差分法関係のプログラムの説明 その1

桂田 祐史

2017 年 10 月 6 日, 2019 年 1 月 18 日

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fdm/notes-on-progs.pdf

0 はじめに

ずっと以前、卒研の輪講で偏微分方程式を学んだ際に、菊地・山本「微分方程式と計算機演習」[1] を副読本として採用した。そこには、1 次元熱方程式を差分法で解く FORTRAN プログラムが載っている。それをたたき台にした C プログラムを用意して、学生達に卒研に取り組んでもらった。以来、それらプログラムに修正・改良を施したものを公開してある。

グラフィックスには、日本の応用数学 (解析系) の研究者にはポピュラーな GLSC を利用してある。

ここでは現象数理学科 Mac での利用を想定し、`cglsc` コマンドが使えると仮定して説明する。

この文書では、以下の 3 つのプログラムについて説明する。

1. `heat1d-e-glsc.c`
2. `heat1d-i-glsc.c`
3. `heat1n-i-glsc.c`

「発展系の数値解析」の 7.4 節, 7.5 節の計算は、`heat1d-i-glsc.c`, `heat1n-i-glsc.c` を用いて行った。

こうやって入手

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fdm/heat1d-e-glsc.c
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fdm/heat1d-i-glsc.c
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/fdm/heat1n-i-glsc.c
```

1 heat1d-e-glsc.c

`heat1d-e-glsc.c` は、同次 Dirichlet 境界条件 ($u(0,t) = u(1,t) = 0$) の元での 1 次元熱方程式を差分法の陽解法 (explicit scheme) で解くためのプログラムである。どのように計算してあるかが読み取りやすいように書かれたプログラムである (両面印刷すれば 1 枚の紙に収まる)。桂田 [2] の 7.3 節を見ながら解読すると良い。

heat1d-e-glsc.c

```
% cglsc heat1d-e-glsc.c
% ./heat1d-e-glsc.c
区間の分割数 N = 20
λ (=τ/h^2) = 0.5
τ=0.00125
最終時刻 Tmax = 1
終りました。X の場合はウィンドウをクリックして下さい。
```

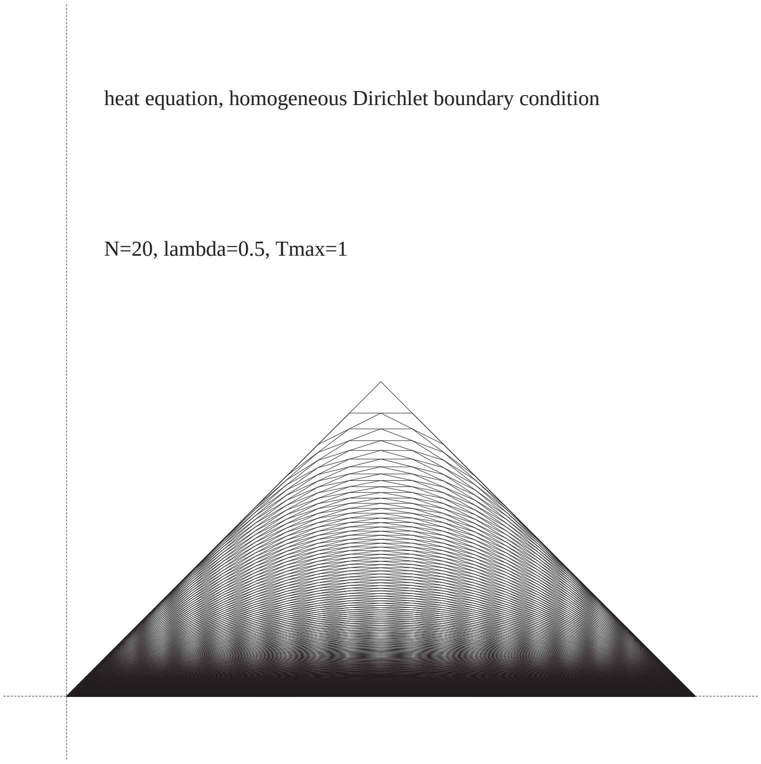

図 1: heat1d-e-glsc の実行結果 ($N = 100$, $\lambda = 1/2$, $T_{\max} = 1$)

初期条件は

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

2 heat1d-i-glsc.c

`heat1d-i-glsc.c` は、同次 Dirichlet 境界条件のもとでの 1 次元熱方程式を θ 法という陰解法 (implicit shceme) で解くためのプログラムである。

桂田 [2] の 7.5 節 (3) を見ながら解読すると良い。(なお、連立 1 次方程式を解くための関数 `trilu()`, `trisol()` については、桂田 [3] の 5 章 (特に 7 節) を見よ。)

次のような工夫をしてあるので、陽解法の計算をするためにも、`heat1d-e-glsc.c` でなく、`heat1d-i-glsc.c` を使う方が便利である (θ 法は、$\theta = 0$ とすると陽解法である)。

1. 初期値を複数用意してあって、番号で選べるようになっている。

$$f_1(x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 1/2) \\ 1 - x & (1/2 \le x \le 1), \end{cases}$$

$$f_2(x) \equiv 1,$$

$$f_3(x) = \sin(\pi x),$$

f_4, f_5 はグラフがジグザグしている関数である。

2. すべての時間ステップでグラフを描くと、画面が塗りつぶしたようになって見にくいので、指定した時間間隔 Δt でグラフを描くようになっている。

3. プログラム中の変数 eraes_always, print_numerical_data の値を 1 にすると、それぞれ、ステップ毎に画面を消去する (古いステップで描いたグラフを消す)、計算した数値データを画面表示する。

```
% cglsc heat1d-i-glsc.c
% ./heat1d-i-glsc
入力して下さい : nfunc(1..5)=1
入力して下さい : θ=0
入力して下さい : N=100
入力して下さい : λ=0.5
 時間の刻み幅τ= 5e-05 になりました。
入力して下さい : 最終時刻 Tmax=1
入力して下さい : グラフ書き換え時間間隔(Δt)=0.01
T=   0.0000e+00
  I      u(i)       I      u(i)       I      u(i)       I      u(i)       I      u(i)
  0  0.0000e+00   1  1.0000e-02   2  2.0000e-02   3  3.0000e-02   4  4.0000e-02
  5  5.0000e-02   6  6.0000e-02   7  7.0000e-02   8  8.0000e-02   9  9.0000e-02
 10  1.0000e-01  11  1.1000e-01  12  1.2000e-01  13  1.3000e-01  14  1.4000e-01
 15  1.5000e-01  16  1.6000e-01  17  1.7000e-01  18  1.8000e-01  19  1.9000e-01
 20  2.0000e-01  21  2.1000e-01  22  2.2000e-01  23  2.3000e-01  24  2.4000e-01
 25  2.5000e-01  26  2.6000e-01  27  2.7000e-01  28  2.8000e-01  29  2.9000e-01
 30  3.0000e-01  31  3.1000e-01  32  3.2000e-01  33  3.3000e-01  34  3.4000e-01
 35  3.5000e-01  36  3.6000e-01  37  3.7000e-01  38  3.8000e-01  39  3.9000e-01
 40  4.0000e-01  41  4.1000e-01  42  4.2000e-01  43  4.3000e-01  44  4.4000e-01
 45  4.5000e-01  46  4.6000e-01  47  4.7000e-01  48  4.8000e-01  49  4.9000e-01
 50  5.0000e-01  51  4.9000e-01  52  4.8000e-01  53  4.7000e-01  54  4.6000e-01
 55  4.5000e-01  56  4.4000e-01  57  4.3000e-01  58  4.2000e-01  59  4.1000e-01
 60  4.0000e-01  61  3.9000e-01  62  3.8000e-01  63  3.7000e-01  64  3.6000e-01
 65  3.5000e-01  66  3.4000e-01  67  3.3000e-01  68  3.2000e-01  69  3.1000e-01
 70  3.0000e-01  71  2.9000e-01  72  2.8000e-01  73  2.7000e-01  74  2.6000e-01
 75  2.5000e-01  76  2.4000e-01  77  2.3000e-01  78  2.2000e-01  79  2.1000e-01
 80  2.0000e-01  81  1.9000e-01  82  1.8000e-01  83  1.7000e-01  84  1.6000e-01
 85  1.5000e-01  86  1.4000e-01  87  1.3000e-01  88  1.2000e-01  89  1.1000e-01
 90  1.0000e-01  91  9.0000e-02  92  8.0000e-02  93  7.0000e-02  94  6.0000e-02
 95  5.0000e-02  96  4.0000e-02  97  3.0000e-02  98  2.0000e-02  99  1.0000e-02
100  0.0000e+00
マウスでウィンドウをクリックして下さい。
%
```

3 heat1n-i-glsc.c

heat1n-i-glsc.c は、同次 Neumann 境界条件 $(u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0)$ のもとでの 1 次元熱方程式を θ 法という陰解法 (implicit shceme) で解くためのプログラムである。

桂田 [4] の 1.4 節第 3 項を見ながら解読すると良い。

使い方はほぼ heat1d-i-glsc.c と同じである。

参考文献

[1] 菊地文雄, 山本昌宏：微分方程式と計算機演習, 山海堂 (1991).

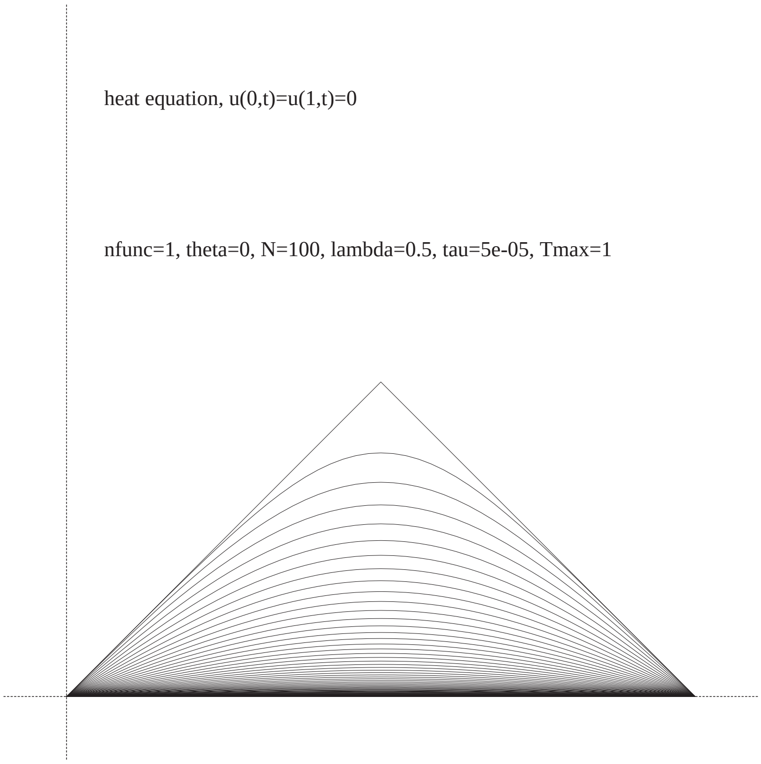

図 2: heat1d-i-glsc の実行結果 (`nfunc`$= 1$, $N = 100$, $\lambda = 1/2$, $T_{\max} = 1$)

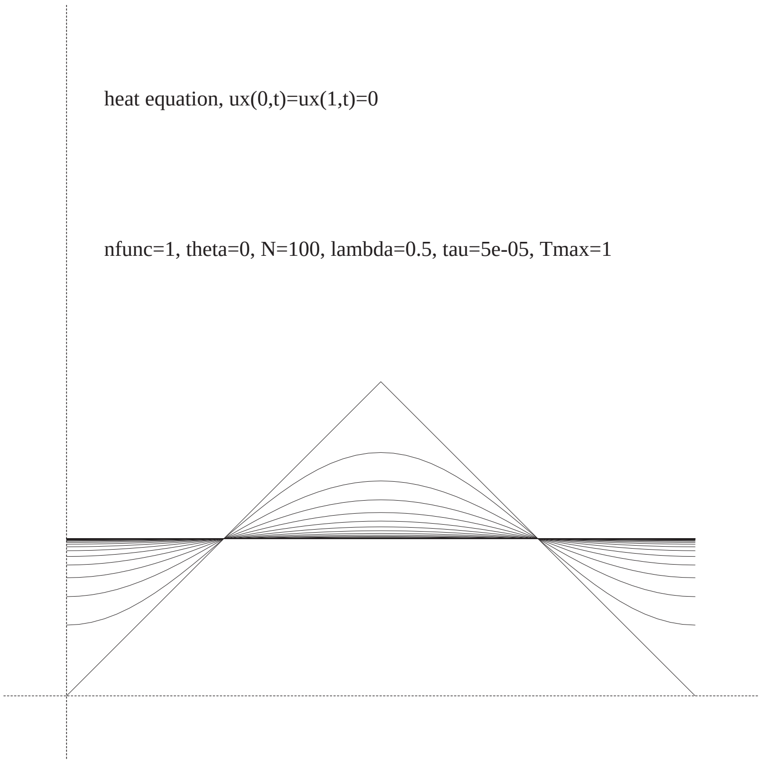

図 3: heat1n-i-glsc の実行結果 (`nfunc`$= 1$, $N = 100$, $\lambda = 1/2$, $T_{\max} = 1$)

[2] 桂田祐史：発展系の数値解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0.pdf (1997 年〜).

[3] 桂田祐史：連立 1 次方程式 I, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/linear-eq-1.pdf (2002 年〜).

[4] 桂田祐史：熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-1.pdf (1998 年〜).