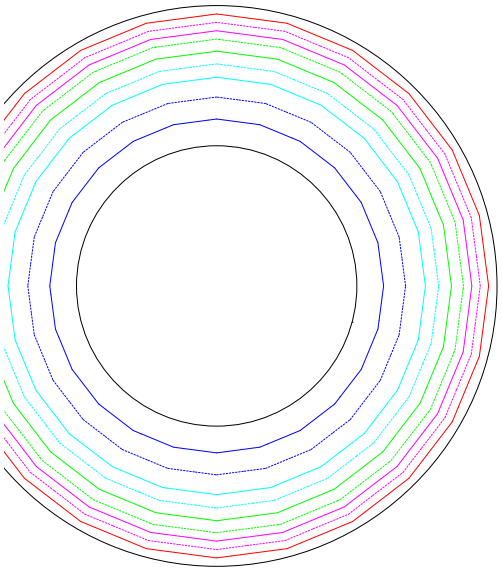


図 8: 数値解の等圧線

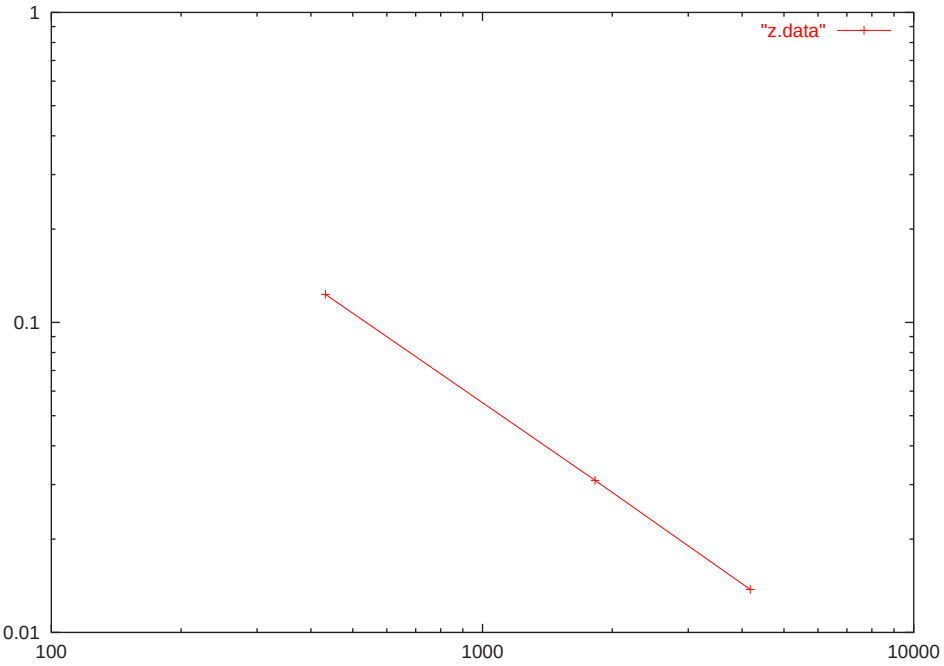


図 9: 要素分割数 (横軸) と誤差 (縦軸) を両側対数グラフ上にプロット

[case 1-4] $(\mu = 1\ ,\ \omega_1 = -10\ ,\ \omega_2 = 10)$ **の場合**

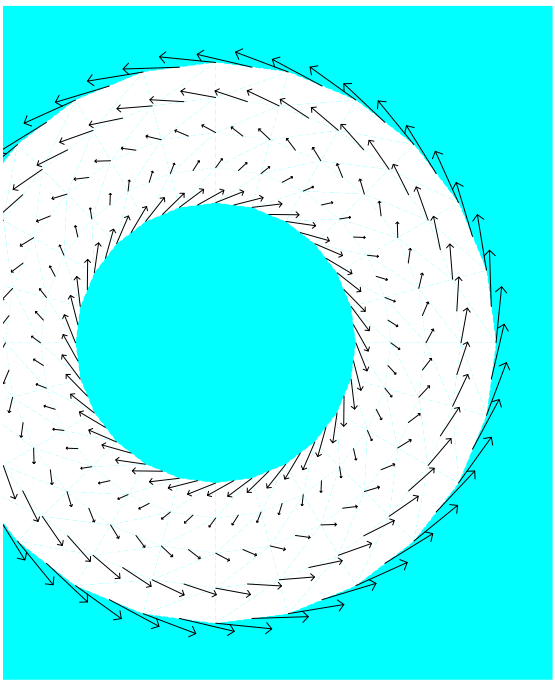


図 10: 数値解の流速 (d = 0.02)

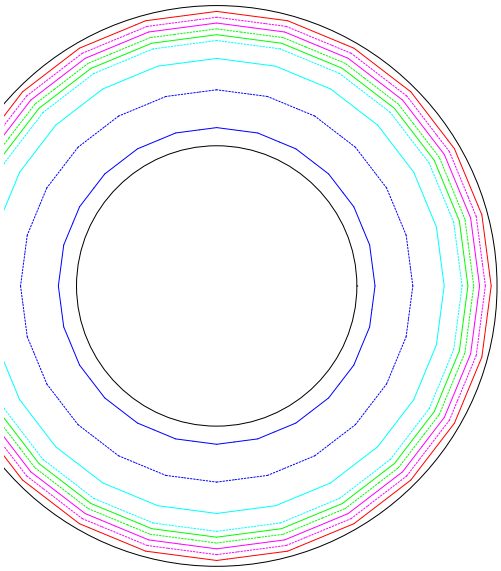


図 11: 数値解の等圧線

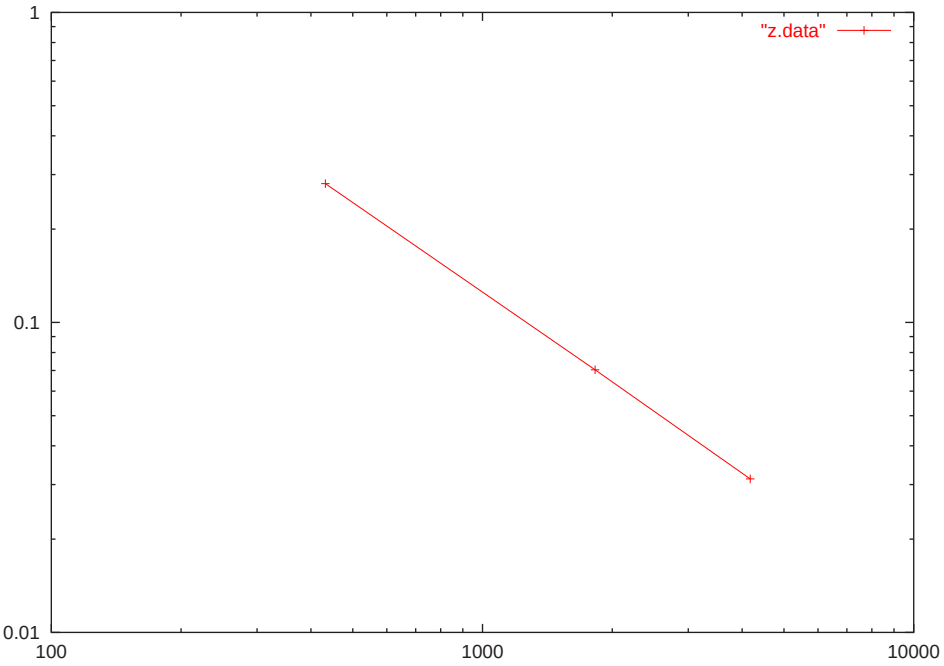


図 12: 要素分割数 (横軸) と誤差 (縦軸) を両側対数グラフ上にプロット

5.3 数値実験２の結果

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \Big(\frac{\mu}{R_i} + AR_i\cos\theta\Big)\mathbf{e}_r \\ &\quad +(R_i\omega_i + BR_i\sin\theta)\mathbf{e}_\theta \ \text{ on } \Gamma_i \ \ (i=1,2),\end{aligned}$$

境界値 $\mathbf{b}$ が上記のとき,

[case 2-1] $\mu = \omega_1 = \omega_2 = 1$

[case 2-2] $\mu = 10$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$

[case 2-3] $\mu = 1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 7$

[case 2-4] $\mu = 1$, $\omega_1 = -10$, $\omega_2 = 10$

の４つの場合について, 摂動の係数 A, B を $A = B = 0.01$, 0.1 , 1 , 10 としたときの流速のベクトル場と等圧線を描画する.

このとき, [case 1-1] , [case 1-2] , [case 1-3] は解の存在条件をみたしているが, [case 1-4] は条件をみたしていない.

また実験１と同様に, 流速については見やすくするために長さを d 倍に調整し, 圧力については高低がわかるように色をつけた.

[case 2-1] において $A = B = 0.01$ の場合

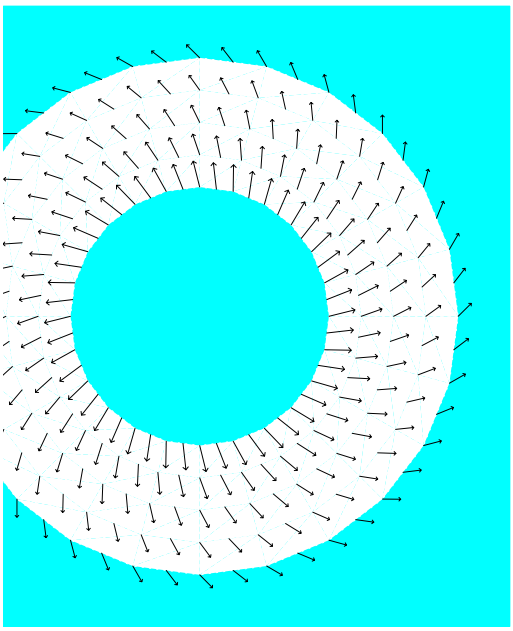
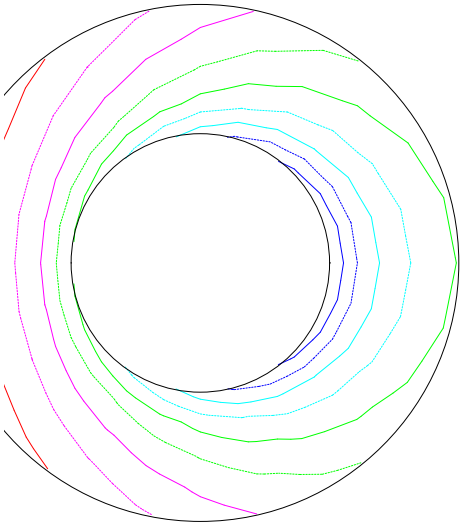


図 13: 流速 (d = 0.05)



,

図 14: 等圧線

[case 2-1] において $A = B = 0.1$ の場合

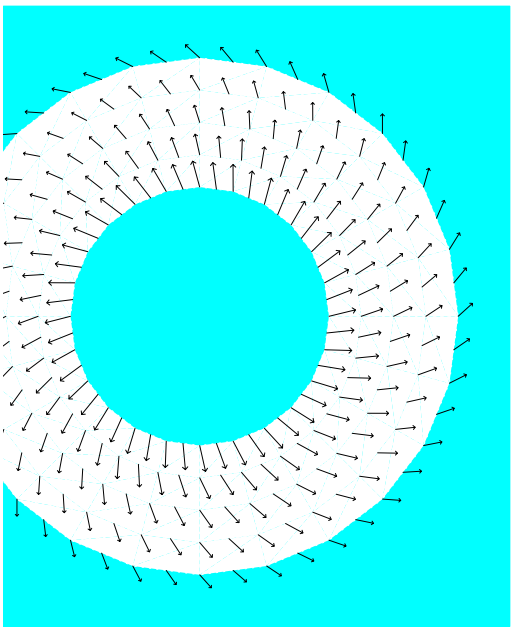
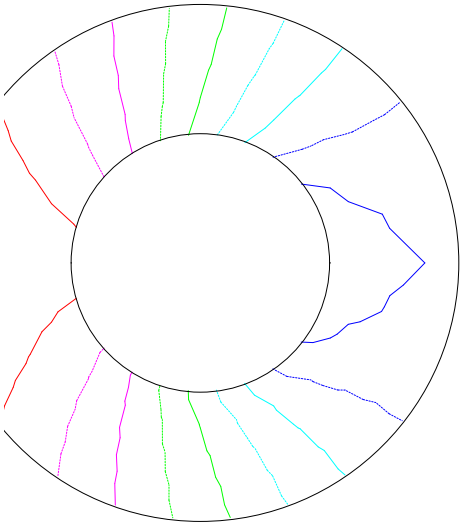


図 15: 流速 (d = 0.05)



,

図 16: 等圧線

[case 2-1] において $A = B = 1$ の場合

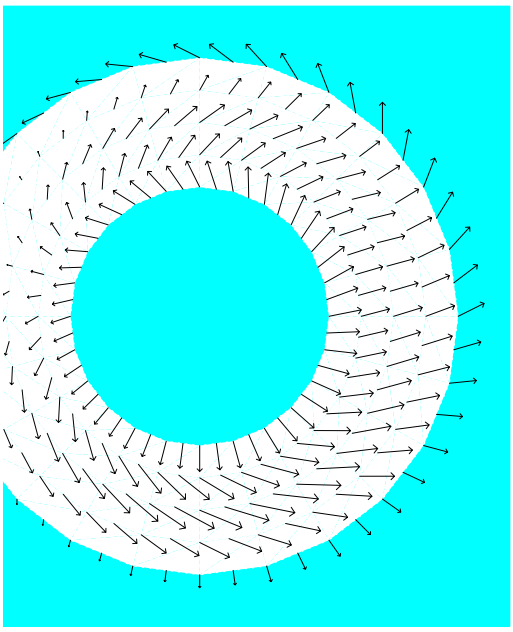
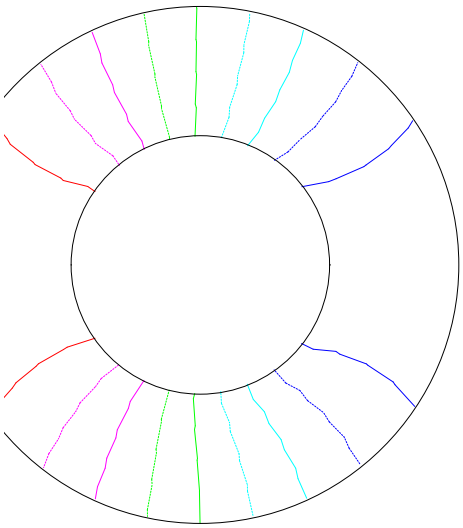


図 17: 流速 (d = 0.05)



,

図 18: 等圧線

[case 2-1] において $A = B = 10$ の場合

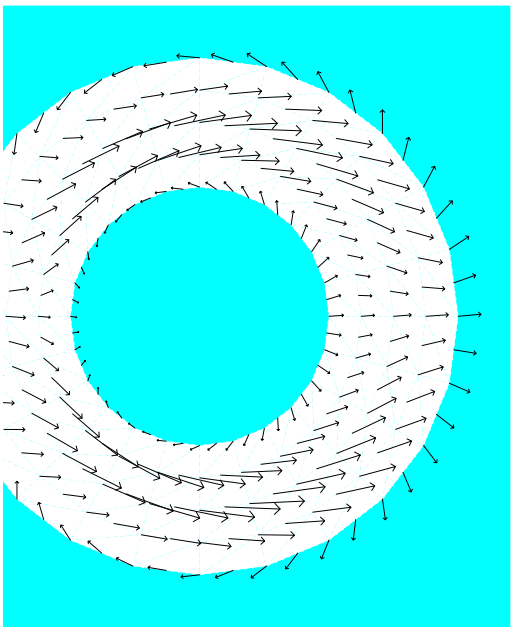
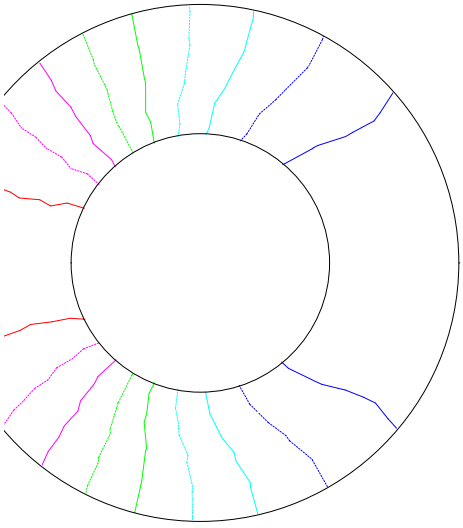


図 19: 流速 (d = 0.008)



,

図 20: 等圧線

[case 2-2] において $A = B = 0.01$ の場合

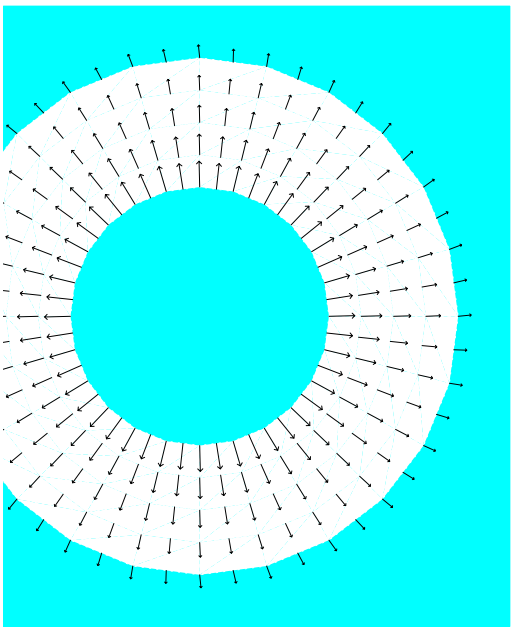
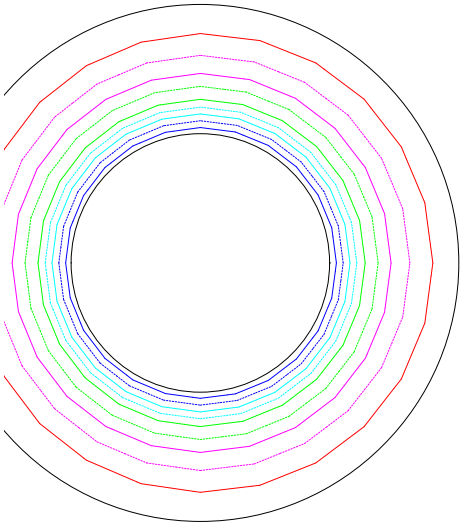


図 21: 流速 (d = 0.005)



,

図 22: 等圧線

[case 2-2] において $A = B = 0.1$ の場合

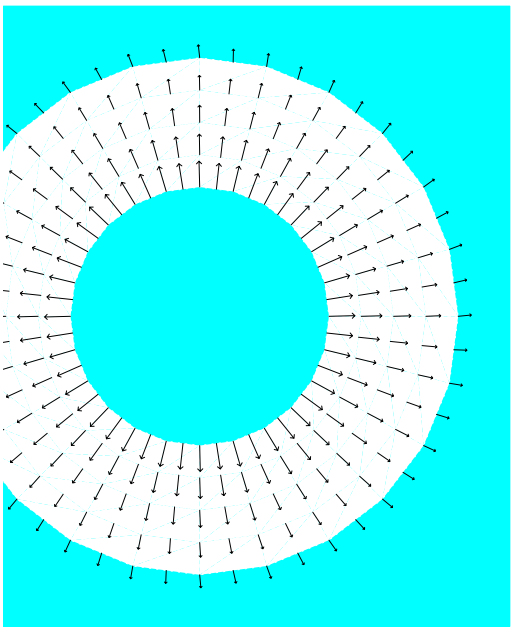
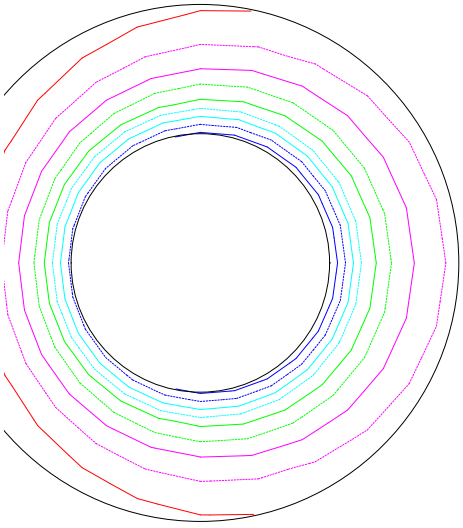


図 23: 流速 (d = 0.005)



,

図 24: 等圧線

[case 2-2] において $A = B = 1$ の場合

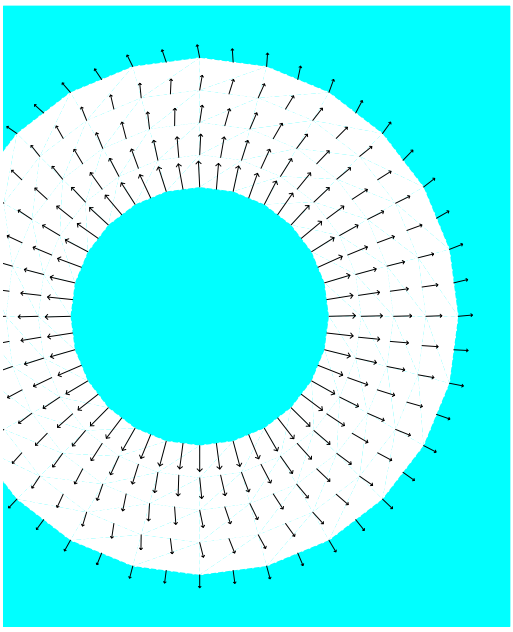
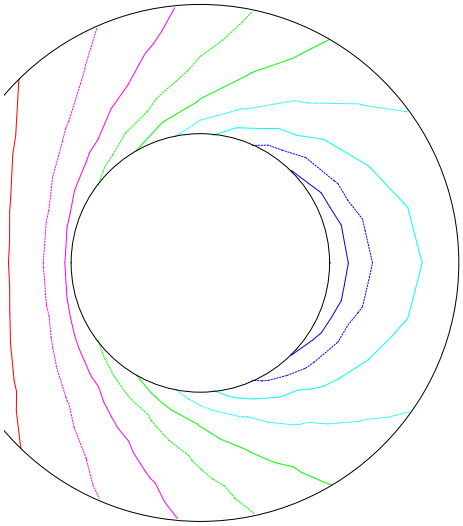


図 25: 流速 (d = 0.005)



,

図 26: 等圧線

[case 2-2] において $A = B = 10$ の場合

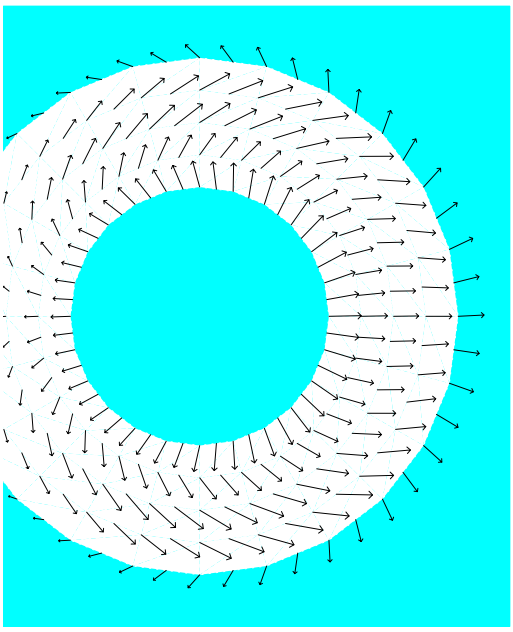
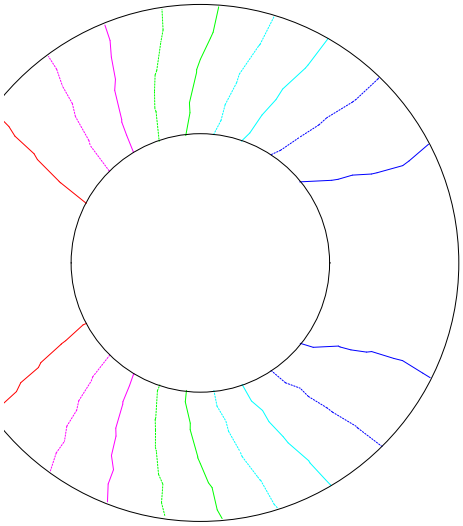


図 27: 流速 (d = 0.005)



,

図 28: 等圧線

[case 2-3] において $A = B = 0.01$ の場合

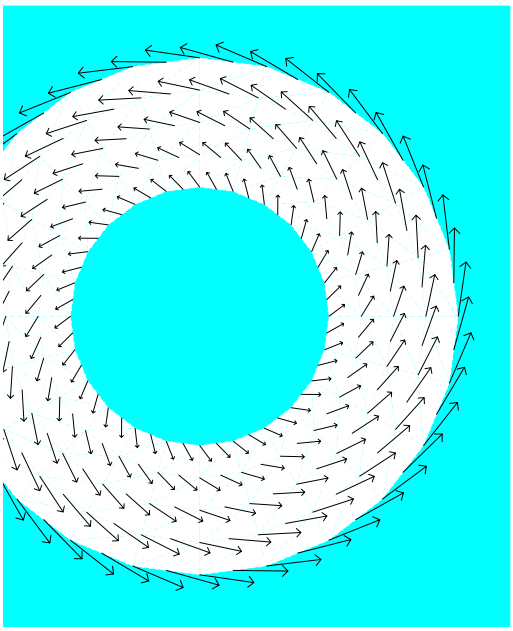
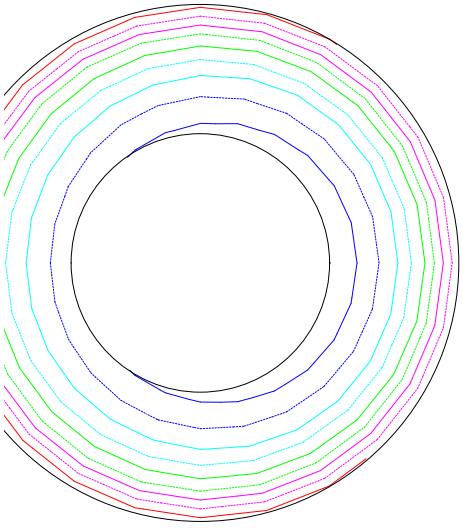


図 29: 流速 (d = 0.03)



,

図 30: 等圧線

[case 2-3] において $A = B = 0.1$ の場合

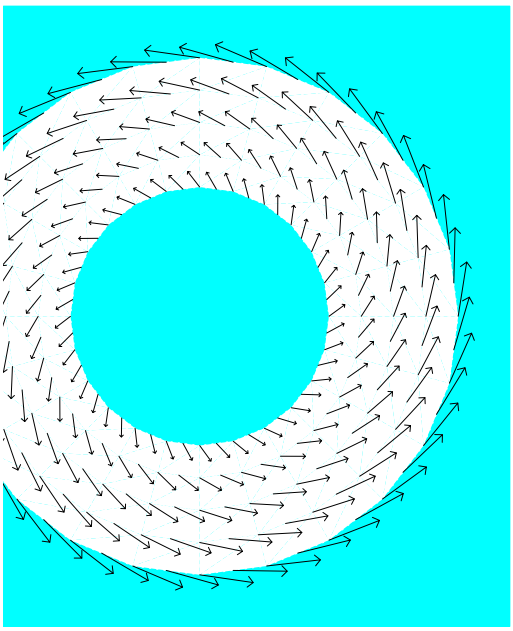
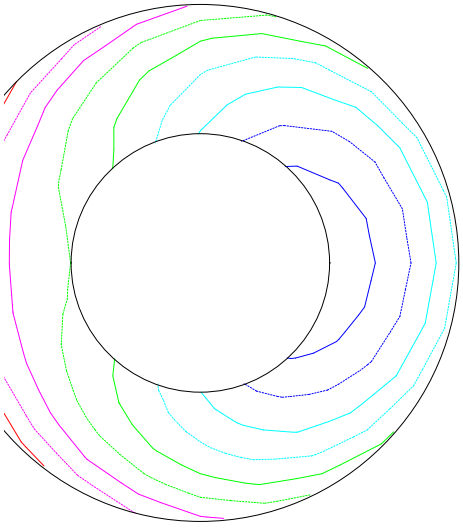


図 31: 流速 (d = 0.03)



,

図 32: 等圧線

[case 2-3] において $A = B = 1$ の場合

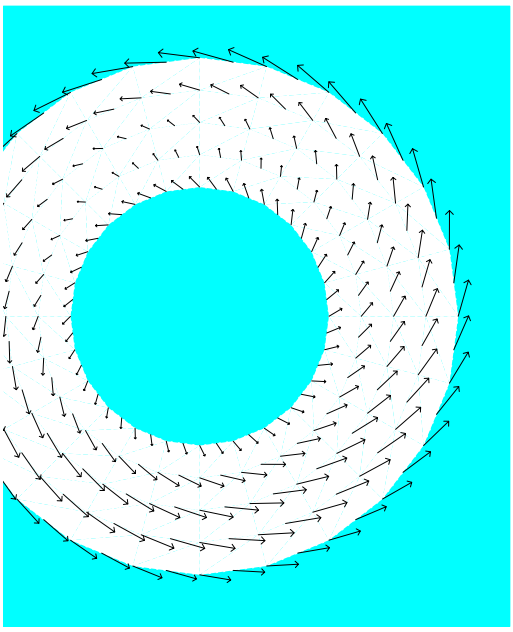
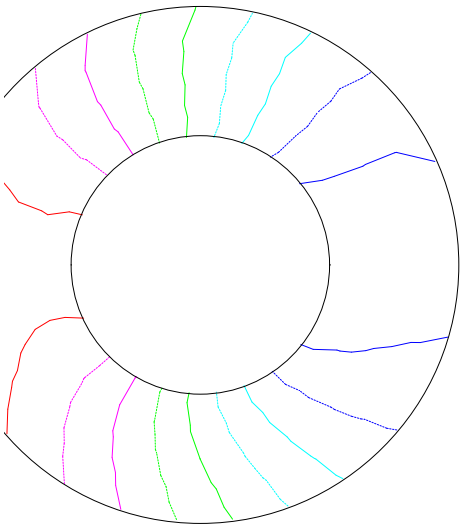


図 33: 流速 (d = 0.02)



,

図 34: 等圧線

[case 2-3] において $A = B = 10$ の場合

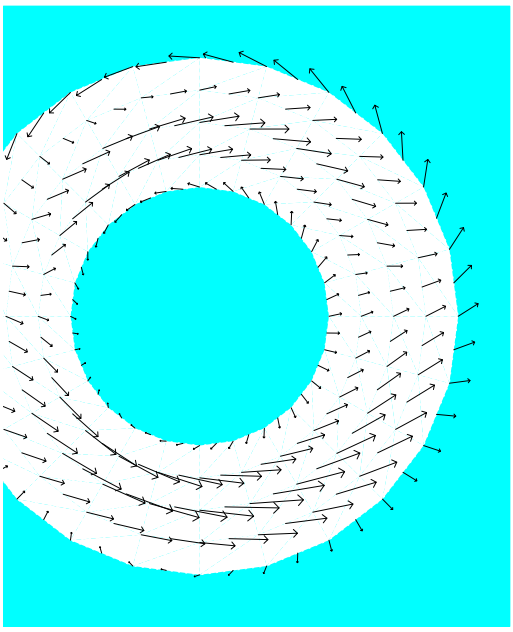
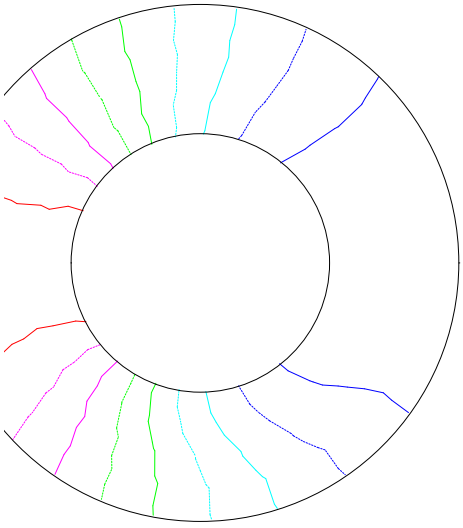


図 35: 流速 (d = 0.007)



,

図 36: 等圧線

[case 2-4] において $A = B = 0.01$ の場合

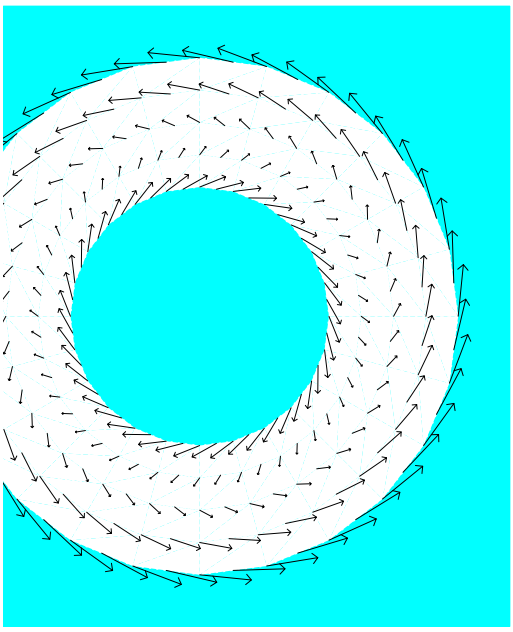
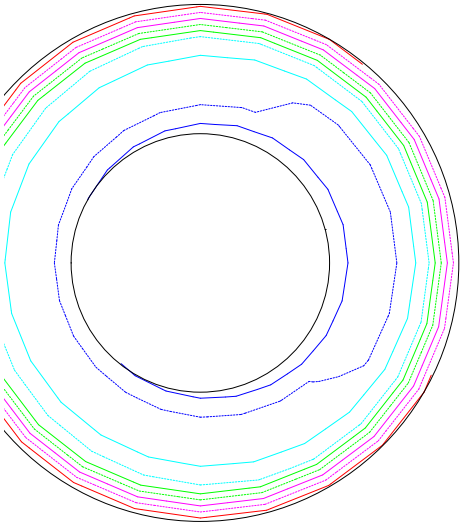


図 37: 流速 (d = 0.02)



,

図 38: 等圧線

[case 2-4] において $A = B = 0.1$ の場合

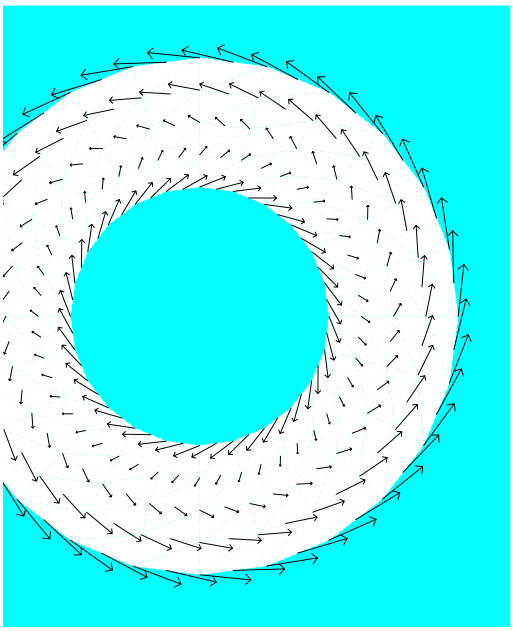
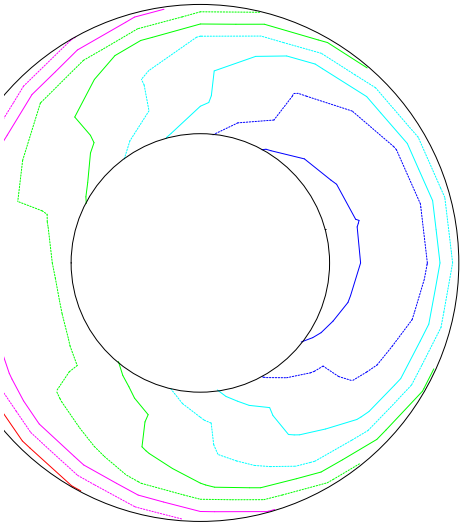


図 39: 流速 (d = 0.02)



,

図 40: 等圧線

[case 2-4] において $A = B = 1$ の場合

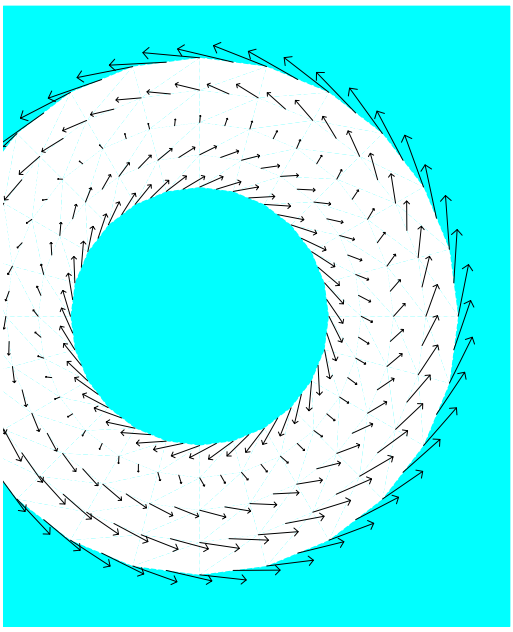
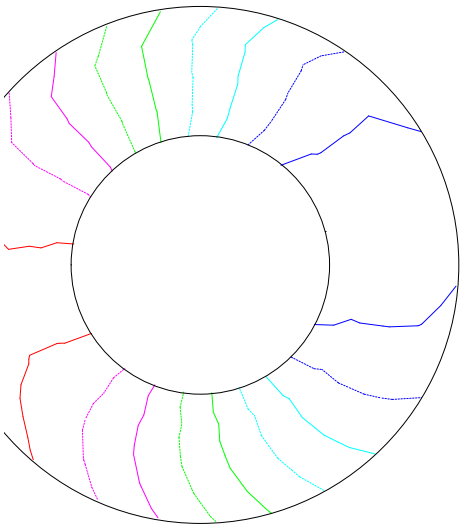


図 41: 流速 (d = 0.02)



,

図 42: 等圧線

[case 2-4] において $A = B = 10$ の場合

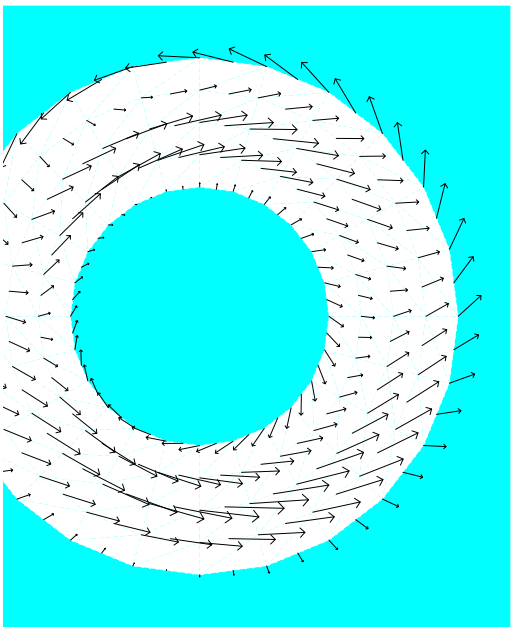
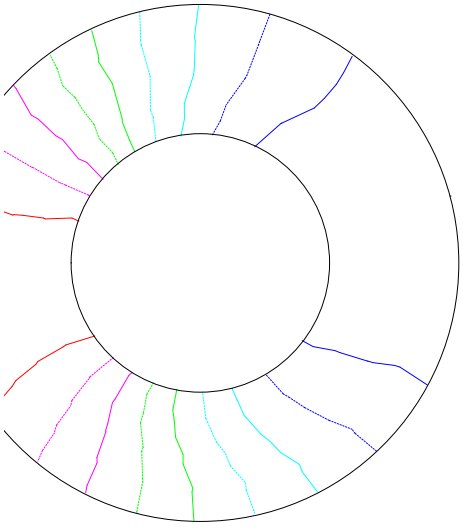


図 43: 流速 (d = 0.008)



,

図 44: 等圧線

5.4 結果のまとめ

実験１について, どの場合でも厳密解と数値解の誤差と, 要素分割数を対数グラフ上にプロットすると直線状に分布していた. その傾きが大体 $-1/2$ であることから, 要素分割数が大きくなると誤差は $-1/2$ のオーダーで減少していく. すなわち, 要素の直径 h が小さくなると, 誤差は h^2 のオーダーで減少していくといえる.

実験２について, どの場合でも数値解が存在しているので, 解の存在条件をみたさないところでも解が存在すると推察できる. また, 一部の例で摂動が大きいところで流れが止まる点が出現したり, 同心円状に分布していた圧力が左右に分かれる現象が発生したり興味深い結果を得ることができた.

6 実験で用いたプログラム

本節では, 数値計算を行うために使用したプログラムを紹介する.

[1] 領域分割と境界値作成を行うプログラム annurus.c

[2] Stokes 方程式を解くプログラム stokes-fukushima.c

[3] 行列 $\kappa^x_{ijk}, \kappa^y_{ijk}$ の計算プログラム (Mathematica による)

[4] Navier-Stokes 方程式を解くプログラム navier3-fukushima.c

[5] 流速のベクトル場を描くプログラム fluid3.c

[6] 等圧線を描くプログラム contour.c

[3] は自作, 他のプログラムは全て工藤丈征氏のプログラムが元になっていて, それを桂田 祐史助教授が改良したのをさらに改良した.

6.1 領域分割と境界値作成を行うプログラム

```
 1  /*
 2   * annulus.c --- 円環領域で N-S を解くための入力データを作る。
 3   *               元は File/file.c（工藤氏作成, 桂田先生改良）
 4   *              さらに, 分割数, 摂動を含めた境界値のデータ
 5   *              などが入力できるように改良（福嶋）
 6   *
 7   * たとえば、マニュアルの例題を解くための file.data を作るには
 8   *
 9   *           ccmg annulus.c
10   *           ./annulus file.data
11   *           (ν, ρ＝ 1 1 に固定)
12   *           (func forc = 0 0 に固定)
13   *
14   * init() の factor を 4 にして 2.477431e-03
15   *                      2        3.549791e-02
16   *                      1        4.686050e-01
17   */
18
19  #include <math.h>
20  #include <stdio.h>
21  #include "matutil.h"
22
23  int M; /* M  5 */ /* 動径方向の分割 */
```

```
24  int N; /* N  24 */ /* 偏角方向の分割 */
25  int U; /* 432 */        /* 流速の節点の数　Ｕ＝２Ｎ（２Ｍ－１）*/
26  int P; /* 120 */ /* 圧力の節点の数　Ｐ＝Ｍ×Ｎ          */
27  int T; /* 192 */ /* 三角形の数　　Ｔ＝２Ｎ（Ｍ－１）  */
28  int SIZE; /* 984 */ /* 未知数の数ＳＩＺＥ＝Ｎ（９Ｍ－４）  */
29
30  int M1; /* 4 */ /* Ｍ－１ */
31  int N2; /* 48 */ /*  ２Ｎ  */
32  int N4; /* 96 */ /*  ４Ｎ  */
33  int N9; /* 216 */ /*  ９Ｎ  */
34  int U2; /* 864 */ /*  ２Ｕ  */
35
36  double R1; /* 2.0 */ /* 内側の半径の値 */
37  double R2; /* 5.0 */ /* 外側の半径の値 */
38  double R;  /* 5.3 */ /* Ｒ ＝ Ｒ２ ＋ α  fspase(-R,-R,R,R) */
39
40  void init()
41  {
42    printf("M 動径方向の分割数の入力\n");
43    scanf("%d", &M);
44    printf("N 偏角方向の分割数の入力\n");
45    scanf("%d", &N);
46    printf("R1 内側の円の半径\n");
47    scanf("%lf", &R1);
48    U=2*N*(2*M-1); P = M * N; T = 2 * N * (M - 1);
49    SIZE = N*(9*M-4);
50    M1 = M - 1; N2 = 2 * N; N4 = 4 * N; N9 = 9 * N; U2 = 2 * U;
51    R2 = 1.0; R = R2 * (1.3/1);
52    printf("M=%d, N=%d, 節点の個数=%d, 未知数の個数=%d\n", M, N, U, SIZE);
53  }
54
55  #define C 3
56  /*
57   *      Ｃ＝１ならば内側で細かく分割
58   *      Ｃ＝２ならば外側で細かく分割
59   *      上以外ならば等間隔に分割する
60   */
61
62  void number_p(int k, int z[3])
63  {
64      int h;
65      h = k / N2;
66
67      if (k % N2 < N) {
68  z[0] = k - h * N;
69  if (k % N == N - 1)
70      z[2] = k - (h * N + N - 1);
71  else
72      z[2] = k - h * N + 1;
73  z[1] = k - (h - 1) * N;
74      } else {
75  if (k % N == N - 1) {
76      z[0] = k - (h + 2) * N + 1;
77      z[2] = k - (h + 1) * N + 1;
78  } else {
79      z[0] = k - (h + 1) * N + 1;
80      z[2] = k - h * N + 1;
81  }
```

```
 82  z[1] = k - h * N;
 83      }
 84  }
 85
 86  void number_u(int i, int z[6])
 87  {
 88      int j, r, s;
 89
 90      s = i % N2;
 91
 92      if (s < N) {
 93  r = i / N2;
 94  j = N4 * r + 2 * s;
 95
 96  z[0] = j;
 97  z[1] = j + N4;
 98  if (s == N - 1)
 99      z[2] = j + 2 - N2;
100  else
101      z[2] = j + 2;
102  z[3] = j + N2 + 1;
103  z[4] = j + 1;
104  z[5] = z[3] - 1;
105      } else {
106  r = i / N2;
107  s = s - N;
108  j = N4 * r + 2 * s;
109
110  z[1] = j + N4;
111  z[3] = z[1] + 1;
112  z[5] = j + N2 + 1;
113
114  if (s == N - 1) {
115      z[0] = j + 2 - N2;
116      z[2] = j + N2 + 2;
117      z[4] = j + 2;
118  } else {
119      z[0] = j + 2;
120      z[2] = z[1] + 2;
121      z[4] = z[5] + 1;
122  }
123      }
124  }
125
126  double cal_r(int n, double r)
127  {
128      if (n == 1) {
129  return (r - R1) * (r - R1) / (R2 - R1) + R1;
130      } else if (n == 2) {
131  return sqrt((r - R1) * (R2 - R1)) + R1;
132      } else
133  return r;
134  }
135
136  double cal_x(int k)
137  {
138      int i, j;
139      double Pi, r, theta, dx;
```

```
140
141      dx = 0.0;
142      Pi = 4.0 * atan(1.0);
143
144      i = k / N;
145      j = k % N;
146
147      r = (R2 - R1) * i / M1 + R1;
148      theta = 2 * Pi * j / N;
149
150  /*  return cal_r(C,r)*cos(theta) + (R2 - r)/(R2 - R1)*dx;*/
151      return cal_r(C, r) * cos(theta) + (R2 - cal_r(C, r)) / (R2 - R1) * dx;
152  }
153
154  double cal_y(int k)
155  {
156      int i, j;
157      double Pi, r, theta;
158
159      Pi = 4.0 * atan(1.0);
160
161      i = k / N;
162      j = k % N;
163
164      r = (R2 - R1) * i / M1 + R1;
165      theta = 2 * Pi * j / N;
166
167      return cal_r(C, r) * sin(theta);
168  }
169
170  double b1u(int func, double theta, double R1,
171     double mu, double omega1, double A , double B)
172  {
173    double Pi, b1, ur, ut;
174
175      Pi = 4.0 * atan(1.0);
176      b1 = 0.0;
177
178      if (func == 0) {
179  ur = mu / R1;
180  ut = b1;
181      }
182      else if (func == 1) {
183  if (theta <= Pi / 2.0)
184      ur = 2 * sin(2 * theta) / R1;
185  else
186      ur = 0.0;
187
188  ut = 0.0;
189      }
190      else if (func == 2) {
191  if (theta <= Pi / 2.0)
192      ur = 4.0 / R1;
193  else if (Pi <= theta && theta <= 1.5 * Pi)
194      ur = -2.0 / R1;
195  else
196      ur = 0.0;
197
```

```
198  ut = 0.0;
199      }
200
201      else if(func == 3){
202        ur = mu / R1 + A *  R1 *  cos(theta);
203        ut = R1 * omega1 + B * R1 * sin(theta);
204      }
205
206      else {
207        fprintf(stderr, "b1u: func is out of range.\n");
208        exit(-1);
209      }
210      return ur * cos(theta) - ut * sin(theta);
211  }
212
213  double b2u(int func, double theta, double R2,
214     double mu, double omega2, double A, double B)
215  {
216      double Pi, b2, ur, ut;
217
218      Pi = 4.0 * atan(1.0);
219      b2 = 1.0;
220
221      if (func == 0) {
222  ur = mu / R2;
223  ut = b2;
224      }
225      else if (func == 1) {
226  if ((theta >= Pi) && (theta <= 1.5 * Pi))
227      ur = 2 * sin(2 * theta) / R2;
228  else
229      ur = 0.0;
230
231  ut = 0.0;
232      }
233      else if (func == 2) {
234  if ((theta >= 0.5 * Pi) && (theta <= Pi))
235      ur = 2.0 / R2;
236  else
237      ur = 0.0;
238
239  ut = 0.0;
240      }
241
242      else if(func == 3){
243        ur = mu / R2 + A * R2 * cos(theta);
244        ut = R2 * omega2 + B * R2 * sin(theta);
245      }
246
247      else {
248        fprintf(stderr, "b2u: func is out of range.\n");
249        exit(-1);
250      }
251      return ur * cos(theta) - ut * sin(theta);
252  }
253
254  double b1v(int func, double theta, double R1,
255     double mu, double omega1,double A, double B)
```

```
256 {
257     double Pi, b1, ur, ut;
258 
259     Pi = 4.0 * atan(1.0);
260     b1 = 0.0;
261 
262     if (func == 0) {
263 ur = mu / R1;
264 ut = b1;
265     }
266     else if (func == 1) {
267 if (theta <= Pi / 2.0)
268     ur = 2 * sin(2 * theta) / R1;
269 else
270     ur = 0.0;
271 
272 ut = 0.0;
273     }
274     else if (func == 2) {
275 if (theta <= Pi / 2.0)
276     ur = 4.0 / R1;
277 else if (Pi <= theta && theta <= 1.5 * Pi)
278     ur = -2.0 / R1;
279 else
280     ur = 0.0;
281 
282 ut = 0.0;
283     }
284 
285     else if(func == 3){
286       ur = mu / R1 + A * R1 * cos(theta);
287       ut = R1 * omega1 + B * R1 * sin(theta);
288     }
289 
290     else {
291       fprintf(stderr, "b1v: func is out of range.\n");
292       exit(-1);
293     }
294     return ur * sin(theta) + ut * cos(theta);
295 }
296 
297 double b2v(int func, double theta, double R2,
298    double mu, double omega2, double A, double B)
299 {
300     double Pi, b2, ur, ut;
301 
302     Pi = 4.0 * atan(1.0);
303     b2 = 1.0;
304 
305     if (func == 0) {
306 ur = mu / R2;
307 ut = b2;
308     }
309     else if (func == 1) {
310 if ((theta >= Pi) && (theta <= 1.5 * Pi))
311     ur = 2 * sin(2 * theta) / R2;
312 else
313     ur = 0.0;
```

```
314
315  ut = 0.0;
316      }
317      else if (func == 2) {
318  if ((theta >= 0.5 * Pi) && (theta <= Pi))
319      ur = 2.0 / R2;
320  else
321      ur = 0.0;
322
323  ut = 0.0;
324      }
325
326      else if(func == 3){
327        ur = mu / R2 + A * R2 * cos(theta);
328        ut = R2 * omega2 + B * R2 * sin(theta);
329      }
330
331      else {
332        fprintf(stderr, "b2v: func is out of range.\n");
333        exit(-1);
334      }
335      return ur * sin(theta) + ut * cos(theta);
336  }
337
338  void inver1(double *u, double *b, int j)
339  {
340      int i, p, q;
341
342      for (i = 0; i < N; i++) {
343  p = 5 * i + N9 * j;
344  q = 2 * i + N4 * j;
345  u[q] = b[p];
346  u[q + U] = b[p + 1];
347  u[i + N * j + U2] = b[p + 2];
348  u[q + 1] = b[p + 3];
349  u[q + 1 + U] = b[p + 4];
350      }
351  }
352
353  void inver2(double *u, double *b, int j)
354  {
355      int i, p, q;
356
357      for (i = 0; i < N2; i++) {
358  p = 2 * i + N9 * j + P;
359  q = i + N4 * j + N2;
360  u[q] = b[p];
361  u[q + U] = b[p + 1];
362      }
363  }
364
365  int main(int argc, char **argv)
366  {
367      FILE *f;
368      int i, j, k, zp[3], zu[6], func, forc;
369      double nu, rho, Pi, h, theta;
370      double *x, *y;
371      double mu, omega1, omega2, A, B;
```

```
372
373      init();
374      x = malloc(sizeof(double) * U);
375      y = malloc(sizeof(double) * U);
376      if (argc != 2) {
377  printf("usage: %s <output file>\n", argv[0]);
378  exit(1);
379      }
380      if ((f = fopen(argv[1], "w")) == NULL) {
381  fprintf(stderr, "can't open %s \n", argv[1]);
382  exit(1);
383      }
384
385      printf("ν , ρ＝");
386      scanf("%lf %lf", &nu, &rho);
387      printf("func forc = ");
388      scanf("%d %d", &func, &forc);
389
390      if(func == 3){
391        printf("境界条件 b において mu ,omega1, omega2 ,A ,B の入力を行う\n");
392        printf("mu = ");
393        scanf("%lf", &mu);
394        printf("角速度 omega1, omega2 = ");
395        scanf("%lf %lf", &omega1, &omega2);
396        printf("摂動係数 A, B = ");
397        scanf("%lf %lf", &A, &B);
398  }
399
400      fprintf(f, "%4d   %4d \n", T, U);
401      fprintf(f, "\n");
402
403      for (i = 0; i < T; i++) {
404  number_p(i, zp);
405  number_u(i, zu);
406  for (j = 0; j < 3; j++) {
407      x[zu[j]] = cal_x(zp[j]);
408      y[zu[j]] = cal_y(zp[j]);
409  }
410  x[zu[3]] = 0.5 * (x[zu[1]] + x[zu[2]]);
411  y[zu[3]] = 0.5 * (y[zu[1]] + y[zu[2]]);
412  x[zu[4]] = 0.5 * (x[zu[0]] + x[zu[2]]);
413  y[zu[4]] = 0.5 * (y[zu[0]] + y[zu[2]]);
414  x[zu[5]] = 0.5 * (x[zu[0]] + x[zu[1]]);
415  y[zu[5]] = 0.5 * (y[zu[0]] + y[zu[1]]);
416      }
417
418      for (i = 0; i < U; i++) {
419  fprintf(f, "%25.20f  %25.20f \n", x[i], y[i]);
420      }
421      fprintf(f, "\n");
422
423      for (i = 0; i < T; i++) {
424  number_u(i, zu);
425  for (j = 0; j < 6; j++) {
426      fprintf(f, " %4d ", zu[j]);
427  }
428  fprintf(f, "\n");
429      }
```

```
430      fprintf(f, "\n");
431
432      k = 0;
433      for (i = 0; i < U; i++) {
434  fprintf(f, "%4d \n", k);
435  if (i % N4 < N2 && (i % 2) == 0)
436      j = 3;
437  else
438      j = 2;
439  k += j;
440      }
441      fprintf(f, "\n");
442
443      fprintf(f, "%4d \n", k);
444      fprintf(f, "\n");
445
446      fprintf(f, "%f  %f \n", nu, rho);
447      fprintf(f, "\n");
448
449      fprintf(f, " %4d 0 \n", N4);
450      fprintf(f, "\n");
451
452      Pi = 4.0 * atan(1.0);
453      h = Pi / N;
454
455      for (i = 0; i < N2; i++) {
456  theta = i * h;
457  j = U - N2 + i;
458  fprintf(f, "%4d  %25.20f  %25.20f\n", i,
459  b1u(func, theta, R1, mu, omega1, A ,B),
460  b1v(func, theta, R1, mu, omega1, A, B));
461  fprintf(f, "%4d  %25.20f  %25.20f\n", j,
462  b2u(func, theta, R2, mu, omega2, A, B),
463  b2v(func, theta, R2, mu, omega2, A, B));
464      }
465      fprintf(f, "\n");
466
467      if (forc == 0) {
468        for (i = 0; i < U; i++)
469  fprintf(f, "%25.20f  %25.20f\n", 0.0, 0.0);
470      }
471      else {
472        for (i = 0; i < U; i++) {
473  fprintf(f, "%25.20f  %25.20f\n", x[i], y[i]);
474        }
475      }
476      fclose(f);
477      return 0;
478  }
479
480
```

6.2 Stokes方程式を解くプログラム

```
1  /*
```

```
 2   * stokes-fukushima.c
 3   *
 4   *    工藤氏作成のプログラム（1995 年 2 月）を大幅
 5   *      第 1 段
 6   *      0. ANSI C のプロトタイプ宣言をつけた
 7   *      1. 注釈を加えた
 8   *      2. 変数の初期化忘れを直した
 9   *      第 2 段
10   *      LAPACK の dgbsv を使うようにした。
11   *      第 3 段
12   *      手計算で詳しく求めた要素係数行列の公式を利用するように書き改めた
13   *      （福嶋）
14   */
15
16  #include <math.h>
17  #include <stdio.h>
18  #include "matutil.h"
19
20  int verbose = 0;
21
22  /* プロトタイプ宣言 */
23  double menseki(double, double, double, double, double, double);
24  void make(int,
25    vector, int, int,
26    vector, double, double,
27    vector, vector, int **, int *,
28    vector, vector);
29  void change(int, vector, int, int, int);
30  void bound(vector, int, int,
31     vector, int *, vector, vector, int, int, int *, int);
32  void etalu(matrix, vector, int);
33
34  void dgbsv_(int *n, int *kl, int *ku, int *nrhs,
35              double *AB, int *ldab, int *ipiv, double *b, int *ldb, int *info);
36  int max(int a, int b) { return (a > b) ? a : b; }
37  int min(int a, int b) { return (a < b) ? a : b; }
38  /* 一次元配列で計算するのは生で書くと大変なのでマクロで処理 */
39  #define A(i,j) ab[(j)*(nb)+(2*(nband)+(i)-(j))]
40
41  int main(int argc, char **argv)
42  {
43    /****************** 変数宣言 ********************/
44      int i, j;
45      /* 入力ファイル，出力ファイル */
46      FILE *f1, *f2;
47      /* nnode: 節点の総数，nelmt: 要素の総数，SIZE: 未知数の総数 */
48      int nnode, nelmt, SIZE;
49      /* nNBC: Neumann B.C. を課す節点の総数，
50       * nDBC: Dirichlet B.C. を課す節点の総数
51       * ND == nDBC + nNBC */
52      int nNBC, nDBC, ND;
53      /*
54       *  cum[nnode]: 累積節点番号表，
55       *  num[nelmt][6]: 要素節点番号表（各要素を構成する節点の全体節点番号の表）
56       *  b[]: 境界データ（Dirichlet と Neumann）
57       */
58      int *cum, **num, *b;
59      /* nu: 粘性係数 ν，rho: 密度 ρ */
```

```
60      double nu, rho;
61      /* x[nnode], y[nnode]: 節点の座標,
62         bx[ND], by[ND]: 境界データ,
63         fx[], fy[]: 外力データ,
64         sx[], sy[]: 応力テンソル,
65         ab[]: 全体剛性行列 */
66      vector x, y, u, bx, by, fx, fy, sx, sy, ab;
67      ivector ipvt;
68      /* 半バンド幅 */
69      int nband, nb;
70      /* */
71      char *input_file, *output_file;
72    /**************** 変数宣言終了, 以下実行文 *****************/
73
74      /* 引数の個数をチェック */
75      if (argc == 3) {
76        input_file = argv[1];
77        output_file = argv[2];
78      }
79      else {
80  #ifdef ORIGINAL
81  fprintf(stderr, "usage: %s <input_file_name> <output_file_name>\n",
82  argv[0]);
83  exit(1);
84  #else
85  input_file = "reidai.data";
86  output_file = "fukushima.out";
87  #endif
88      }
89      /* 入力ファイルを開く */
90      if ((f1 = fopen(input_file, "r")) == NULL) {
91  fprintf(stderr, "Can't open %s\n", input_file);
92  exit(1);
93      }
94      /* 出力ファイルを開く (オリジナルでは計算後にあったが、前に開くべきだ) */
95      if ((f2 = fopen(output_file, "w")) == NULL) {
96  fprintf(stderr, "Can't open %s\n", output_file);
97  exit(2);
98      }
99      /* 要素数 nelmt, 節点数 nnode を読み込む */
100     fscanf(f1, "%d %d", &nelmt, &nnode);
101     if (verbose)
102       printf("要素数=%d, 総節点数=%d\n", nelmt, nnode);
103
104     /* 節点の座標 (x,y) を読み込む */
105     if (verbose)
106       printf("節点の座標を読む。\n");
107     x = new_vector(nnode); y = new_vector(nnode);
108     if (x == NULL || y == NULL) {
109 fprintf(stderr, "節点の座標用のメモリーが足りません。\n");
110 exit(1);
111     }
112     for (i = 0; i < nnode; i++)
113 fscanf(f1, "%lf %lf", &x[i], &y[i]);
114
115     if (verbose)
116       printf("要素節点番号表を読む。\n");
117     /* 要素節点番号表 num[nelmt][6] を確保 */
```

```
118      num = malloc(nelmt * sizeof(int *));
119      if (num == NULL) {
120  fprintf(stderr, "要素と節点の対応表用のメモリーが足りません\n");
121  exit(1);
122      }
123      for (i = 0; i < nelmt; i++) {
124  num[i] = malloc(sizeof(int) * 6);
125  if (num[i] == NULL) {
126      fprintf(stderr, "要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
127      exit(1);
128  }
129      }
130      /* num[nelmt][6] を読み込む */
131      for (i = 0; i < nelmt; i++)
132  for (j = 0; j < 6; j++)
133      fscanf(f1, "%d", &num[i][j]);
134
135      if (verbose)
136        printf("累積節点番号表を読む。\n");
137      /* 累積節点番号表 cum[nnode] を確保 */
138      if ((cum = (int *) malloc(sizeof(int) * nnode)) == NULL) {
139  fprintf(stderr, "累積節点番号用のメモリーが足りません \n");
140  exit(1);
141      }
142      /* cum[nnode] を読み込む */
143      for (i = 0; i < nnode; i++)
144  fscanf(f1, "%d", &cum[i]);
145
146      /* 未知数の総数 SIZE を読み込む */
147      fscanf(f1, "%d", &SIZE);
148      if (verbose)
149        printf("未知数の個数=%d\n", SIZE);
150
151      /* 半バンド幅 nband の評価 */
152      {
153        int max_cum, min_cum, cum_tmp, band_tmp;
154        if (verbose)
155  printf("半バンド幅の評価\n");
156        nband = 0;
157        for (i = 0; i < nelmt; i++) {
158  max_cum = 0;
159  min_cum = SIZE;
160  for (j = 0; j < 6; j++) {
161    cum_tmp = cum[num[i][j]];
162    if (max_cum < cum_tmp) max_cum = cum_tmp;
163    if (min_cum > cum_tmp) min_cum = cum_tmp;
164  }
165  band_tmp = max_cum - min_cum;
166  if (band_tmp > nband)
167    nband = band_tmp;
168        }
169        if (verbose)
170  printf("半バンド幅=%d\n", nband);
171      }
172
173      /* 安心 */
174      nband += 2;
175      nb = 3 * nband + 1;
```

```
176
177     /* 連立 1 次方程式 A x = u のための変数 ab[nb*SIZE], u[SIZE] を確保 */
178     u = new_vector(SIZE);
179     ab = new_vector(nb * SIZE);
180     ipvt = new_ivector(SIZE);
181     if (u ==NULL || ab == NULL || ipvt == NULL) {
182       fprintf(stderr, "近似解用のメモリーが足りません。\n");
183       exit(1);
184     }
185     for (i = 0; i < SIZE; i++)
186       u[i] = 0.0;
187     for (i = 0; i < (nb * SIZE); i++)
188 ab[i] = 0.0;
189
190     /* 粘性係数 nu, 密度 rho を読み込む */
191     fscanf(f1, "%lf %lf", &nu, &rho);
192     /* Dirichlet 境界, Neumann 境界上の節点の総数 nNBC, nDBC を読み込む */
193     fscanf(f1, "%d %d", &nDBC, &nNBC);
194
195     /* 境界上の接点の総数 ND を計算 */
196     ND = nNBC + nDBC;
197
198     /* 境界データを記憶する bx[ND], by[ND] を用意し、読み込む */
199     if ((b = malloc(sizeof(int) * ND)) == NULL) {
200 fprintf(stderr, "境界に属する節点番号表用のメモリーが足りません。\n");
201 exit(1);
202     }
203     bx = new_vector(ND); by = new_vector(ND);
204     if (bx == NULL || by == NULL) {
205       fprintf(stderr, "境界条件データ用のメモリーが足りません。\n");
206       exit(1);
207     }
208     for (i = 0; i < ND; i++)
209 fscanf(f1, "%d %lf %lf", &b[i], &bx[i], &by[i]);
210
211     /* Neumann 境界データを表わす sx[nnode],sy[nnode] を用意 (豪勢な使い方だ) */
212     sx = new_vector(nnode); sy = new_vector(nnode);
213     if (sx == NULL || sy == NULL) {
214       fprintf(stderr, "メモリーが足りません。\n");
215       exit(1);
216     }
217     for (i = 0; i < nnode; i++)
218 sx[i] = sy[i] = 0.0;
219     if (nNBC != 0) { /* … Neumann 境界が空でないならば */
220 for (i = nDBC; i < ND; i++) { /* 注: 最初の nDBC 個は Dirichlet データ */
221     sx[b[i]] = bx[i];
222     sy[b[i]] = by[i];
223 }
224     }
225     /* 外力 fx[nnode], fy[nnode] を確保し、読み込む */
226     fx = new_vector(nnode); fy = new_vector(nnode);
227     if (fx == NULL || fy == NULL) {
228       fprintf(stderr, "外力データ用のメモリーが足りません。\n");
229       exit(1);
230     }
231     for (i = 0; i < nnode; i++)
232 fscanf(f1, "%lf %lf", &fx[i], &fy[i]);
233
```

```
234     /* 入力データ読み込み終了 */
235     fclose(f1);
236
237     /* 連立 1 次方程式を作る */
238     make(nelmt, ab, nband, nb, u, nu, rho, x, y, num, cum, fx, fy);
239     bound(ab, nband, nb, u, b, bx, by, nNBC, nDBC, cum, SIZE);
240
241     /* 不要になったメモリーを返却 */
242     free(num);
243     free_vector(x);
244     free_vector(y);
245     free_vector(fx);
246     free_vector(fy);
247
248     free(b);
249     free(cum);
250     free_vector(bx);
251     free_vector(by);
252
253     /* 連立 1 次方程式を解く */
254     {
255       int nrhs = 1, ldab = nb, ldb = SIZE, info;
256       dgbsv_(&SIZE, &nband, &nband, &nrhs, ab, &ldab, ipvt, u, &ldb, &info);
257       if (info == 0) {
258 if (verbose)
259   printf(" successful\n");
260       }
261       else if (info > 0)
262 printf(" U is singular\n");
263       else
264 printf("%d-th argument has illegal value.\n", abs(info));
265     }
266
267     /* 計算結果をファイル f2 に出力し、ファイルを閉じる */
268     for (i = 0; i < SIZE; i++)
269 fprintf(f2, "%f \n", u[i]);
270     fclose(f2);
271
272     return 0;
273 }
274
275 /* 三角形の頂点の座標から（符号付きの）面積を計算する */
276 double menseki(double x0, double x1, double x2,
277        double y0, double y1, double y2)
278 {
279     double s;
280     s = 0.5 * ((x1 - x0) * (y2 - y0) - (y1 - y0) * (x2 - x0));
281     return s;
282 }
283
284 /*弱形式を表わす連立 1 次方程式を作る。
285  * 菊地流プログラムで言うと ecm(), assem() を合わせた内容
286  */
287 void make(int T,
288   vector ab, int nband, int nb,
289   vector u, double nu, double rho,
290   vector x, vector y, int **num, int *cum,
291   vector fx, vector fy)
```

```
292 {
293     int i, j, k;
294     double a0, a1, a2, b0, b1, b2, c0, c1, c2, S, D, nurho;
295 
296     matrix a = new_matrix(6, 6);
297     matrix b = new_matrix(6, 3);
298     matrix c = new_matrix(6, 3);
299     matrix d = new_matrix(6, 6);
300 
301     nurho = nu * rho;
302 
303     for (k = 0; k < T; k++) { /* 各要素について */
304 int n0, n1, n2;
305 n0 = num[k][0];
306 n1 = num[k][1];
307 n2 = num[k][2];
308 S = menseki(x[n0], x[n1], x[n2], y[n0], y[n1], y[n2]);
309 if (S < 0.0) {
310     printf("第 %d 要素の面積が負になっています！\n", k);
311     exit(0);
312 }
313 D = 2 * S;
314 
315 a0 =  (y[n1] - y[n2]) / D;
316 a1 =  (y[n2] - y[n0]) / D;
317 a2 =  (y[n0] - y[n1]) / D;
318 b0 =  (x[n2] - x[n1]) / D;
319 b1 =  (x[n0] - x[n2]) / D;
320 b2 =  (x[n1] - x[n0]) / D;
321 
322 c0 = a1 * a2 + b1 * b2;
323 c1 = a2 * a0 + b2 * b0;
324 c2 = a0 * a1 + b0 * b1;
325 
326 a[0][0] = 3 * (a0 * a0 + b0 * b0);
327 a[1][1] = 3 * (a1 * a1 + b1 * b1);
328 a[2][2] = 3 * (a2 * a2 + b2 * b2);
329 a[0][1] = -c2;
330 a[0][2] = -c1;
331 a[1][2] = -c0;
332 a[0][3] = a[1][4] = a[2][5] = 0;
333 a[1][3] = a[2][3] = 4 * c0;
334 a[0][4] = a[2][4] = 4 * c1;
335 a[0][5] = a[1][5] = 4 * c2;
336 a[3][3] = a[4][4] = a[5][5] = -8 * (c0 + c1 + c2);
337 a[3][4] = 8 * c2;
338 a[3][5] = 8 * c1;
339 a[4][5] = 8 * c0;
340 
341 for(i = 0; i < 6; i++)
342   for(j = 0; j <= i; j++)
343     a[i][j] = a[j][i];
344 
345 for(i = 0; i < 6; i++)
346   for(j = 0; j < 6; j++)
347     a[i][j] = (S / 3.0) * a[i][j];
348 
349 b[0][0] = a0;
```

```
350  b[1][1] = a1;
351  b[2][2] = a2;
352  b[0][1] = b[0][2] = b[1][0] = b[1][2] = b[2][0] = b[2][1] = 0;
353  b[3][0] = a1 + a2;
354  b[4][1] = a2 + a0;
355  b[5][2] = a0 + a1;
356  b[3][1] = a1 + 2 * a2;
357  b[3][2] = 2 * a1 + a2;
358  b[4][0] = 2 * a2 + a0;
359  b[4][2] = a2 + 2 * a0;
360  b[5][0] = a0 + 2 * a1;
361  b[5][1] = 2 * a0 + a1;
362
363  for(i = 0; i < 6; i++)
364    for(j = 0; j < 3; j++)
365      b[i][j] = (S / 3.0) * b[i][j];
366
367  c[0][0] = b0;
368  c[1][1] = b1;
369  c[2][2] = b2;
370  c[0][1] = c[0][2] = c[1][0] = c[1][2] = c[2][0] = c[2][1] = 0;
371  c[3][0] = b1 + b2;
372  c[4][1] = b2 + b0;
373  c[5][2] = b0 + b1;
374  c[3][1] = b1 + 2 * b2;
375  c[3][2] = 2 * b1 + b2;
376  c[4][0] = 2 * b2 + b0;
377  c[4][2] = b2 + 2 * b0;
378  c[5][0] = b0 + 2 * b1;
379  c[5][1] = 2 * b0 + b1;
380
381  for(i = 0; i < 6; i++)
382    for(j = 0; j < 3; j++)
383      c[i][j] = (S / 3.0) * c[i][j];
384
385  d[0][0] = d[1][1] = d[2][2] = 6;
386  d[0][1] = d[0][2] = d[1][2] = -1;
387  d[0][3] = d[1][4] = d[2][5] = -4;
388  d[0][4] = d[0][5] = d[1][3] = d[1][5] = d[2][3] = d[2][4] = 0;
389  d[3][3] = d[4][4] = d[5][5] = 32;
390  d[3][4] = d[3][5] = d[4][5] = 16;
391
392  for(i = 0; i < 6; i++)
393    for(j = 0; j <= i; j++)
394      d[i][j] = d[j][i];
395
396  for(i = 0; i < 6; i++)
397    for(j = 0; j < 6; j++)
398      d[i][j] = (S / 180.0) * d[i][j];
399
400  /* 直接剛性法 */
401    for(i = 0; i < 6; i++) {
402      int I = cum[num[k][i]];
403      for (j = 0; j < 6; j++) {
404        int J = cum[num[k][j]];
405        A(I,J) += nurho * a[i][j];
406        A(I+1,J+1) += nurho * a[i][j];
407      }
```

```
408
409       for (j = 0; j < 3; j++) {
410         int J = cum[num[k][j]];
411         A(I,J+2) -= b[i][j];
412         A(I+1,J+2) -= c[i][j];
413       }
414
415       for(j = 0; j < 6; j++){
416         u[I] += rho * d[i][j] * fx[num[k][j]];
417         u[I + 1] += rho * d[i][j] * fy[num[k][j]];
418       }
419     }
420
421     for(i = 0; i < 3; i++) {
422       int I = cum[num[k][i]];
423       for (j = 0; j < 6; j++) {
424         int J = cum[num[k][j]];
425         A(I+2,J) -= b[j][i];
426         A(I+2,J+1) -= c[j][i];
427       }
428     }
429       }
430
431       /* 不要なメモリーを返却 */
432       free_matrix(a);
433       free_matrix(b);
434       free_matrix(c);
435       free_matrix(d);
436   }
437
438   void change(int n, vector ab, int nband, int nb, int k)
439   {
440     int i,j;
441     for (i = max(0,k-nband); i <= min(n-1,k+nband); i++)
442       A(i,k) = 0.0;
443     for (j = max(0,k-nband); j <= min(n-1,k+nband); j++)
444       A(k,j) = 0.0;
445     A(k,k) = 1.0;
446   }
447
448   void bound(vector ab, int nband, int nb,
449      vector u, int *b, vector bx, vector by,
450      int N, int D, int *cum, int n)
451   {
452     int i, j, k;
453     for (k = 0; k < D; k++) {
454       j = cum[b[k]];
455       for (i = max(0,j-nband); i <= min(n-1,j+nband); i++)
456         u[i] -= A(i,j) * bx[k];
457       u[j] = bx[k];
458       change(n, ab, nband, nb, j);
459       j++;
460       for (i = max(0,j-nband); i <= min(n-1,j+nband); i++)
461         u[i] -= A(i,j) * by[k];
462       u[j] = by[k];
463       change(n, ab, nband, nb, j);
464     }
465     if (N == 0) {
```

```
466      change(n, ab, nband, nb, 2);
467      u[2] = 0.0;
468    }
469  }
470
471
472
473
474
475
```

6.3 行列 $\kappa^x_{ijk}, \kappa^y_{ijk}$ の計算プログラム (Mathematica による)

```
 1  lambda[0] := 1 - x - y
 2  lambda[1] := x
 3  lambda[1] := y
 4  phi[0] := lambda[0](2lambda[0] - 1)
 5  phi[1] := lambda[1](2lambda[1] - 1)
 6  phi[2] := lambda[2](2lambda[2] - 1)
 7  phi[3] := 4lambda[1]lambda[2]
 8  phi[4] := 4lambda[0]lambda[2]
 9  phi[5] := 4lambda[0]lambda[1]
10  phix[0] := (4lambda[0] - 1)alpha[0]
11  phix[1] := (4lambda[1] - 1)alpha[1]
12  phix[2] := (4lambda[2] - 1)alpha[2]
13  phix[3] := 4(alpha[1]lambda[2] + alpha[2]lambda[1])
14  phix[4] := 4(alpha[2]lambda[0] + alpha[0]lambda[2])
15  phix[5] := 4(alpha[0]lambda[1] + alpha[1]lambda[0])
16  kappa[i, j, k] := 2*Integrate[Integrate[phi[i]phi[j]phix[k],
17                       {y, 0, 1 - x}], {x, 0, 1}]
18  kappa[0] := Table[kappa[i, j, 0], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
19  kappa[1] := Table[kappa[i, j, 1], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
20  kappa[2] := Table[kappa[i, j, 2], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
21  kappa[3] := Table[kappa[i, j, 3], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
22  kappa[4] := Table[kappa[i, j, 4], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
23  kappa[5] := Table[kappa[i, j, 5], {i, 0, 5}, {j, 0, 5}]
```

6.4 Navier-Stokes 方程式を解くプログラム

```
 1  /*
 2   * navier3-fukushima.c
 3   *   工藤氏作成のプログラム（1995 年 2 月）を若干修正
 4   *     0. ANSI C のプロトタイプ宣言をつけた
 5   *     1. 注釈を加えた（ここまで桂田工藤による）
 6   *     2, 新たに求めた要素係数行列に対応させた.
 7   */
 8
 9  #include <math.h>
10  #include <stdio.h>
11  #include "matutil.h"
12
13  int verbose = 0;
```

```
14
15 double menseki(double x0, double x1, double x2,
16                double y0, double y1, double y2);
17 void matprod3(matrix a, matrix b, matrix c, matrix d);
18 void make(int T, vector ab, vector ab0, int nband, int nb, int SIZE,
19   vector u, vector v, double nu, double rho,
20           vector x, vector y, int **num, int *cum,
21           vector fx, vector fy);
22 void change(int n, vector ab, int nband, int nb, int k);
23 void bound(vector ab, int nband, int nb,
24    vector u, int *b, int N, int D, int *cum, int SIZE);
25 void newton(int T,
26     int nband, int nb, ivector ipvt,
27     vector u, vector v, double nu, double rho,
28             vector x, vector y, int **num, int *cum,
29             vector fx, vector fy, int *b, int N, int D, int SIZE);
30
31 void dgbsv_(int *n, int *kl, int *ku, int *nrhs,
32             double *AB, int *ldab, int *ipiv, double *b, int *ldb, int *info);
33 int max(int a, int b) { return (a > b) ? a : b; }
34 int min(int a, int b) { return (a < b) ? a : b; }
35 /* 一次元配列で計算するのは生で書くと大変なのでマクロで処理 */
36 #define A0(i,j) ab0[(j)*(nb)+(2*(nband)+(i)-(j))]
37 #define A(i,j) ab[(j)*(nb)+(2*(nband)+(i)-(j))]
38
39 int main(int argc, char **argv)
40 {
41   FILE *f1, *f2, *f3;
42   int i, j, nnode, nelmt, SIZE, N, D, ND;
43   int *cum, **num, *b;
44   double nu, rho;
45   vector x, y, u, v, bx, by, fx, fy, sx, sy;
46   ivector ipvt;
47   int nband, nb;
48
49   if (argc != 4) {
50     fprintf(stderr, "usage: %s <input file0> <input file1> <output file>",
51     argv[0]);
52     exit(1);
53   }
54   if ((f1 = fopen(argv[1], "r")) == NULL) {
55     fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[1]);
56     exit(1);
57   }
58   if ((f2 = fopen(argv[2], "r")) == NULL) {
59     fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[2]);
60     exit(2);
61   }
62
63   fscanf(f1, "%d %d", &nelmt, &nnode);
64
65   x = new_vector(nnode);
66   y = new_vector(nnode);
67   for (i = 0; i < nnode; i++) {
68     fscanf(f1, "%lf %lf", &x[i], &y[i]);
69   }
70
71   num = malloc(nelmt * sizeof(void *));
```

```
 72    if (num == NULL) {
 73      fprintf(stderr, "要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
 74      exit(1);
 75    }
 76    for (i = 0; i < nelmt; i++) {
 77      num[i] = malloc(sizeof(int) * 6);
 78      if (num[i] == NULL) {
 79        fprintf(stderr, "要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
 80        exit(1);
 81      }
 82    }
 83    for (i = 0; i < nelmt; i++)
 84      for (j = 0; j < 6; j++)
 85        fscanf(f1, "%d", &num[i][j]);
 86
 87    if ((cum = malloc(sizeof(int) * nnode)) == NULL) {
 88      fprintf(stderr, "累積節点番号用のメモリーが足りません \n");
 89      exit(1);
 90    }
 91    for (i = 0; i < nnode; i++)
 92      fscanf(f1, "%d", &cum[i]);
 93    fscanf(f1, "%d", &SIZE);
 94    if (verbose)
 95      printf("未知数の個数=%d\n", SIZE);
 96
 97    /* 半バンド幅 nband の評価 */
 98    {
 99      int max_cum, min_cum, cum_tmp, band_tmp;
100      if (verbose)
101        printf("半バンド幅の評価\n");
102      nband = 0;
103      for (i = 0; i < nelmt; i++) {
104        max_cum = 0;
105        min_cum = SIZE;
106        for (j = 0; j < 6; j++) {
107  cum_tmp = cum[num[i][j]];
108  if (max_cum < cum_tmp) max_cum = cum_tmp;
109  if (min_cum > cum_tmp) min_cum = cum_tmp;
110        }
111        band_tmp = max_cum - min_cum;
112        if (band_tmp > nband)
113  nband = band_tmp;
114      }
115      if (verbose)
116        printf("半バンド幅=%d\n", nband);
117    }
118    /* 安心 */
119    nband += 2;
120    nb = 3 * nband + 1;
121
122    u = new_vector(SIZE);
123    v = new_vector(SIZE);
124    ipvt = new_ivector(SIZE);
125
126    for (i = 0; i < SIZE; i++)
127      fscanf(f2, "%lf", &u[i]);
128    fclose(f2);
129
```

```
130    fscanf(f1, "%lf %lf", &nu, &rho);
131    fscanf(f1, "%d %d", &D, &N);
132
133    ND = N + D;
134
135    if ((b = malloc(sizeof(int) * ND)) == NULL) {
136      fprintf(stderr, "境界の番号用のメモリーが足りません。\n");
137      exit(1);
138    }
139    bx = new_vector(ND);
140    by = new_vector(ND);
141    for (i = 0; i < ND; i++)
142      fscanf(f1, "%d %lf %lf", &b[i], &bx[i], &by[i]);
143
144    sx = new_vector(nnode);
145    sy = new_vector(nnode);
146    for (i = 0; i < nnode; i++)
147      sx[i] = sy[i] = 0.0;
148    if (N != 0) {
149      for (i = D; i < ND; i++) {
150        sx[b[i]] = bx[i];
151        sy[b[i]] = by[i];
152      }
153    }
154
155    fx = new_vector(nnode);
156    fy = new_vector(nnode);
157    for (i = 0; i < nnode; i++)
158      fscanf(f1, "%lf %lf", &fx[i], &fy[i]);
159    fclose(f1);
160
161    newton(nelmt, nband, nb, ipvt,
162   u, v, nu, rho, x, y, num, cum, fx, fy, b, N, D,
163   SIZE);
164
165    free(num);
166    free_vector(x);
167    free_vector(y);
168    free_vector(fx);
169    free_vector(fy);
170
171    free(b);
172    free(cum);
173    free_vector(bx);
174    free_vector(by);
175    free_vector(sx);
176    free_vector(sy);
177
178    if ((f3 = fopen(argv[3], "w")) == NULL) {
179      fprintf(stderr, "Can't open %s\n", argv[3]);
180      exit(3);
181    }
182    for (i = 0; i < SIZE; i++)
183      fprintf(f3, "%f \n", u[i]);
184    fclose(f3);
185
186    return 0;
187  }
```

```
188
189 double menseki(double x0, double x1, double x2,
190                double y0, double y1, double y2)
191 {
192     double s;
193     s = 0.5 * ((x1 - x0) * (y2 - y0) - (y1 - y0) * (x2 - x0));
194     return s;
195 }
196
197 void make(int T, vector ab, vector ab0, int nband, int nb, int SIZE,
198   vector u, vector v, double nu, double rho,
199   vector x, vector y, int **num, int *cum,
200   vector fx, vector fy)
201 {
202   static int first = 1;
203   int i, j, k, l;
204   double a0, a1, a2, b0, b1, b2, c0, c1, c2, nurho, S, D;
205   matrix a, b, c, d;
206   matrix kappa[6], lambda[6];
207
208   if (first)
209     for (i = 0; i < nb * SIZE; i++)
210       ab0[i] = 0.0;
211   for (i = 0; i < nb * SIZE; i++)
212     ab[i] = 0.0;
213
214     double kappa0[6][6][6]
215       = {{{78, 0, 0, 0, 24, 24}, {-9, 0, 0, 0, 4, -16},
216   {-9, 0, 0, 0, -16, 4}, {12, 0,0, 0, -48, -48},
217   {48, 0, 0, 0, -32, -16}, {48, 0, 0, 0, -16, -32}},
218  {{-9, 0, 0, 0, 4, -16}, {-18, 0, 0, 0, 24, 120},
219   {11, 0, 0, 0, -16, -16}, {-16, 0, 0, 0, -32, 48},
220   {-20, 0, 0,0, -48, -16}, {-32, 0, 0, 0, -16, 48}},
221  {{-9, 0, 0, 0, -16, 4}, {11, 0, 0, 0, -16, -16},
222   {-18, 0, 0, 0, 120, 24}, {-16, 0, 0, 0, 48, -32},
223   {-32, 0, 0, 0, 48, -16}, {-20, 0, 0, 0, -16, -48}},
224  {{12, 0, 0, 0, -48, -48}, {-16, 0, 0, 0, -32, 48},
225   {-16, 0, 0, 0, 48, -32}, {-96, 0,0, 0, 384, 384},
226   {16, 0, 0, 0, 192, 128}, {16, 0, 0, 0, 128, 192}},
227  {{48, 0, 0, 0, -32, -16}, {-20, 0, 0, 0, -48, -16},
228   {-32, 0, 0, 0, 48, -16}, {16, 0, 0, 0, 192, 128},
229   {160, 0, 0, 0, 384, 128}, {80, 0, 0, 0, 128, 128}},
230  {{48, 0, 0, 0, -16, -32}, {-32, 0, 0, 0, -16, 48},
231   {-20, 0, 0, 0, -16, -48}, {16, 0, 0, 0, 128, 192},
232   {80, 0, 0, 0, 128, 128}, {160, 0, 0, 0, 128, 384}}};
233
234     double kappa1[6][6][6]
235       = {{{0, -18, 0, 24, 0, 120}, {0, -9, 0, 4, 0, -16},
236   {0, 11, 0, -16, 0, -16}, {0, -20, 0, -48, 0, -16},
237   {0, -16, 0, -32, 0, 48}, {0, -32, 0, -16, 0, 48}},
238  {{0, -9, 0, 4, 0, -16}, {0, 78, 0, 24, 0, 24},
239   {0, -9, 0, -16, 0, 4}, {0, 48, 0, -32, 0, -16},
240   {0, 12, 0, -48, 0, -48}, {0, 48, 0, -16, 0, -32}},
241  {{0, 11, 0, -16, 0, -16}, {0, -9, 0, -16, 0, 4},
242   {0, -18, 0, 120, 0, 24}, {0, -32, 0, 48, 0, -16},
243   {0, -16, 0, 48, 0, -32}, {0, -20, 0, -16, 0, -48}},
244  {{0, -20, 0, -48, 0, -16}, {0, 48, 0, -32, 0, -16},
245   {0, -32, 0, 48, 0, -16}, {0, 160, 0, 384, 0, 128},
```

```
246    {0, 16, 0, 192, 0, 128}, {0, 80, 0, 128, 0, 128}},
247   {{0, -16, 0, -32, 0, 48}, {0, 12, 0, -48, 0, -48},
248    {0, -16, 0, 48, 0, -32}, {0, 16, 0, 192, 0, 128},
249    {0, -96, 0, 384, 0, 384}, {0, 16, 0, 128, 0, 192}},
250   {{0, -32, 0, -16, 0, 48}, {0, 48, 0, -16, 0, -32},
251    {0, -20, 0, -16, 0, -48}, {0, 80, 0, 128, 0, 128},
252    {0, 16, 0, 128, 0, 192}, {0, 160, 0, 128, 0, 384}}} ;
253
254      double kappa2[6][6][6]
255        = {{{0, 0, -18, 24, 120, 0}, {0, 0, 11, -16, -16, 0},
256    {0, 0, -9, 4, -16, 0}, {0, 0, -20, -48, -16, 0},
257    {0, 0, -32, -16, 48, 0}, {0, 0, -16, -32, 48, 0}},
258   {{0, 0, 11, -16, -16, 0}, {0, 0, -18, 120, 24, 0},
259    {0, 0, -9, -16, 4, 0}, {0, 0, -32, 48, -16, 0},
260    {0, 0, -20, -16, -48, 0}, {0, 0, -16, 48, -32, 0}},
261   {{0, 0, -9, 4, -16, 0}, {0, 0, -9, -16, 4, 0},
262    {0, 0, 78, 24, 24, 0}, {0, 0, 48, -32, -16, 0},
263    {0, 0, 48, -16, -32, 0}, {0, 0, 12, -48, -48, 0}},
264   {{0, 0, -20, -48, -16, 0}, {0, 0, -32, 48, -16, 0},
265    {0, 0, 48, -32, -16, 0}, {0, 0, 160, 384, 128, 0},
266    {0, 0, 80, 128, 128, 0}, {0, 0, 16, 192, 128, 0}},
267   {{0, 0, -32, -16, 48, 0}, {0, 0, -20, -16, -48, 0},
268    {0, 0, 48, -16, -32, 0}, {0, 0, 80, 128, 128, 0},
269    {0, 0, 160, 128, 384, 0}, {0, 0, 16, 128, 192, 0}},
270   {{0, 0, -16, -32, 48, 0}, {0, 0, -16, 48, -32, 0},
271    {0, 0, 12, -48, -48, 0}, {0, 0, 16, 192, 128, 0},
272    {0, 0, 16, 128, 192, 0}, {0, 0, -96, 384, 384, 0}}} ;
273
274    /* 変数の用意 */
275      a = new_matrix(6, 6);
276      b = new_matrix(6, 3);
277      c = new_matrix(6, 3);
278      d = new_matrix(6, 6);
279
280      for (i = 0; i < 6; i++) {
281        kappa[i] = new_matrix(6, 6);
282        lambda[i] = new_matrix(6, 6);
283      }
284
285    /* A, B, C, D をクリア */
286      for (i = 0; i < 6; i++){
287        for (j = 0; j < 6; j++)
288  a[i][j] = d[i][j] = 0;
289      }
290
291      for (i = 0; i < 6; i++){
292        for (j = 0; j < 3; j++)
293  b[i][j] = c[i][j] = 0;
294      }
295
296      nurho = nu * rho;
297
298      for (l = 0; l < T; l++) {      /* 各要素について */
299  int n0, n1, n2;
300  n0 = num[l][0];
301  n1 = num[l][1];
302  n2 = num[l][2];
303  S = menseki(x[n0], x[n1], x[n2], y[n0], y[n1], y[n2]);
```

```
304  if (S < 0.0) {
305    printf("第 %d 要素の面積が負になっています！\n", l);
306      exit(0);
307  }
308  D = 2 * S;
309
310  a0 =  (y[n1] - y[n2]) / D;
311  a1 =  (y[n2] - y[n0]) / D;
312  a2 =  (y[n0] - y[n1]) / D;
313  b0 =  (x[n2] - x[n1]) / D;
314  b1 =  (x[n0] - x[n2]) / D;
315  b2 =  (x[n1] - x[n0]) / D;
316
317  c0 = a1 * a2 + b1 * b2;
318  c1 = a2 * a0 + b2 * b0;
319  c2 = a0 * a1 + b0 * b1;
320
321  a[0][0] = 3 * (a0 * a0 + b0 * b0);
322  a[1][1] = 3 * (a1 * a1 + b1 * b1);
323  a[2][2] = 3 * (a2 * a2 + b2 * b2);
324  a[0][1] = -c2;
325  a[0][2] = -c1;
326  a[1][2] = -c0;
327  a[0][3] = a[1][4] = a[2][5] = 0;
328  a[1][3] = a[2][3] = 4 * c0;
329  a[0][4] = a[2][4] = 4 * c1;
330  a[0][5] = a[1][5] = 4 * c2;
331  a[3][3] = a[4][4] = a[5][5] = -8 * (c0 + c1 + c2);
332  a[3][4] = 8 * c2;
333  a[3][5] = 8 * c1;
334  a[4][5] = 8 * c0;
335
336  for(i = 0; i < 6; i++)
337    for(j = 0; j < i; j++)
338      a[i][j] = a[j][i];
339
340  for(i = 0; i < 6; i++)
341    for(j = 0; j < 6; j++)
342      a[i][j] = (S / 3.0) * a[i][j];
343
344  b[0][0] = a0;
345  b[1][1] = a1;
346  b[2][2] = a2;
347  b[0][1] = b[0][2] = b[1][0] = b[1][2] = b[2][0] = b[2][1] = 0;
348  b[3][0] = a1 + a2;
349  b[4][1] = a2 + a0;
350  b[5][2] = a0 + a1;
351  b[3][1] = a1 + 2 * a2;
352  b[3][2] = 2 * a1 + a2;
353  b[4][0] = 2 * a2 + a0;
354  b[4][2] = a2 + 2 * a0;
355  b[5][0] = a0 + 2 * a1;
356  b[5][1] = 2 * a0 + a1;
357
358  for(i = 0; i < 6; i++)
359    for(j = 0; j < 3; j++)
360      b[i][j] = (S / 3.0) * b[i][j];
361
```

```
362  c[0][0] = b0;
363  c[1][1] = b1;
364  c[2][2] = b2;
365  c[0][1] = c[0][2] = c[1][0] = c[1][2] = c[2][0] = c[2][1] = 0;
366  c[3][0] = b1 + b2;
367  c[4][1] = b2 + b0;
368  c[5][2] = b0 + b1;
369  c[3][1] = b1 + 2 * b2;
370  c[3][2] = 2 * b1 + b2;
371  c[4][0] = 2 * b2 + b0;
372  c[4][2] = b2 + 2 * b0;
373  c[5][0] = b0 + 2 * b1;
374  c[5][1] = 2 * b0 + b1;
375
376  for(i = 0; i < 6; i++)
377    for(j = 0; j < 3; j++)
378      c[i][j] = (S / 3.0) * c[i][j];
379
380  d[0][0] = d[1][1] = d[2][2] = 6;
381  d[0][1] = d[0][2] = d[1][2] = -1;
382  d[0][3] = d[1][4] = d[2][5] = -4;
383  d[0][4] = d[0][5] = d[1][3] = d[1][5] = d[2][3] = d[2][4] = 0;
384  d[3][3] = d[4][4] = d[5][5] = 32;
385  d[3][4] = d[3][5] = d[4][5] = 16;
386
387  for(i = 0; i < 6; i++)
388    for(j = 0; j < i; j++)
389      d[i][j] = d[j][i];
390
391  for(i = 0; i < 6; i++)
392    for(j = 0; j < 6; j++)
393      d[i][j] = (S / 180.0) * d[i][j];
394
395  for(i = 0; i < 6; i++){
396    for(j = 0; j < 6; j++){
397      for(k = 0; k < 6; k++){
398        kappa[i][j][k] =  (a0 * kappa0[i][j][k] +
399   a1 * kappa1[i][j][k] +
400   a2 * kappa2[i][j][k]) * S / 1260;
401        lambda[i][j][k] =  (b0 * kappa0[i][j][k] +
402    b1 * kappa1[i][j][k] +
403    b2 * kappa2[i][j][k]) * S / 1260;
404      }
405    }
406  }
407
408  /* 直接剛性法  */
409  /* 線形項について (一部 Stokes と共通) */
410
411  if(first){
412  for(i = 0; i < 6; i++) {
413      int I = cum[num[l][i]];
414      for (j = 0; j < 6; j++) {
415        int J = cum[num[l][j]];
416        A0(I, J) += nurho * a[i][j];
417        A0(I+1, J+1) += nurho * a[i][j];
418      }
419
```

```
420       for (j = 0; j < 3; j++) {
421         int J = cum[num[l][j]];
422         A0(I, J+2) -= b[i][j];
423         A0(I+1, J+2) -= c[i][j];
424       }
425     }
426
427     for(i = 0; i < 3; i++) {
428       int I = cum[num[l][i]];
429       for (j = 0; j < 6; j++) {
430         int J = cum[num[l][j]];
431         A0(I+2, J) -= b[j][i];
432         A0(I+2, J+1) -= c[j][i];
433       }
434     }
435   }
436
437   for(i = 0; i < 6; i++) {
438     int I = cum[num[l][i]];
439     for(j = 0; j < 6; j++){
440       v[I] -= rho * d[i][j] * fx[num[l][j]];
441       v[I + 1] -= rho * d[i][j] * fy[num[l][j]];
442     }
443
444     for(j = 0; j < 6; j++){
445       int J = cum[num[l][j]];
446       v[I] += nurho * a[i][j] * u[J];
447       v[I+1] += nurho * a[i][j] * u[J+1];
448     }
449
450     for(j = 0; j < 3; j++){
451       int J = cum[num[l][j]];
452       v[I] -= b[i][j] * u[J+2];
453         v[I+1] -= c[i][j] * u[J+2];
454     }
455   }
456
457     for(i = 0; i < 3; i++) {
458       int I = cum[num[l][i]];
459       for (j = 0; j < 6; j++) {
460         int J = cum[num[l][j]];
461         v[I+2] -= b[j][i] * u[J] + c[j][i] * u[J+1];
462       }
463     }
464
465
466     /*  非線形項について */
467     for (i = 0; i < 6; i++) {
468       int I = cum[num[l][i]];
469       for (j = 0; j < 6; j++) {
470         int J = cum[num[l][j]];
471         for (k = 0; k < 6; k++) {
472   int K = cum[num[l][k]];
473   A(I, J) += rho * (kappa[i][j][k] * u[K] +
474     kappa[i][k][j] * u[K] +
475     lambda[i][k][j] * u[K+1]) ;
476   A(I, J+1) += rho * lambda[i][j][k] * u[K];
477   A(I+1, J) += rho * kappa[i][j][k] * u[K+1];
```

```
478  A(I+1, J+1) += rho *(lambda[i][j][k] * u[K+1] +
479       kappa[i][k][j] * u[K] +
480       lambda[i][k][j] * u[K+1]);
481        }
482      }
483    }
484
485    for (i = 0; i < 6; i++) {
486      int I = cum[num[l][i]];
487      for (j = 0; j < 6; j++) {
488        int J = cum[num[l][j]];
489        for (k = 0; k < 6; k++) {
490  int K = cum[num[l][k]];
491  v[I] += rho * (kappa[i][j][k] * u[J] * u[K]
492         + lambda[i][j][k] * u[J+1] * u[K]);
493  v[I+1] += rho * (kappa[i][j][k] * u[J] * u[K+1]
494   + lambda[i][j][k] * u[J+1] * u[K+1]);
495        }
496      }
497    }
498      }
499
500      for (i = 0; i < nb * SIZE; i++)
501        ab[i] += ab0[i];
502      first = 0;
503      free_matrix(a);
504      free_matrix(b);
505      free_matrix(c);
506      free_matrix(d);
507      for (i = 0; i < 6; i++) {
508          free_matrix(kappa[i]);
509          free_matrix(lambda[i]);
510      }
511  }
512
513  void change(int n, vector ab, int nband, int nb, int k)
514  {
515    int i,j;
516    for (i = max(0,k-nband); i <= min(n-1,k+nband); i++)
517      A(i,k) = 0.0;
518    for (j = max(0,k-nband); j <= min(n-1,k+nband); j++)
519      A(k,j) = 0.0;
520    A(k,k) = 1.0;
521  }
522
523  void bound(vector ab, int nband, int nb,
524     vector u, int *b, int N, int D, int *cum, int n)
525  {
526    int j, k;
527    for (k = 0; k < D; k++) {
528      j = cum[b[k]];
529      u[j] = 0.0;
530      change(n, ab, nband, nb, j);
531      j++;
532      u[j] = 0.0;
533      change(n, ab, nband, nb, j);
534    }
535    if (N == 0) {
```

```
536     change(n, ab, nband, nb, 2);
537     u[2] = 0.0;
538   }
539 }
540
541 void newton(int T,
542     int nband, int nb, ivector ipvt,
543     vector u, vector v, double nu, double rho,
544             vector x, vector y, int **num, int *cum,
545             vector fx, vector fy, int *b, int N, int D, int SIZE)
546 {
547   int i, q;
548   double norm;
549   vector ab, ab0;
550
551   ab0 = new_vector(nb * SIZE);
552   ab  = new_vector(nb * SIZE);
553   if (ab0 == NULL || ab == NULL) {
554     fprintf(stderr, "メモリー不足\n");
555     exit(1);
556   }
557
558   for (q = 0; q <= 10; q++) {
559     for (i = 0; i < SIZE; i++)
560       v[i] = 0.0;
561
562     make(T, ab, ab0, nband, nb, SIZE,
563  u, v, nu, rho, x, y, num, cum, fx, fy);
564
565     bound(ab, nband, nb, v, b, N, D, cum, SIZE);
566
567     /* 連立 1 次方程式を解く */
568     {
569       int nrhs = 1, ldab = nb, ldb = SIZE, info;
570       dgbsv_(&SIZE, &nband, &nband, &nrhs, ab, &ldab, ipvt, v, &ldb, &info);
571       if (info == 0) {
572 if (verbose)
573   printf(" successful\n");
574       }
575       else if (info > 0)
576 printf(" U is singular\n");
577       else
578 printf("%d-th argument has illegal value.\n", abs(info));
579     }
580
581     norm = sqrt(innerproduct(SIZE, v, v) / SIZE);
582     printf("||(Δ u, Δ v, Δ p)||=%e\n", norm);
583
584     for (i = 0; i < SIZE; i++)
585       u[i] -= v[i];
586
587     if (norm < 1.0e-8)
588       return;
589   }
590     printf(" 収束しませんでした \n");
591 }
592
593
```

6.5 流速のベクトル場を描くプログラム

```
/*
 * fluid3.c --- 工藤氏 作成 (1995 年 2 月)
 *              プロトタイプ宣言など修正 (mk, 2004/8/31)
 *              厳密解がわかっているときは厳密解と
 *             誤差を求められるようにした (福嶋)
 */

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define G_DOUBLE
#include <glsc.h>
#include "matutil.h"

void glsc(int, int, int, int **, int *, vector, vector, vector);
void domain(int, int **, vector, vector);
void flow(int, int *, vector, vector, vector);
void arrow(double, double, double, double);

int main(int argc, char **argv)
{
    FILE *f1, *f2;
    int i, j, U, T, SIZE;
    int *cum, **num;
    vector x, y, u;

    if (argc != 3) {
printf("usage: %s <input> <output>\n", argv[0]);
exit(0);
    }
    if ((f1 = fopen(argv[1], "r")) == NULL) {
fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[1]);
exit(1);
    }
    if ((f2 = fopen(argv[2], "r")) == NULL) {
fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[2]);
exit(2);
    }

    fscanf(f1, "%d %d", &T, &U);

    x = new_vector(U);
    y = new_vector(U);
    for (i = 0; i < U; i++) {
fscanf(f1, "%lf %lf", &x[i], &y[i]);
    }
```

```
46
47      num = (int **) malloc(T * sizeof(void *));
48      if (num == NULL)
49  printf("要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
50      for (i = 0; i < T; i++) {
51  num[i] = (int *) malloc(sizeof(int) * 6);
52  if (num[i] == NULL) {
53      printf("要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
54  }
55      }
56      for (i = 0; i < T; i++) {
57  for (j = 0; j < 6; j++) {
58      fscanf(f1, "%d", &num[i][j]);
59  }
60      }
61
62      if ((cum = (int *) malloc(sizeof(int) * U)) == NULL) {
63  printf("累積節点番号用のメモリーが足りません \n");
64      }
65      for (i = 0; i < U; i++) {
66  fscanf(f1, "%d", &cum[i]);
67      }
68
69      fscanf(f1, "%d", &SIZE);
70      fclose(f1);
71
72      u = new_vector(SIZE);
73      for (i = 0; i < SIZE; i++) {
74  fscanf(f2, "%lf", &u[i]);
75      }
76      fclose(f2);
77
78      glsc(U, T, SIZE, num, cum, x, y, u);
79      return 0;
80  }
81
82  void glsc(int U, int T, int SIZE, int **num, int *cum,
83    vector x, vector y, vector u)
84  {
85      int i;
86      double left, right, top, bottom, widx, widy, Lx, Ly;
87
88      left = right = x[0];
89      top = bottom = y[0];
90
91      for (i = 1; i < U; i++) {
92  if (left > x[i])
93      left = x[i];
94  else if (right < x[i])
95      right = x[i];
96  if (top < y[i])
97      top = y[i];
98  else if (bottom > y[i])
99      bottom = y[i];
100     }
101
102     widx = fabs(left) + fabs(right);
103     widy = fabs(top) + fabs(bottom);
```

```
104
105     left -= 0.1 * widx;
106     right += 0.1 * widx;
107     top += 0.1 * widy;
108     bottom -= 0.1 * widy;
109
110     widx = fabs(left) + fabs(right);
111     widy = fabs(top) + fabs(bottom);
112
113     if (widx >= widy) {
114 Lx = 150.0;
115 Ly = Lx * widy / widx;
116     } else {
117 Ly = 150.0;
118 Lx = Ly * widx / widy;
119     }
120
121     g_init("Kudo", Lx + 10.0, Ly + 10.0);
122     g_device(3);
123     g_def_scale(0, left, right, bottom, top, 5.0, 5.0, Lx, Ly);
124     g_cls();
125     g_sel_scale(0);
126
127     printf("例えば 0 6 1 0.3\n");
128     printf("色番号 : 色 \n");
129     printf("０：黒　１：赤　２：緑　３：青 \n");
130     printf("４：紫　５：黄　６：水　７：白 \n");
131 #ifdef ORIGINAL
132     printf("背景の色番号は？ ");
133     scanf("%d", &i);
134 #else
135     i = 6;
136 #endif
137     g_line_color(i);
138     g_area_color(i);
139     g_box(left, right, bottom, top, 1, 1);
140
141     domain(T, num, x, y);
142     flow(U, cum, x, y, u);
143
144     g_sleep(-1.0);
145     g_term();
146 }
147
148 void domain(int T, int **num, vector x, vector y)
149 {
150     int i, j;
151     double zx[3], zy[3];
152
153 #ifdef ORIGINAL
154     printf("領域の色番号は？ ");
155     scanf("%d", &i);
156 #else
157     i = 7;
158 #endif
159
160     g_def_line(0, i, 0, 4);
161     g_sel_line(0);
```

```
162     g_area_color(i);
163
164     for (i = 0; i < T; i++) {
165 for (j = 0; j < 3; j++) {
166     zx[j] = x[num[i][j]];
167     zy[j] = y[num[i][j]];
168 }
169 g_polygon(zx, zy, 3, 0, 1);
170     }
171 }
172
173 double norm(double x, double y)
174 {
175   return sqrt(x*x+y*y);
176 }
177
178 void flow(int U, int *cum, vector x, vector y, vector u)
179 {
180     int i, kind, m;
181     double d , r ,theta;
182     vector ux, uy;
183     double c1, c2, mu, nu, omega1, omega2, exponent, bunbo, ur, ut, R1, R2;
184     double error, totalerror, maxerror;
185
186     ux = new_vector(U);
187     uy = new_vector(U);
188
189 #ifdef ORIGINAL
190     printf("↑の色番号は？ ");
191     scanf("%d", &i);
192 #else
193     i = 0;
194 #endif
195     g_def_line(0, i, 0, 0);
196     g_sel_line(0);
197
198     printf("↑の長さは？ ");
199     scanf("%lf", &d);
200
201     R1 = 0.5; R2 = 1.0;
202     mu = 1.0; nu = 1.0;
203     omega1 = 1.0; omega2 = 1.0; exponent = 2 + mu / nu;
204     bunbo = pow(R2, exponent) - pow(R1, exponent);
205     c1 = (omega1 * R1 * R1 * pow(R2, exponent)
206         - omega2 * R2 * R2 * pow(R1, exponent))/bunbo;
207     c2 = (omega2 * R2 * R2 - omega1 * R1 * R1) / bunbo;
208     printf("c1=%g, c2=%g\n", c1, c2);
209     /* 動径方向 M=5, 偏角方向 N=24 をさらに m 分割したときの m を求める  */
210     /* 実際は U = 2M'(2N' - 1) に M'=mM, N'=mN を代入して m について解いた */
211     m = (12 + sqrt(36 + 30 * U)) / 120;
212     for (i = 0; i < U; i++) {
213       r = sqrt(x[i]*x[i] + y[i]*y[i]);
214       theta = atan2(y[i],x[i]);
215       ur = mu / r; ut = (c1 / r + c2 * pow(r, 1 + mu / nu) );
216       ux[i] = ur * cos(theta) - ut * sin(theta);
217       uy[i] = ur * sin(theta) + ut * cos(theta);
218     }
219     totalerror = 0.0; maxerror = 0;
```

```
220      printf("何を書きますか? (0:厳密解, 1:近似解, 2:誤差)");
221      scanf("%d", &kind);
222      for (i = 0; i < U; i++) {
223        /* 分割が大きくなっても平気なように飛び飛びの点で速度を表示させる  */
224        if( i % m == 0 && (i / (48 * m)) % (2 * m) == 0){
225  if (kind == 2)
226    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * (u[cum[i]] - ux[i]),
227  y[i] + d * (u[cum[i] + 1] - uy[i]) );
228  else if (kind == 0)
229    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * ux[i], y[i] + d * uy[i]);
230  else
231    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * u[cum[i]], y[i] + d * u[cum[i]+1]);
232        }
233
234        /* 境界 Gamma2 ,すなわち外周上においても速度を表示させる. */
235        else if  (i % m == 0 && i / (48 * m * (10 * m -2)) == 1){
236  if (kind == 2)
237    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * (u[cum[i]] - ux[i]),
238  y[i] + d * (u[cum[i] + 1] - uy[i]) );
239  else if (kind == 0)
240    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * ux[i], y[i] + d * uy[i]);
241  else
242    arrow(x[i], y[i], x[i] + d * u[cum[i]], y[i] + d * u[cum[i]+1]);
243        }
244
245        error = norm(u[cum[i]]-ux[i],u[cum[i]+1]-uy[i]);
246        totalerror += error;
247        if (error > maxerror)
248  maxerror = error;
249      }
250      printf("totalerror=%e\n", sqrt(totalerror));
251      printf("max error=%e\n", maxerror);
252  }
253
254  void arrow(double x1, double y1, double x2, double y2)
255  {
256      double x3, y3, x4, y4;
257
258      x3 = 0.1 * ((x1 + 9.0 * x2) + (y2 - y1));
259      x4 = 0.1 * ((x1 + 9.0 * x2) - (y2 - y1));
260      y3 = 0.1 * ((y1 + 9.0 * y2) - (x2 - x1));
261      y4 = 0.1 * ((y1 + 9.0 * y2) + (x2 - x1));
262
263      g_move(x1, y1);
264      g_plot(x2, y2);
265      g_plot(x3, y3);
266      g_move(x2, y2);
267      g_plot(x4, y4);
268  }
269
270
271
272
273
274
275
276
277
```

6.6 等圧線を描くプログラム

```
/*
* contour.c ---工藤プログラムのフォーマットのデータを読んで圧力場を描く
*              色付けで高低差がわかるように改良 (福嶋)
*/

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define G_DOUBLE
#include <glsc.h>
#include "matutil.h"

void glsc(int, int, int, int **, int *, vector, vector, vector);
void domain(int, int **, vector, vector);
void flow(int, int *, vector, vector, vector);
void arrow(double, double, double, double);
void draw_contour(int, int, int, int **, int *, vector, vector, vector);
void open_window(int, int, int, int **, int *, vector, vector, vector);
void draw_elements(int, int, int, int **, int *, vector, vector, vector);
void celldraw(double, double, double,
      double, double, double,
      double, double, double,
      double);
void line_level(int ll);

int main(int argc, char **argv)
{
    FILE *f1, *f2;
    int i, j, U, T, SIZE;
    int *cum, **num;
    vector x, y, u;

    if (argc != 3) {
printf("usage: %s <input> <output>\n", argv[0]);
exit(0);
    }
    if ((f1 = fopen(argv[1], "r")) == NULL) {
fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[1]);
exit(1);
    }
    if ((f2 = fopen(argv[2], "r")) == NULL) {
fprintf(stderr, "Can't open %s", argv[2]);
exit(2);
    }

    fscanf(f1, "%d %d", &T, &U);

    x = new_vector(U);
    y = new_vector(U);
    if (x == NULL || y == NULL) {
```

```
50        fprintf(stderr, "\n");
51        exit(1);
52      }
53      for (i = 0; i < U; i++) {
54  fscanf(f1, "%lf %lf", &x[i], &y[i]);
55      }
56
57      num = malloc(T * sizeof(void *));
58      if (num == NULL)
59  printf("要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
60      for (i = 0; i < T; i++) {
61  num[i] = malloc(sizeof(int) * 6);
62  if (num[i] == NULL) {
63      fprintf(stderr, "要素と節点の対応用のメモリーが足りません\n");
64      exit(1);
65  }
66      }
67      for (i = 0; i < T; i++)
68  for (j = 0; j < 6; j++)
69      fscanf(f1, "%d", &num[i][j]);
70
71      if ((cum = malloc(sizeof(int) * U)) == NULL) {
72  fprintf(stderr, "累積節点番号用のメモリーが足りません \n");
73  exit(1);
74      }
75      for (i = 0; i < U; i++)
76  fscanf(f1, "%d", &cum[i]);
77
78      fscanf(f1, "%d", &SIZE);
79      fclose(f1);
80
81      u = new_vector(SIZE);
82      if (u == NULL) {
83  fprintf(stderr, "流速・圧力のメモリーが足りません \n");
84  exit(1);
85      }
86      for (i = 0; i < SIZE; i++)
87  fscanf(f2, "%lf", &u[i]);
88      fclose(f2);
89
90      open_window(U, T, SIZE, num, cum, x, y, u);
91
92  #ifdef OLD
93      glsc(U, T, SIZE, num, cum, x, y, u);
94  #else
95      /* draw_elements(U, T, SIZE, num, cum, x, y, u); */
96      draw_contour(U, T, SIZE, num, cum, x, y, u);
97      g_circle(0.0, 0.0, 1.0, G_YES, G_NO);
98      g_circle(0.0, 0.0, 0.5, G_YES,G_NO);
99  #endif
100
101     g_sleep(-1.0);
102     g_term();
103
104     return 0;
105 }
106
107 void open_window(int U, int T, int SIZE, int **num, int *cum,
```

```
108   vector x, vector y, vector u)
109  {
110    int i;
111    double left, right, top, bottom, widx, widy, Lx, Ly;
112    left = right = x[0];
113    top = bottom = y[0];
114
115    for (i = 1; i < U; i++) {
116      if (left > x[i])
117        left = x[i];
118      else if (right < x[i])
119        right = x[i];
120      if (top < y[i])
121        top = y[i];
122      else if (bottom > y[i])
123        bottom = y[i];
124    }
125    printf("left=%g,right=%g\n",left,right);
126    printf("bottom=%g,top=%g\n",bottom,top);
127
128    widx = fabs(left) + fabs(right);
129    widy = fabs(top) + fabs(bottom);
130
131    left -= 0.1 * widx;
132    right += 0.1 * widx;
133    top += 0.1 * widy;
134    bottom -= 0.1 * widy;
135
136    widx = fabs(left) + fabs(right);
137    widy = fabs(top) + fabs(bottom);
138
139    if (widx >= widy) {
140      Lx = 150.0;
141      Ly = Lx * widy / widx;
142    }
143    else {
144      Ly = 150.0;
145      Lx = Ly * widx / widy;
146    }
147    printf("Lx=%g,Ly=%g\n",Lx,Ly);
148    g_init("Kudo", Lx + 10.0, Ly + 10.0);
149    g_device(3);
150    g_def_scale(0, left, right, bottom, top, 5.0, 5.0, Lx, Ly);
151    g_cls();
152    g_sel_scale(0);
153
154    printf("例えば 0 6 1 0.3\n");
155    printf("色番号 : 色 \n");
156    printf("０：黒　１：赤　２：緑　３：青 \n");
157    printf("４：紫　５：黄　６：水　７：白 \n");
158
159  #ifdef OLD
160    printf("背景の色番号は？ ");
161    scanf("%d", &i);
162  #else
163    printf("背景は白にします\n");
164    i = 7;
165  #endif
```

```
166    g_line_color(i);
167    g_area_color(i);
168    g_box(left, right, bottom, top, 1, 1);
169  }
170
171  void glsc(int U, int T, int SIZE, int **num, int *cum,
172    vector x, vector y, vector u)
173  {
174      int i;
175
176      domain(T, num, x, y);
177      flow(U, cum, x, y, u);
178
179  }
180
181  void domain(int T, int **num, vector x, vector y)
182  {
183      int i, j;
184      double zx[3], zy[3];
185
186      printf("領域の色番号は？ ");
187      scanf("%d", &i);
188
189      g_def_line(0, i, 0, 4);
190      g_sel_line(0);
191      g_area_color(i);
192
193      for (i = 0; i < T; i++) {
194  for (j = 0; j < 3; j++) {
195      zx[j] = x[num[i][j]];
196      zy[j] = y[num[i][j]];
197  }
198  g_polygon(zx, zy, 3, 0, 1);
199      }
200  }
201
202  /* 流速ベクトル場を描く */
203  void flow(int U, int *cum, vector x, vector y, vector u)
204  {
205      int i;
206      double d;
207
208      printf("↑の色番号は？ ");
209      scanf("%d", &i);
210      g_def_line(0, i, 0, 0);
211      g_sel_line(0);
212
213      printf("↑の長さは？ ");
214      scanf("%lf", &d);
215
216      for (i = 0; i < U; i++)
217  arrow(x[i], y[i], x[i] + d * u[cum[i]], y[i] + d * u[cum[i] + 1]);
218  }
219
220  /* 矢印を描く */
221  void arrow(double x1, double y1, double x2, double y2)
222  {
223      double x3, y3, x4, y4;
```

```
224
225     x3 = 0.1 * ((x1 + 9.0 * x2) + (y2 - y1));
226     x4 = 0.1 * ((x1 + 9.0 * x2) - (y2 - y1));
227     y3 = 0.1 * ((y1 + 9.0 * y2) - (x2 - x1));
228     y4 = 0.1 * ((y1 + 9.0 * y2) + (x2 - x1));
229
230     g_move(x1, y1);
231     g_plot(x2, y2);
232     g_plot(x3, y3);
233     g_move(x2, y2);
234     g_plot(x4, y4);
235 }
236
237 /* 三角形要素を描く */
238 void draw_elements(int nnode, int num_element, int num_unknowns,
239    int **num, int *cum,
240    vector x, vector y, vector u)
241 {
242   int i, j, p[3];
243
244   printf("要素を描く\n");
245   g_def_line(0, G_BLACK, 0, G_LINE_DOTS);
246   g_sel_line(0);
247   for (i = 0; i < num_element; i++) {
248     for (j = 0; j < 3; j++)
249       p[j] = num[i][j];
250     g_move(x[p[2]], y[p[2]]);
251     for (j = 0; j < 3; j++)
252       g_plot(x[p[j]], y[p[j]]);
253   }
254 }
255
256 /* 等高線に色付け */
257 void line_level(int ll)
258 {
259   int color, type;
260   if(ll == 0 || ll == 1)
261     {
262       type = ll % 2;
263       g_line_color(3);
264       g_line_type(type);
265       g_line_width(2);
266     }
267
268   if(ll == 2 || ll == 3)
269     {
270       type = ll % 2;
271       g_line_color(6);
272       g_line_type(type);
273       g_line_width(2);
274     }
275
276   if(ll == 4 || ll == 5)
277     {
278       type = ll % 2;
279       g_line_color(2);
280       g_line_type(type);
281       g_line_width(2);
```

```
282     }
283
284   if(ll == 6 || ll == 7)
285     {
286       type = ll % 2;
287       g_line_color(4);
288       g_line_type(type);
289       g_line_width(2);
290     }
291
292   else if(ll == 8){
293     g_line_color(1);
294     g_line_type(0);
295     g_line_width(2);
296   }
297
298   else if(ll == 9){
299     g_line_color(G_BLACK);
300     g_line_type(0);
301   }
302 }
303
304 /* 等高線を描く */
305 void draw_contour(int nnode, int num_element, int num_unknowns,
306   int **num, int *cum,
307   vector x, vector y, vector u)
308 {
309   int i, j, k, p[3], level;
310   double pmax, pmin, h;
311
312   printf("要素を描く\n");
313   g_def_line(2, G_BLACK, 0, G_LINE_SOLID);
314   g_sel_line(2);
315   pmax = pmin = u[2];
316   for (i = 0; i < num_element; i++) {
317     for (j = 0; j < 3; j++) {
318       k = cum[num[i][j]] + 2;
319       if (u[k] > pmax)
320 pmax = u[k];
321       else if (u[k] < pmin)
322 pmin = u[k];
323     }
324   }
325   printf("最大最小ゲット\n");
326   for (level = 0; level < 10; level++) {
327     h = pmin + level * (pmax - pmin) / 10;
328     for (i = 0; i < num_element; i++) {
329       for (j = 0; j < 3; j++)
330 p[j] = num[i][j];
331       celldraw(x[p[0]], x[p[1]], x[p[2]],
332        y[p[0]], y[p[1]], y[p[2]],
333        u[cum[p[0]]+2], u[cum[p[1]]+2], u[cum[p[2]]+2], h);
334     }
335     line_level(level);
336   }
337 }
338
339 /* 一つの三角形内で高さ h の等高線を描く */
```

```
340  void celldraw(double x1, double x2, double x3,
341        double y1, double y2, double y3,
342        double u1, double u2, double u3,
343        double h)
344  {
345    double px[4], py[4];
346    int n;
347    double r;
348
349    n = 0;
350
351    if ((u1-h)*(u2-h)<=0) {
352      n++;
353      if (u1==h) {
354        px[n] = x1;
355        py[n] = y1;
356      }
357      else if (u2==h) {
358        px[n] = x2;
359        py[n] = y2;
360      }
361      else {
362        r = (u1 - h) / (u1 - u2);
363        px[n] = (1 - r) * x1 + r * x2;
364        py[n] = (1 - r) * y1 + r * y2;
365      }
366    }
367    if ((u2-h)*(u3-h)<=0) {
368      n++;
369      if (u2==h) {
370        px[n] = x2;
371        py[n] = y2;
372      }
373      else if (u3==h) {
374        px[n] = x3;
375        py[n] = y3;
376      }
377      else {
378        r = (u2 - h) / (u2 - u3);
379        px[n] = (1 - r) * x2 + r * x3;
380        py[n] = (1 - r) * y2 + r * y3;
381      }
382    }
383    if ((u3-h)*(u1-h)<=0) {
384      n++;
385      if (u3==h) {
386        px[n] = x3;
387        py[n] = y3;
388      }
389      else if (u1==h) {
390        px[n] = x1;
391        py[n] = y1;
392      }
393      else {
394        r = (u3 - h) / (u3 - u1);
395        px[n] = (1 - r) * x3 + r * x1;
396        py[n] = (1 - r) * y3 + r * y1;
397      }
```

```
398    }
399
400    if (n==2) {
401      g_move(px[1], py[1]);
402      g_plot(px[2], py[2]);
403    }
404    else if (n==3) {
405      g_move(px[1], py[1]);
406      g_plot(px[2], py[2]);
407      g_plot(px[3], py[3]);
408      g_plot(px[1], py[1]);
409    }
410  }
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
```


謝辞

本論文の作成に限らず, 長きにわたりご指導と暖かい励ましを頂きました森本 浩子 教授に深く感謝いたします. また, 本年度ご指導を頂きました桂田 祐史 助教授と, 元となるプログラムを提供していただいた工藤 丈征 氏に心から御礼申し上げます.

参考文献

[1] 川原 睦人, 有限要素法流体解析, 日科技連 (1985)

[2] 菊地 文雄, 有限要素法の数理, 培風館 (1994)

[3] 菊地 文雄, 有限要素法概説 [新訂版], サイエンス社 (1999)

[4] 工藤 丈征, 有限要素法による Navier-Stokes 方程式の数値解析プログラム取扱説明書, 明治大学大学院 (1995)

[5] 塩谷 光晴, 定常 Stokes 方程式の解の精度保証付き数値計算, 明治大学大学院修士学位請求論文 (2003)

[6] 杉原正顯・室田一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994)

[7] H.Morimoto, A Solution to the Stationary Navier-Stokes Equation under the Boundary Condition with Non-Vanishing Outflow, Memoirs of the Institute of Science and Technology Meiji UniAversity Vol.31 No.2(1992)

[8] H.Morimoto and S.Ukai, Perturbation of the Navier-Stokes flow in an annular domain with the non-vanishing outflow condition, J.Math.Sci. Univ. Tokyo **3**,73-82(1996)

[9] H.Morimoto, General Outflow Condition for Navier-Stokes Flow, Num. Appl. Anal., 16, 209-224(1998)