

野球ボールの軌跡と速度

2018年度卒業研究レポート
明治大学総合数理学部現象数理学科
吉田海人

2019年2月28日

目次

1	はじめに	3
2	抗力	4
3	揚力	5
4	抗力係数と揚力係数	6
5	運動方程式	8
6	ボールの軌跡	10
6.1	ストレート	10
6.2	スライダー	12
7	回転数と球速	14
8	終わりに	15
9	プログラム	16

1 はじめに

今回私は「野球ボールの軌跡と速度」をテーマに研究した。今まで学んできた数値解析を使え、かつ私自身が野球に興味があったこともあり、今回のテーマを選んだ。

回転のかかったボールの運動を方程式で表し、ボールの軌跡と速度がどうなっていくのかを明らかにすることが目標である。

条件は以下のものとする

重力加速度 $g \cdots 9.8(\text{m/s}^2)$

ボールの半径 $r \cdots 0.035(\text{m})$

ボールの質量 $m \cdots 0.15(\text{kg})$

空気密度 $\rho \cdots 1.3(\text{kg/m}^3)$

マウンドとホームベースまでの距離 $\cdots 18.44(\text{m})$

縫い目の凹凸は考えないものとする

水平方向で、マウンドとホームベースの中心を通る軸を x 軸

水平方向で、 x 軸と直角な軸を y 軸

鉛直方向を z 軸

とする。

2 抗力

気体中を移動する物体には、気体による抗力という力が働く。抗力は、物体の進行方向とは逆向きに働く。

抗力は、

$$c = \frac{1}{2} C_d \rho S v^2 \quad (1)$$

で与えられる。文字はそれぞれ、

c …抗力 (N)

C_d …抗力係数

ρ …空気密度

S …ボールの断面積 (m^2) (ボールの中心を通るように切った時の断面積)

v …速さ (m/s)

とおく。式を見てみると、ボールの大きさや速さの増加に伴い、抗力も増加していくのが分かる。

3 揚力

揚力は、物体に回転を加えることによって、進行方向に垂直な方向に働く力という。特に、回転によって揚力が働く現象をマグナス効果と呼ぶ。揚力の向きは、角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とすると、 $\vec{\omega} \times \vec{v}$ の向きである。例えば、トップスピンでは鉛直下向きに働き、バックスピンでは鉛直上向きに働く。

揚力は、

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho S v^2 \quad (2)$$

で与えられる。文字はそれぞれ、

L …揚力 (N)

C_L …抗力係数

ρ …空気密度 (kg/m^3)

S …ボールの断面積 (m^2) (ボールの中心を通るように切った時の断面積)

v …速さ (m/s)

である。抗力との違いは C_d と C_L の違いのみで、ボールの大きさや速さの増加に伴い、抗力も増加していくところは同じである。

- トップスピンは 進行方向に対して垂直で地面と平行な回転軸で前回転するスピン
- バックスピンはトップスピンと逆回転するスピン

4 抗力係数と揚力係数

論文 [2] によると、ゴルフボールの抗力係数 C_d と揚力係数 C_L は、スピンパラメータ s_p の関数で

$$C_d(sp) = 0.751s_p^4 - 1.76s_p^3 + 1.098s_p^2 + 0.2148s_p + 0.2049 \quad (3)$$

$$C_L(sp) = -0.2158s_p^4 + 1.006s_p^3 - 1.644s_p^2 + 1.25s_p + 0.0616 \quad (4)$$

と表すことができる。この式は s_p を 0.03~1.13 の間で実験によって求めることができた近似式ではあるが、ゴルフボールを使って得られた結果のため、実際の野球ボールとは多少違う結果が得られることになると考えられる。ただ、一旦今回はこの式を採用してシミュレーションをしていく。

- スピンパラメータ s_p

回転数と速度の比を表したものの。スピンパラメータ s_p は

$$s_p = \frac{\pi d N}{v}$$

で与えられる。ただし、

d ... ボールの直径 (m)

N ... 回転数 (rps) とおく。

抗力係数 C_d 、揚力係数 C_L をグラフで表したら以下の通りになった。

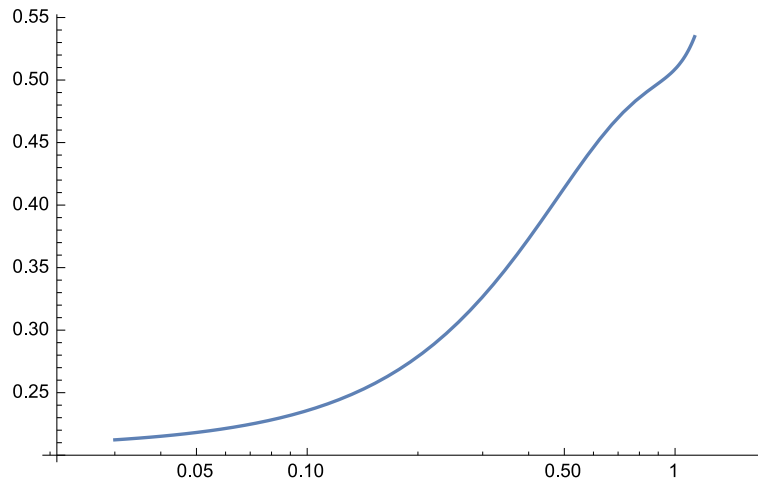


図 1: (横) s_p 、(縦) C_d

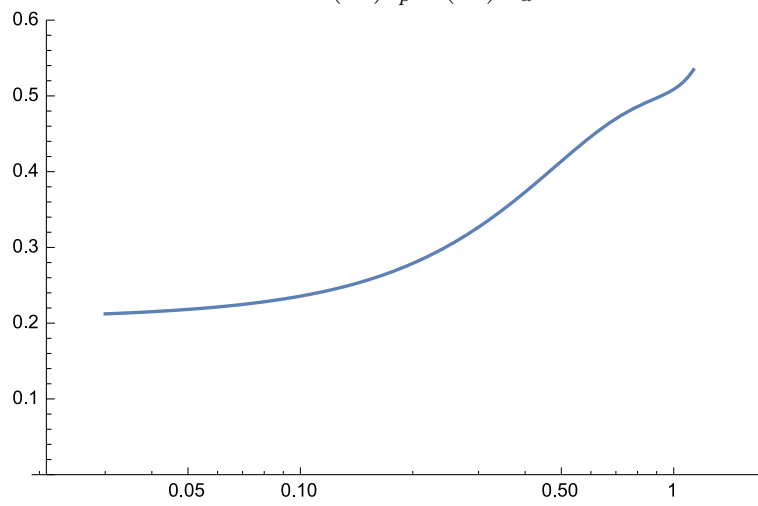


図 2: (横) s_p 、(縦) C_L

図 1 と図 2 のどちらも増加関数なので、 s_p の値が大きくなると C_d 、 C_L の値も大きくなるのが分かる。

5 運動方程式

重力、抗力、揚力で表した運動方程式は、

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \vec{c} + \vec{L} + m\vec{g} \\ \vec{c} &= -\frac{1}{2}C_d\rho S\vec{v}|\vec{v}| \\ \vec{L} &= \frac{1}{2}C_L\rho S\vec{v}|\vec{v}| \end{aligned} \quad (5)$$

で表すことが出来る ($\vec{g} = (0, -g)$)。運動方程式は $m\vec{a} = \vec{F}$ (m は質量、 \vec{a} は加速度、 \vec{F} は力) であり、左辺の \vec{a} は速さを t で微分することにより求められ、右辺はこの運動中に働いている力は重力、抗力、揚力の3種類のため、このように表せられる。

また、 C_L は (4) で表すことも出来るが、 α を比例定数¹とおくと、

$$C_L = \frac{2\alpha r\omega}{v} \quad (6)$$

で表すことができる (ω は角速度 (rad/s))。 (6) を (2) に代入すると、

$$L = \alpha r\rho S\omega|\vec{v}| \quad (7)$$

となる。

次ページで、 $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とおくことにより、回転の方向も加味した方程式をたてる。

¹ α はボールの表面状態やレイノルズ数によって決まる比例定数

ベクトルを加味した揚力を \vec{L} とおくと、

$$\vec{L} = \alpha r \rho S (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (8)$$

と表せる。 $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ は $\vec{\omega}$ と \vec{v} の外積であり、 $\vec{\omega}$ は回転軸の向き、 $|\vec{\omega}|$ は回転数を表す。回転軸の向きと速さの外積により、揚力の向き、大きさを求めることができる。

解く方程式は、(5) の式に (8) を代入した式になるので、

$$m \frac{dv}{dt} = -c + \vec{L} + m\vec{g} \quad (9)$$

となる。この微分方程式を Runge-Kutta 法で解き、計算結果をプロットする。

- Runge-Kutta 法

$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ 、 $y(t_0) = y_0$ という未知関数 y による初期値問題の近似解を求める計算方法。

時間の刻み幅を τ とおくと、

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= \tau f(t_n, y_n) \\ k_2 &= \tau f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \tau f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \tau f(t_n + \tau, k_3) \end{aligned}$$

が Runge-Kutta 法の公式である。この操作を繰り返すことにより、任意の時刻 t_n における近似値 y_n が求められる。

6 ボールの軌跡

6.1 ストレート

ストレートの回転数を $n(\text{rps})$ とする時、回転軸を $\vec{\omega} = (0, -n, 0)$ の向きにするものとする。今回は $z=2.0$ の高さから水平方向に投げるシミュレーションをした。

- 回転数を変える (144km/h 固定)

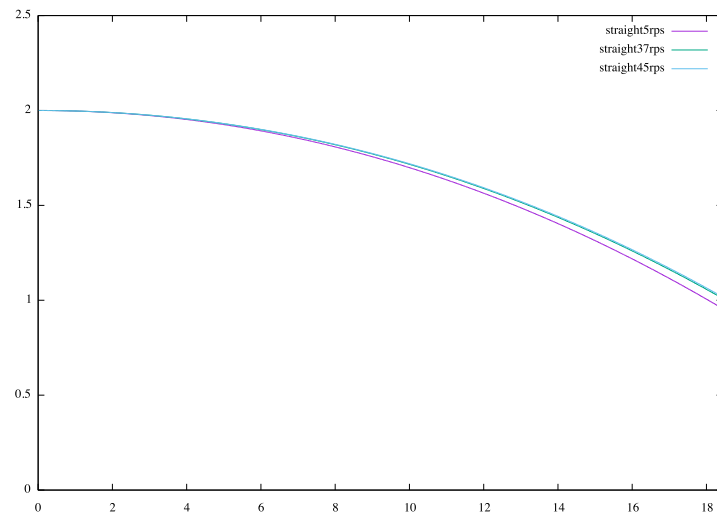


図 3: [横] x [縦] z で、5rps(赤)、37rps(緑)、45rps(青)の軌跡

表 1: $x=18.44$ での z の値

5rps	37rps	45rps
0.956m	1.01m	1.017m

回転数が多い方がボールの落差が小さいことが分かる。揚力が上向きに働いているため、このような結果になったと考えられる。

- 初速を変える (37rps 固定)

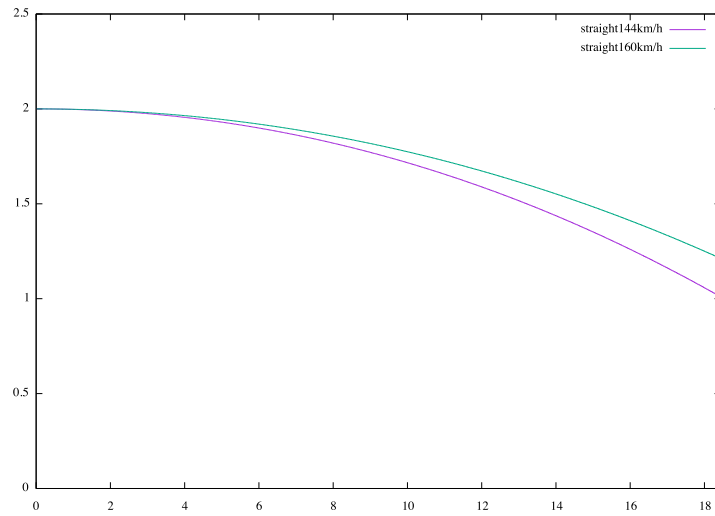


図 4: [横] x [縦] z で、144km/h(赤)、160km/h(緑)の軌跡

表 2: $x=18.44$ での z の値

144km/h	160km/h
1.01m	1.21m

初速が速ければ速いほどボールの落差が小さいことが分かる。到達時間が短いために、このような結果になったと考えられる。大きな差が見られたので、落差の小さいストレートを投げるためには、回転数を多くするより初速を大きくする方が近道かもしれない。

6.2 スライダー

スライダーは変化球の一種で、利き腕と反対方向に曲がる。
今回は y 軸の正の方向に変化するものとし、回転数を $n(\text{rps})$ とすると回転軸は $\vec{\omega} = (0, 0, n)$ となるものとする。

- 回転数を変える (126km/h 固定)

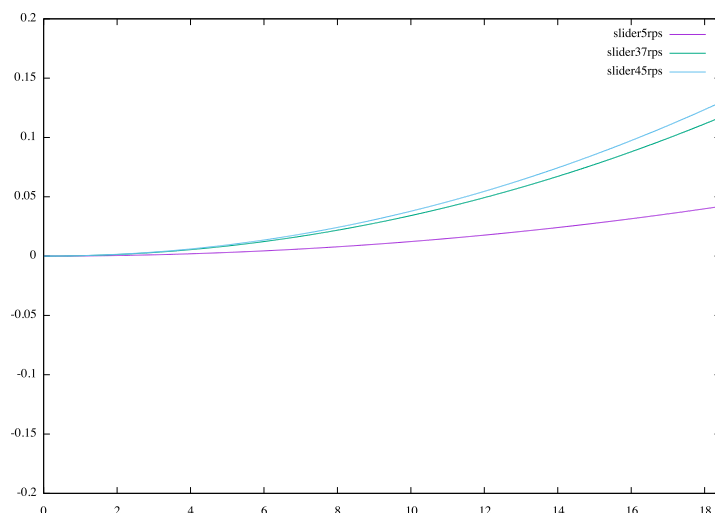


図 5: [横] x [縦] y で、5rps(赤)、37rps(緑)、45rps(青) の軌跡

表 3: $x=18.44$ での y の値

5rps	37rps	45rps
0.042m	0.117m	0.130m

回転数が多いほど変化量は大きいことが分かる。揚力の向きが y 軸の正の向きに働いているため、このような結果になったと考えられる。しかし、回転数が多い方が多い方が曲がり始めが遅いことはなく、ほぼ同じタイミングで曲がり始める。

- 初速を変える (37rps 固定)

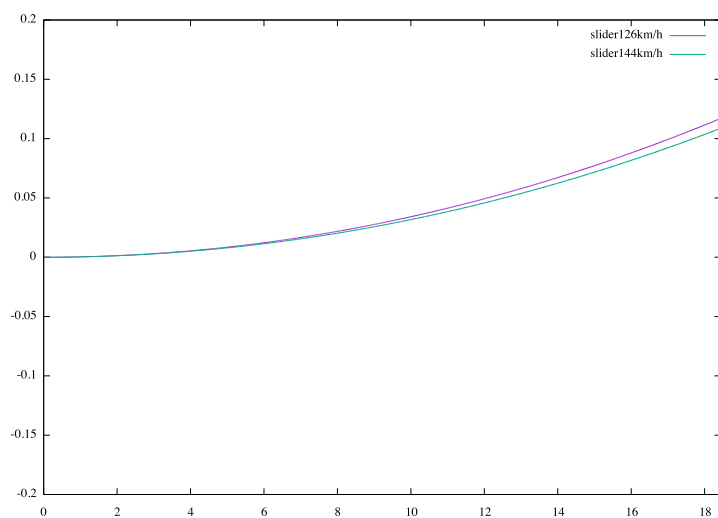


図 6: [横] x [縦] y で、126km/h(赤)、144km/h(緑) の軌跡

表 4: $x=18.44$ での y の値

126km/h	144km/h
0.117m	0.109m

初速が速いほど変化量は小さいことが分かる。ストレート同様、到達時間が短いことで、このような結果になったと考えられる。しかし、初速を速くしても打者の手前で曲がることはなかった。

7 回転数と球速

ストレートの回転数が変化すると、速度はどのように変化するかをグラフにしてみた。(144km/h 固定)

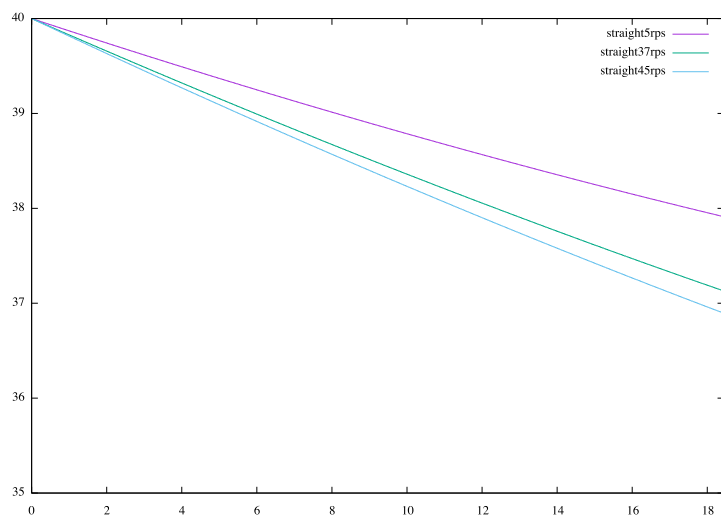


図 7: [横] x [縦] v で、5rpm(赤)、37rpm(緑)、45rpm(青) の軌跡

表 5: $x=18.44$ での v の値

5rpm	37rpm	45rpm
37.912m/s	37.123m/s	36.895m/s

回転数が多いほど初速と終速の差が大きくなった。回転数が多くなるとスピンパラメータが増えるため、抗力が大きくなり、速度が落ちたと考えられる (図 1 参照)。

8 終わりに

「回転数の多いストレートは、ノビがあって打たれづらい」と言われていますが、ここでいうところの「ノビ」は、初速と終速の差が小さくなることではなく、打者の思っていた軌道の上を通るという意味であるという結論にたどり着くことができた。しかし、なぜ初速と終速の差がないと感じられるのか、なぜ変化球が打者の手前で曲がるように感じられるのかという疑問の解決には至ることができなかった。

このシミュレーションの課題として、抗力係数、揚力係数で用いた近似式がゴルフボールの実験で得たもの、野球ボールの縫い目の凹凸を考えなかったことにより、実際のデータと多少たりとも誤差が生じてしまったことが挙げられる。正確な数値とは言えないが、4年間で学んだことを活かし、自分なりの結論を出せたことに充実感を味わえた。

最後に、最後まで色々ご指導、手助けをしてくださった桂田祐史教授に心から感謝いたします。ありがとうございました。

9 プログラム

初速 40m/s、 ω はターミナルで打ち込むような C++ のプログラムを紹介する。

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <Eigen/Dense>
using namespace Eigen;

double pi,m,cd,cl,a,g,p,r,s,c,v,S,sp,sp2,sp3,sp4,ww;;
VectorXd w(3);

VectorXd f(double t, VectorXd x)
{
    VectorXd y(6);

    y(0) = x(3);
    y(1) = x(4);
    y(2) = x(5);
    y(3) = - c * v * x(3) + S * (w(1) * x(5) - w(2) * x(4)) ;
    y(4) = - c * v * x(4) + S * (w(2) * x(3) - w(0) * x(5));
    y(5) = - c * v * x(5) + S * (w(0) * x(4) - w(1) * x(3)) - g ;
    return y;
}

int main(void)
{
    int n, N;
    double tau, Tmax, t,pi;
    VectorXd x(6),k1(6),k2(6),k3(6),k4(6);

    pi = 4 * atan(1.0);
    m = 0.15;
    g = 9.8;
    p = 1.205;
    r = 0.035;
```



```

s = r * r * pi;

std::cin >> w(0) >> w(1) >> w(2);

ww = sqrt(w(0) * w(0) + w(1) * w(1) + w(2) * w(2) );

Tmax = 0.6538;
N = 50000;
tau = Tmax / N;
x << 0,0,2.0,40,0,0;
for (n = 0; x(0)<=18.44 ; n++) {
    t = n * tau;
    k1 = tau * f(t, x);
    k2 = tau * f(t+tau/2, x+k1/2);
    k3 = tau * f(t+tau/2, x+k2/2);
    k4 = tau * f(t+tau, x+k3);
    x = x + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;

    v = sqrt(x(3) * x(3) + x(4) * x(4) + x(5) * x(5) );

    sp = pi * 2.0 * r * ww / v;
    sp2= sp * sp;
    sp3= sp2 * sp;
    sp4= sp3 * sp;

    cd = 0.751 * sp4 - 1.76 * sp3 + 1.098 * sp2 + 0.2148 * sp + 0.2049;
    cl = -0.2158 * sp4 + 1.006 * sp3 - 1.644 * sp2 + 1.25 * sp + 0.0616;

    c = cd * p * s / (2.0 * m);
    a = cl * v / ( 2.0 * r * 2.0 * ww * pi );
    S = a * r * p * s / m;

    std::cout << x(0) << " " << x(1) << " " << x(2) << " " << x(3) << " " << x(4) << " " << x(5) << " " << v << " " << sp << " " << sp2 << " " << sp3 << " " << sp4 << " " << cd << " " << cl << " " << c << " " << a << " " << S << " " << endl;
}
return 0;
}

```

このプログラムを gnuplot でプロットする（このプログラムを a.cpp とし、z-x
の図をプロットする）

```
c++ a.cpp  
./a.out > a.dat  
gnuplot
```

```
gnuplot> plot "a.cpp" using 1:3 with lines
```

参考文献

- [1] 牧野淳一郎 著「とんでる力学」 パリティ編集委員会 編 （丸善株式会社
2005）
- [2] 鳴尾丈司、溝田武人、下園仁志 著
「一様気流中で高速回転するゴルフボールの空気力測定と飛しょう実験」
日本機械学会論文集 (B編) 70 巻 697 号 2371 ページ
2004 年 9 月