(http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/cminimum/)

4 練習問題

これまで卒研など色々な機会に練習用の問題を出してきた。

4.1 比較的簡単のもの

[1] 自然数 n を入力されたとき、$1+2+\cdots+n$ を計算して、その結果を表示するプログラムを書け[7]。

[2] 実数 a, 自然数 n を入力されたとき、a^n を計算して、その結果を表示するプログラムを書け[8]。

[3] 自然数 k, n を入力されたとき、$1^k, 2^k, \cdots, n^k$ を表示するプログラムを書け[9]。

[4] $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+2$ $(n\ge 1)$ で定まる数列の最初の 100 項を計算して表示するプログラムを書け (n が大きいときは近似値で構わない — 正確に計算するのは面倒である)。

[5] $a_0=1$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\ge 0)$ で定まる数列 (フィボナッチ数列) $\{a_n\}$ に対して、$n=1,2,\dots,100$ の順に a_n と a_n/a_{n-1} を計算して表示せよ。(n が大きいときは近似値で構わない — すべて正確に…)
[番外] a_n/a_{n-1} の極限は何か？ (簡単な数学の問題)

[6] n を与えられたとき

$$S_1(n):=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad S_2(n):=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

を計算するプログラムを書け。計算結果は double の精度一杯まで表示せよ。
[番外] $\lim_{n\to\infty} S_2(n)=\pi^2/6$ であることが知られている。点 $(n,\pi^2/6-S_2(n))$ を両側対数目盛でプロットすることによって、収束の速さを調べよ。

[7] 自然数 n を入力されたとき、$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ を計算して結果を表示するプログラムを書け ($1/k!$ は漸化式で計算するのが簡単)。

[8] 関数 $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ のグラフを描くプログラムを書け。ただし f を計算する関数をプログラム中に書くものとする。特に

$$f(x):=\begin{cases} x & (0\le x\le 1/2)\\ 1-x & (1/2\le x\le 1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

の場合に $-0.2\le x\le 1.2$ の範囲のグラフを描け。

[7]もちろん $n(n+1)/2$ を計算すれば簡単なわけだが、繰り返しの練習なので、正直に 1 から n まで足すこと。
[8]もちろん冪乗を計算する pow() を使えば簡単だが、繰り返しの練習なので…
[9]for を二重に用いるプログラムを書こう。

[9] (ここまでの応用) 与えられた自然数 n, 実数 x に対して

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

を計算する関数を書き、$n = 1, 2, 3, \cdots, 10$ に対して $s_n(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ のグラフを描け (「Taylor 級数のプログラミングには漸化式を」)。

[10] $\mathbf{R}^3$ における極座標をデカルト座標 (直交座標) に変換するコードは簡単で、

```
x = r * sin(theta) * cos(phi);
y = r * sin(theta) * sin(phi);
z = r * cos(theta);
```

とすれば良い。この逆をする (つまりデカルト座標を極座標に変換する) 関数 `d2p()` を作って、動くことをチェックせよ[10]。

```
d2p(x, y, z, &r, &theta, &phi);
```

のようにして呼び出せるようにすること。

[11] 常微分方程式の初期値問題を Euler 法、Runge-Kutta 法などの数値解法で近似的に解けることは重要である。以下の初期値問題を解くプログラムを作れ。結果を可視化せよ。

(1) $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$.
$x(1) = e$ となるはずだが、計算で得た値と比較せよ。

(2) $x''(t) = -g - \gamma x'(t)$, $x(0) = H$, $x'(0) = 0$. ただし $g > 0$, $\gamma \ge 0$ は定数とする。
これは速度に比例する空気抵抗が存在する場合の自由落下を記述する微分方程式である。
実は (抵抗が速度の自乗に比例する) $x''(t) = -g - \gamma x'(t)^2$ が正しいという説もある。

(3) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. ここで a, b, c, d は与えられた定数である。さまざまな (x_0, y_0) に対して解軌道を描け。

[12] 方程式 $\cos x - x = 0$ の実数解を、二分法または Newton 法で計算するプログラムを作れ。

($f(x) := \cos x - x$ は狭義単調減少で、$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = \cos 1 - 1 < 0$ であるから、区間 $(0, 1)$ にただ 1 つの実数解を持つことが分かる。)

4.2 ベクトルの扱いの練習

(ここは大規模工事が必要なので…参考程度に)

[5] 長さ n の配列で n 次元のベクトルを表現することができる。n 次元ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の最大値ノルム

$$\|\vec{a}\|_\infty := \max_{i=1,2,\cdots,n} |a_i|$$

を計算する関数を作ることを目標にする。手始めに、標準入力から入力された 3 次元ベクトルの最大値ノルムを計算する、次のようなプログラムを書き始めた。関数 `maxnorm0()` を完成させよ。

[10] ちょっと短かすぎて悪い名前だが、Decartes 座標 to Polar 座標、のニュアンス。