

2018年度 明治大学総合数理学部現象数理学科 卒業研究レポート

虹のシミュレーション

明治大学 総合数理学部 現象数理学科

4年1組76番 2610140029

鈴木 伯彦

指導教員 桂田 祐史 准教授

2019年2月28日

概要

雨上がりの空や、水しぶきをあげる滝の近く、水を撒いているとき太陽を背にした方向に虹が見えることがある。本研究では虹をコンピューター上で再現し、虹の原理を説明することを目的とする。

目次

- 第1章 はじめに
- 第2章 水滴に当たった太陽光について
- 第3章 波長と色
- 第4章 太陽光スペクトル
- 第5章 まとめ

第1章 はじめに

1.1 虹とは

虹とは赤から紫までの光のスペクトルが円弧状に並んだ光のことである。気象現象の中でも大気光学現象に含まれる。太陽の光が空気中の水滴によって反射、屈折されるとき、水滴がプリズムの役割をするため光が波長ごとに分解され複数色の帯に見える。

普通に見かける明るい虹を主虹(しゅにじ)と呼ぶ。その外側に見えることがある主虹よりも暗い虹を副虹(ふくにじ)と呼ぶ。それぞれの雨滴に反射する光のスペクトルは観察者が見る虹と向きが逆になっている。雨滴内部での光の反射は、主虹では1回、副虹では2回であり、雨滴に入るときと出るときで各1回屈折を起こす。屈折の角度は色によって少し異なっている。

本レポートでは主虹について述べる。

1.2 光の性質

虹は太陽光と雨の水滴によって作られる。これからの議論を進めていくために、まずは光の性質について学ぶ。

1.2.1 光とは

電磁波のうち人の目が認識できる波長のものを光と呼ぶ。自然科学の分野では可視光線と呼ばれることもある。その波長は個人によって差はあるがおよそ380nm~780nmの間である。人の目は波長の違いを色の違いとして認識している。

1.2.2 光の直進

光は均質な媒質の内部では直進する。真空中や空気中などの均一な物質内では光は直進する。これはカーテンの隙間から室内に漏れる光や、雲間から射す光がまっすぐなことからわかる。また、太陽と地球の間には十分な距離があるため、地球に届く太陽光は平行光と考える。

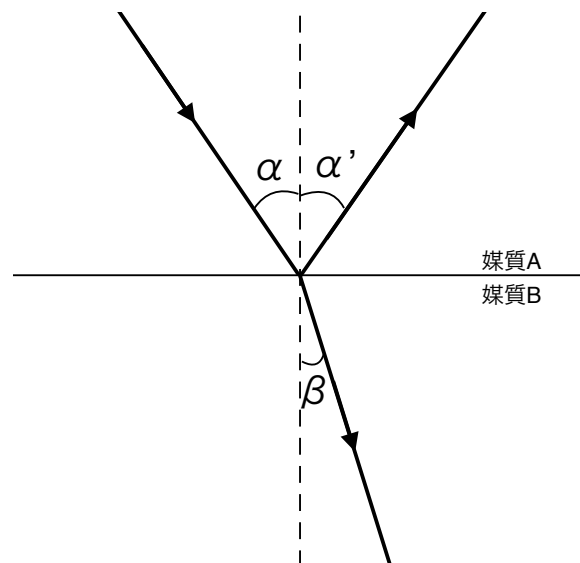
1.2.3 光の反射と屈折

鏡に当たった光は向きを変えて進む。これを光の反射という。また、ガラスや水

など透明な物質に当たった光は、一部は表面で反射するが一部は物質内部に入り透過してゆく。凸凹の無い平面鏡に当たった光は、鏡に当たったときと同じ角度で反射する

ガラスや水の表面に光が入射したとき、内部を透過する光はその境界で折れ曲がって進む。これを光の屈折という。

真空中の光速を物質中の光速で割った値を屈折率という。真空を1とした物質固有の値を絶対屈折率、2つの物質の絶対屈折率の比を相対屈折率という。今後、相対屈折率を屈折率という。



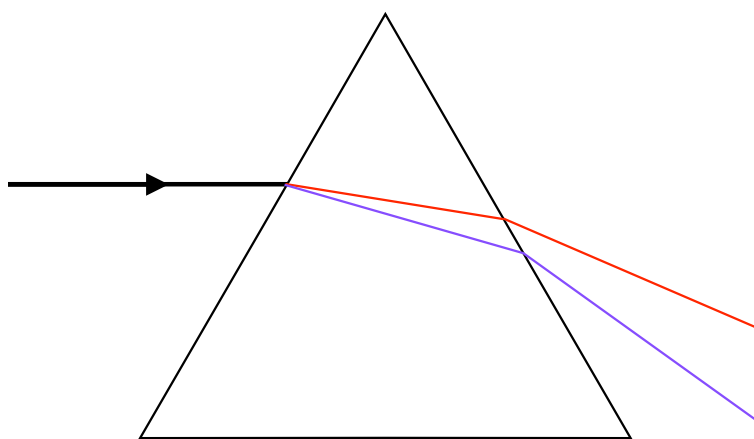
図は媒質 A を進んできた光が媒質 B との境界で一部が反射し、一部が屈折して媒質 B を透過する様子を表したものである。 α 、 α' 、 β をそれぞれ入射角、反射角、屈折角という。媒質 A から媒質 B に光が進むときの屈折率を n とすると以下が成り立つ。

$$\alpha = \alpha' \text{ (反射の法則)}$$

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ (屈折の法則・スネルの法則)}$$

1.2.4 光の分散

太陽光など複数の波長を含む光がプリズムや水滴などに当たると様々な色に分散される。



プリズム

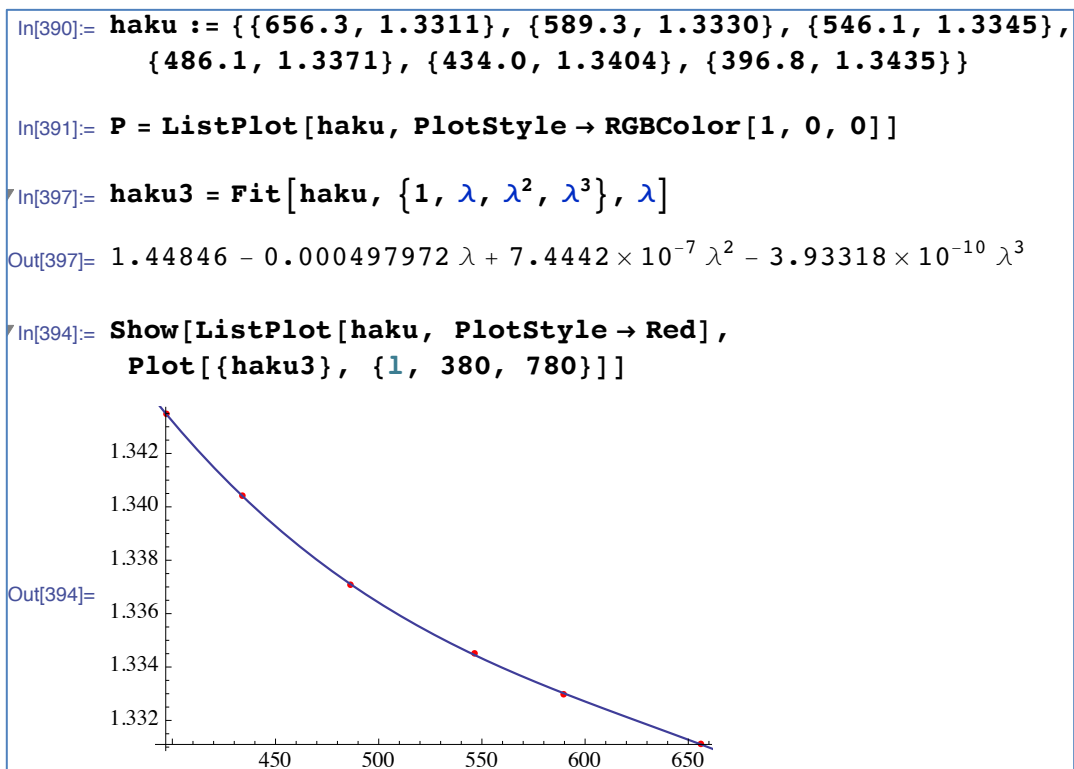
左から進んできた光はプリズムの表面で屈折して内部に入りもう一度屈折してプリズム外に出て行く。このとき波長ごとの屈折率の違いによって異なる屈折角をとるため分散される。

1.2.5 波長と屈折率

波長と水の屈折率には以下のような関係がある。ただし空気の絶対屈折率は1とする。

波長 λ (nm)	396.8	424	486.1	546.1	589.3	656.3
屈折率 n	1.3435	1.3404	1.3371	1.3345	1.333	1.3311

上記のデータから波長と屈折率の関係式を3次曲線の近似によって求めると



となる。

波長 λ に対する屈折率 n について

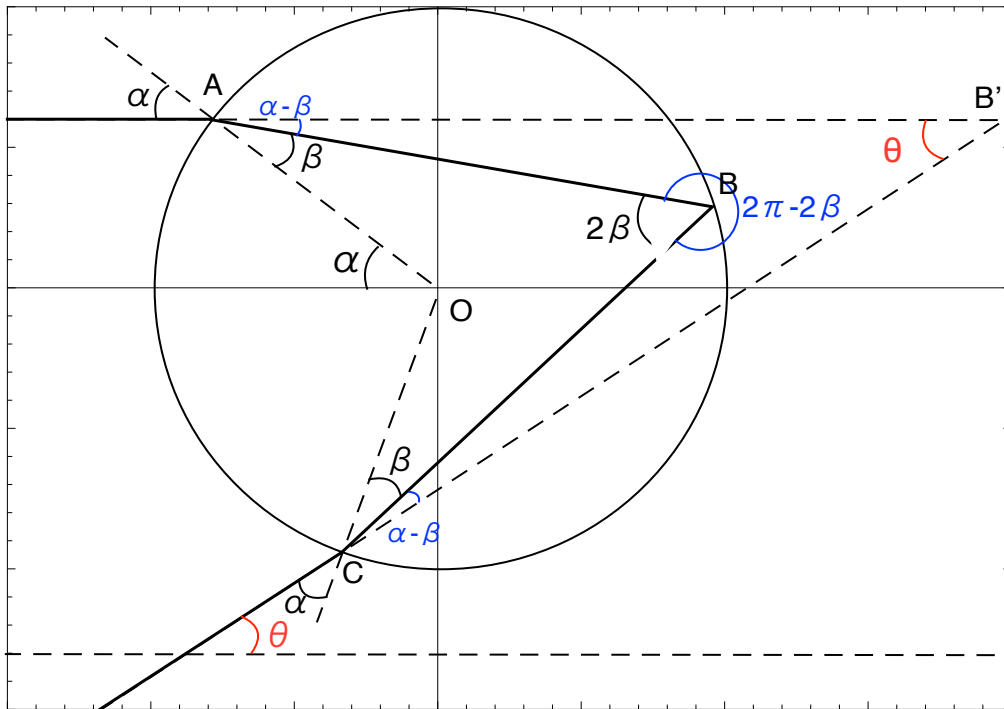
$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10} \times \lambda^3$$

が得られる。

第2章 水滴に当たった太陽光について

2.1 虹角

空気中で水滴に当たった光はその境界で反射と屈折が同時に起こる。屈折した光は水滴内部に入り空気との境界で反射、屈折する。屈折した光は水滴外へ進んで行くが、反射した光は空気との境界で再び反射、屈折する。水滴内部ではこの反射屈折が何度も繰り返されている。このように水滴に当たった光は様々な方向に撒き散らされ、これを散乱光という。主虹は水滴内で一度反射した光によって作られる。



上図は水滴を球形とし、その断面について光が水滴内部で1回反射するときの経路を模したものである。点 O を中心とする半径1の円を水滴の断面として考える。点 A で屈折し水滴内に侵入した光は、点 B で反射し点 C で再び屈折して水滴外へ進んでゆく。屈折率を n 、点 A の y 座標を r 、点 A での入射角、屈折角をそれぞれ α 、 β とし、射出された散乱光と太陽光のなす角を θ とし散乱角と呼ぶ。

このとき n 、 r 、 α 、 β について

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= r \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1} r \\ \sin \beta &= \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1} \frac{r}{n}\end{aligned}$$

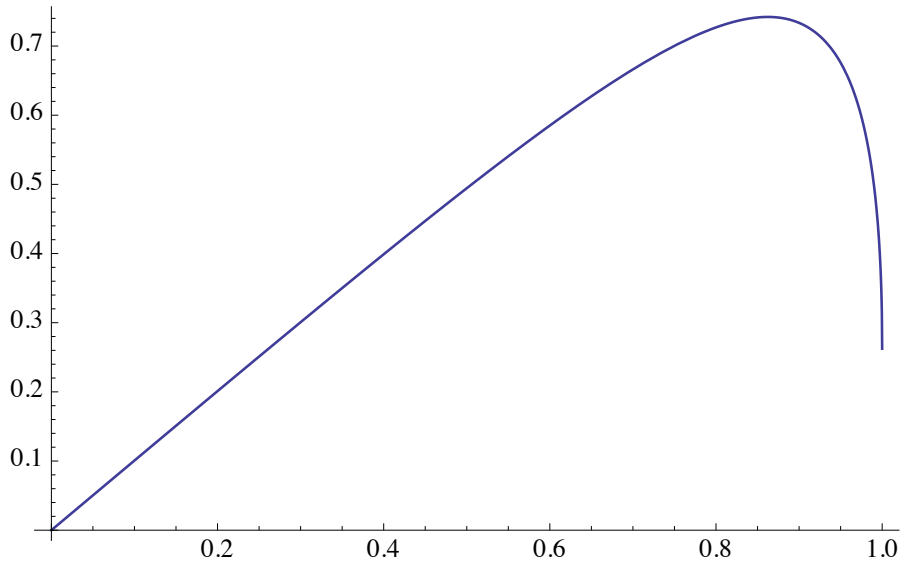
が成り立つ。

四角形 $ABCB'$ について着目すると、散乱角 θ は

$$\begin{aligned}\theta &= 4\beta - 2\alpha \\ &= 4 \sin^{-1} \frac{r}{n} - 2 \sin^{-1} r \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

① 式は入射位置 r と屈折率 n に対する散乱光の角度 θ を表す。

$n=1.33$ 、縦軸を θ 、横軸を r として $0 \leq r \leq 1$ の範囲でグラフを描画すると以下のようになる。



グラフの接線の傾きが 0 に近づくほど r の変化に対して θ の変化が小さくなるため散乱角 θ の光は強くなる。ここで①式の極値を求める。

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{4}{\sqrt{n^2 - r^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}} = 0$$

であるから、①式が極値をとるときの r の値は

$$r = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

また、このとき

$$\theta = 4 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。光が最も強く散乱される角度のことを虹角という。(図の作成と計算は西條 [1]p.118-126 を参考にした。)

②式に第1章 1.2.5 の屈折率の値をそれぞれ代入すると以下のようなになる。

波長 λ (nm)	396.8	424	486.1	546.1	589.3	656.3
屈折率 n	1.3435	1.3404	1.3371	1.3345	1.333	1.3311
虹角(度)	40.5754	41.0141	41.4856	41.8605	42.0781	42.3552

波長が長くなるにつれて散乱角は大きくなるのがわかる。

各座標に $\alpha = \sin^{-1} r$ 、 $\beta = \sin^{-1} \frac{r}{n}$ を代入し、A、A、B、C、D の順で各点を繋ぐ線を
 描画するプログラムを Mathematica で作成すると以下ようになる。

```
In[331]:= nijiline3[r_, n_] := (*入射位置rと屈折率nから得られる経路を定義*)
Line[{{-1.5, r}, {-Sqrt[1 - r^2], r},
      {Cos[2 ArcSin[r/n] - ArcSin[r]], Sin[2 ArcSin[r/n] - ArcSin[r]]},
      {Cos[π + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]], -Sin[π + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]]}},
     {-1 + Cos[π + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]],
      -1 * Tan[4 ArcSin[r/n] - 2 ArcSin[r]] +
      -Sin[π + ArcSin[r] - 4 ArcSin[r/n]]}}]

In[332]:= en = Graphics[Circle[{0, 0}, 1]] (*水滴、中心(0,0)半径1の円*)
```

ここで、入射位置 $r = 0.6$ 、屈折率 $n = 1.3311$ として描画してみる。

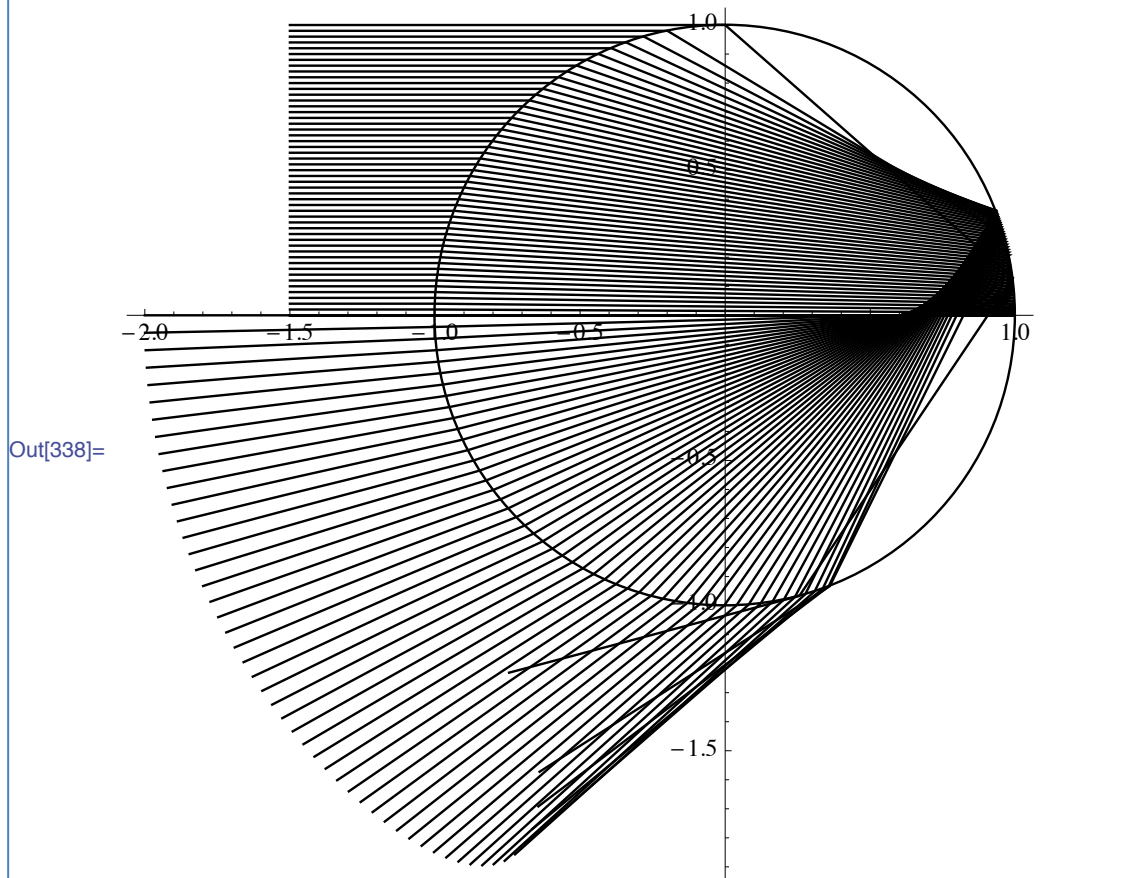
```
In[333]:= Graphics[nijiline3[0.6, 1.3311]]
In[334]:= Show[en, %]
```

Out[334]=

次に、屈折角 $n = 1.3311$ とし、入射位置 r を $0 \leq r \leq 1$ の範囲で 0.02 ずつ変化させる。

```
In[337]:= Graphics[Table[nijiline3[r, 1.3311], {r, 0.0, 1, 0.02}]]
```

```
In[338]:= Show[en, %, Axes → True, AxesStyle → Black]
```



水滴の右下から出る線が重なっている様子から、この角度の散乱光が最も明るく、虹角であると考えられる。

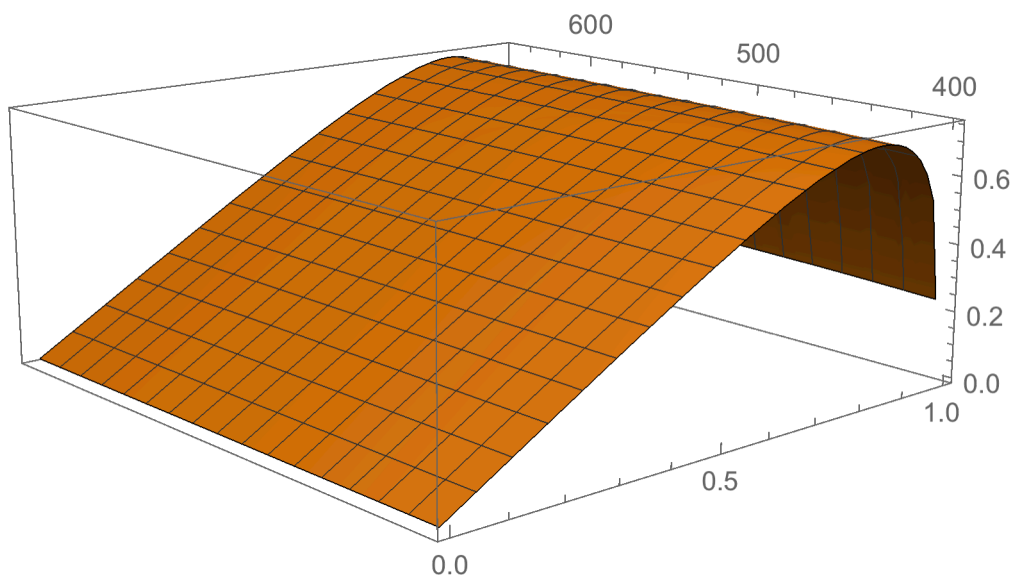
2.3 $\theta = \theta(r, \lambda)$ について

- 1.2.5より屈折率 n と波長 λ の関係が三次関数の式で表すことができ、
- 2.1より錯乱角 θ と屈折率 n 、入射位置 r の関係式を得た。

$$-3.93318 \times 10^{-10} \times \lambda^3$$

$$\theta = 4 \sin^{-1} \frac{r}{n} - 2 \sin^{-1} r$$

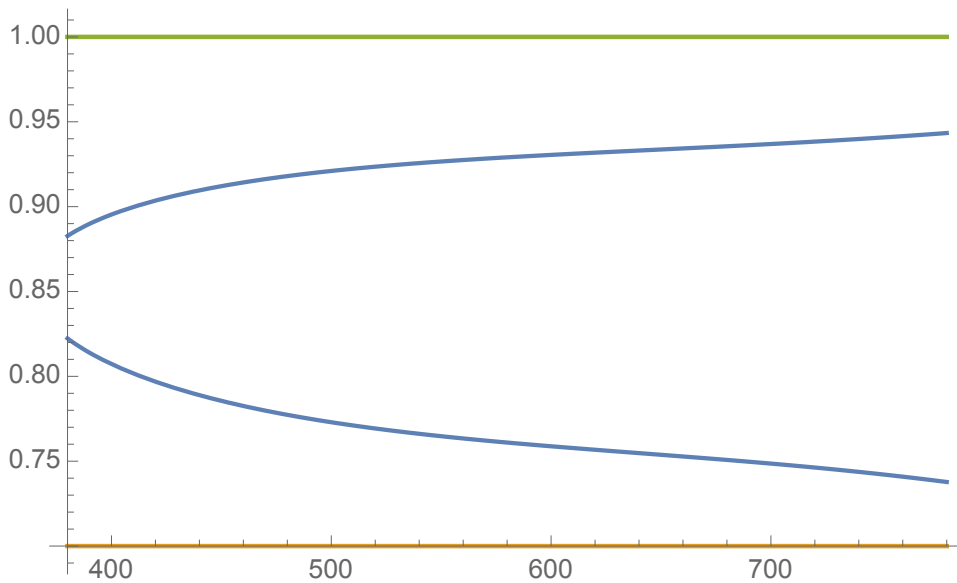
上記の二つの式を使い $\theta = \theta(r, \lambda)$ のグラフを Mathematica で作成すると以下のようになる。



$\theta = \theta(r, \lambda)$ の図($0 \leq r \leq 1, 380 \leq \lambda \leq 650$)

ここで錯乱角 θ をある値に固定すると、その値に対応する r 、 λ の関係が決まる。

実際に θ を 40° として $r=r(\lambda)$ の図を示す。



θ が 40° の時の $r = r(\lambda)$ の図

上図の青色の線が入射位置 r である。

この図から、1つの r に対して2つの λ が対応することがわかる。

小さい方を $r_1 = r_1(\lambda)$ 、大きい方を $r_2 = r_2(\lambda)$ とおく。

$r_1(\lambda)$ 、 $r_2(\lambda)$ は θ にも依るため $r_1(\lambda, \theta)$ 、 $r_2(\lambda, \theta)$ と表すべきであるが、

これからはばらく、 θ の値は 40° として考える。

微小区間 $\Delta \lambda$ に対し、 $r_1(\lambda)$ 、 $r_2(\lambda)$ の変化量を考える。

変化量が多い場合 $\Delta \lambda$ 間では広い入射位置から入った光が錯乱角 40° の部分に集まっていることがわかる。よって光の明るさは変化量が少ない部分よりも強くなる。

実際にある角度から目に届く光の明るさの関数を $E_1(\lambda)$ とすると

$$E_1(\lambda) = 2\pi \left(r_1(\lambda) \frac{dr_1(\lambda)}{d\lambda} + r_2(\lambda) \frac{dr_2(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

となる。

上式は $r_1(\lambda)$ 、 $r_2(\lambda)$ で水滴に入射した光が錯乱角 θ で水滴を出て行き作る丸虹の面積を求めた式である。2つの円環を合わせた面積の大きさが光の明るさの関数になっていると考えた。

第3章 波長と色

3.1 色の認識

人間の目には光を感じる視細胞があり、その中でも錐体細胞によって色を認識している。錐体細胞には、L 錐体(赤錐体)、M 錐体(緑錐体)、S 錐体(青錐体)と呼ばれる3つの細胞があり、それぞれ約 560nm、530nm、430nm 付近を中心にある程度の波長の光を感じるができる。この3種類の錐体が受ける刺激は目に入る光の波長によって変わり、脳はこの刺激の割合によって色を決めている。例えば、黄色の波長を持つ光が目に入ったとき、L 錐体と M 錐体が刺激を受け脳がその光が黄色だと判断する。しかし、赤と緑の光をある割合で混合すると黄色の波長の光が含まれていなくても、脳はその光を黄色と判断する。つまり同じ色でも1つの波長からなる光(単色光)による色の場合と、複数の波長の光が混合されて見えている色の場合がある。

3.2 色とディスプレイ

PC などの一般的なディスプレイは様々な色を表示することができるが、その色に対応する様々な波長の光を発しているわけではない。ディスプレイに近づいてみるとわかるが、赤、緑、青の3色の光を任意の割合で混合し様々な色を表示している。この3つの色は人の目の錐体細胞の反応のピークに由来している。この R、G、B の3色で色を表す方式を RGB 表色系という。ディスプレイなどに用いられるのは sRGB と呼ばれる規格で機器などの違いによって表示される色に違いが出ないように定められたものである。ただこの規格は表示できる色の範囲が狭く、エメラルドグリーン、濃いシアン、オレンジ、明るい赤や黄色などの再現性は低い。

3.3 波長と RGB

波長から RGB それぞれの値を求めるため、CIE XYZ 表色系というものをを用いる。CIE XYZ 表色系とは色を定量的に表す基準として国際照明委員会(CIE)が 1931 年に定めたものである。RGB には様々な規格や機器による表示の違いがあるが、XYZ 表色系は規格や機器に依存しない色の表現方法である。データは CIE が公表しているが、今回は理科年表にも掲載されている「単色光の色度座標と等エネルギー単色放射の三刺激値」より波長 380nm~780nm の間で 10nm ごとの波長 λ に対する XYZ 三刺激値の値を得た。

L(nm)	X	Y	Z
380	0.0014	0	0.0065
390	0.0042	0.0001	0.0201
400	0.0143	0.0004	0.0679
410	0.0435	0.0012	0.2074
420	0.1344	0.004	0.6456
430	0.2839	0.0116	1.3856
440	0.3483	0.023	1.7471
450	0.3362	0.038	1.7721
460	0.2908	0.06	1.6692
470	0.1954	0.091	1.2876
480	0.0956	0.139	0.813
490	0.032	0.208	0.4652
500	0.0049	0.323	0.272
510	0.0093	0.503	0.1582
520	0.0633	0.71	0.0782
530	0.1655	0.862	0.0422
540	0.294	0.954	0.0203
550	0.4334	0.995	0.0087
560	0.5945	0.995	0.0039
570	0.7621	0.952	0.0021
580	0.9163	0.87	0.0017
590	1.0263	0.757	0.0011
600	1.0622	0.631	0.0008
610	1.0026	0.503	0.0003
620	0.8544	0.381	0.0002
630	0.6424	0.265	0
640	0.4479	0.175	0
650	0.2835	0.107	0
660	0.1649	0.061	0
670	0.0874	0.032	0
680	0.0468	0.017	0
690	0.0227	0.0082	0
700	0.0114	0.0041	0
710	0.0058	0.0021	0
720	0.0029	0.001	0
730	0.0014	0.0005	0
740	0.0007	0.0003	0
750	0.0003	0.0001	0
760	0.0002	0.0001	0
770	0.0001	0	0

XYZ 三刺激値を得られたが、実際に混色で用いるのは RGB である。XYZ 三刺激値は以下の変換行列で sRGB に変換できる。(谷口・張[3] p.80)

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & 1.8758 & 0.0415 \\ 0.0557 & -0.2040 & 1.0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

この変換行列によって得られた RGB の値を最大値が 1、負の値が 0 になるよう正規化する。また明るさの補正であるガンマ補正を $\gamma=2.2$ として行う。(計算過程は万象酔歩[4]を参考にした。) 波長に対する R、G、B の値をそれぞれ LR、LG、LB として Mathematica に入力する。

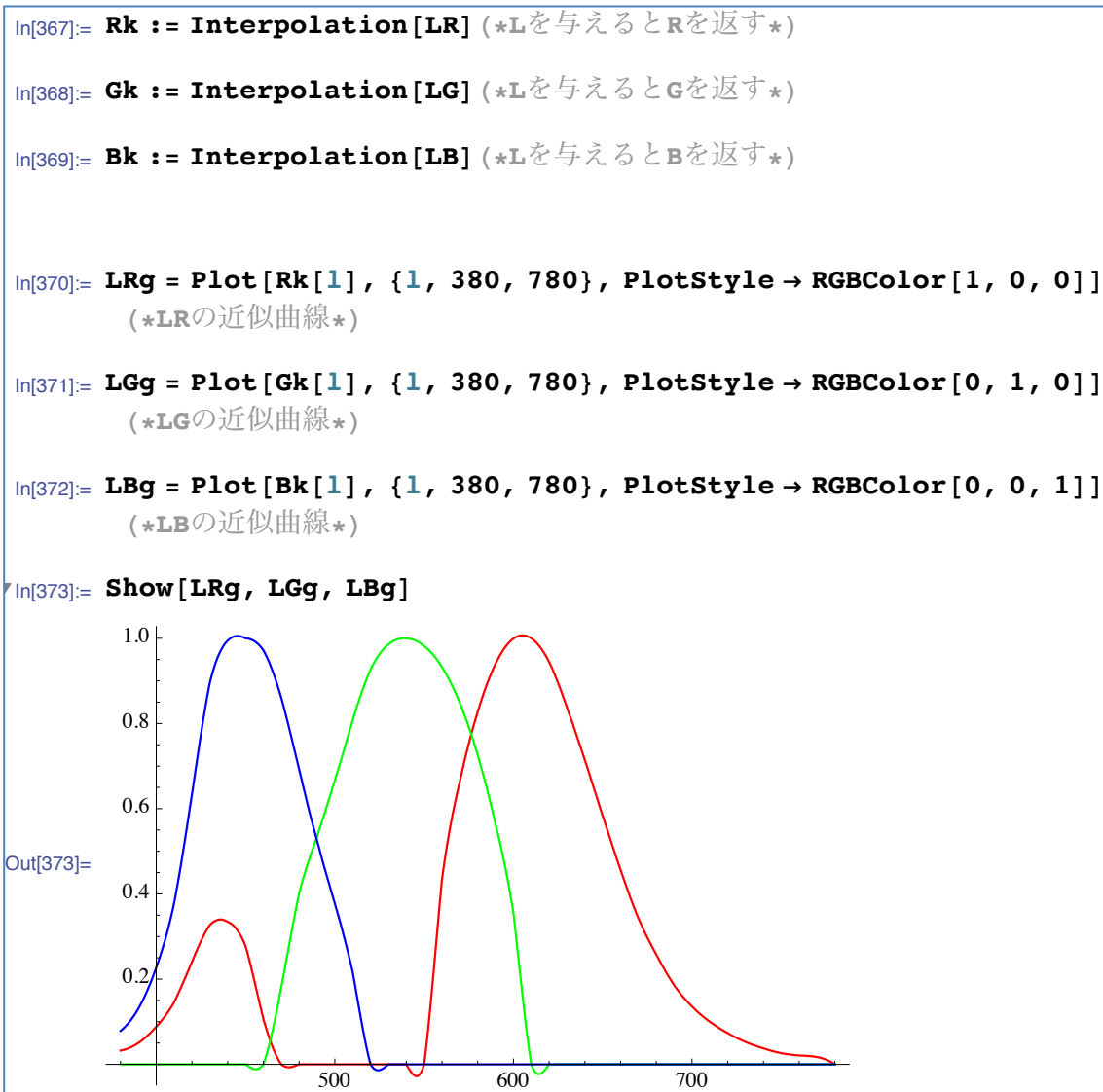
```
In[339]:= LR := {{380, 0.032265391}, {390, 0.050250727}, {400, 0.088291233},  
  {410, 0.145653236}, {420, 0.2403405}, {430, 0.326774085},  
  {440, 0.334348182}, {450, 0.277518866}, {460, 0.10633414},  
  {470, 0}, {480, 0}, {490, 0}, {500, 0}, {510, 0}, {520, 0},  
  {530, 0}, {540, 0}, {550, 0}, {560, 0.434269696},  
  {570, 0.663881863}, {580, 0.827266787}, {590, 0.940208574},  
  {600, 0.999289005}, {610, 1}, {620, 0.944423157},  
  {630, 0.837165862}, {640, 0.714739294}, {650, 0.582629528},  
  {660, 0.456339314}, {670, 0.342300697}, {680, 0.257895756},  
  {690, 0.185720118}, {700, 0.135858681}, {710, 0.099868562},  
  {720, 0.073206594}, {730, 0.052410954}, {740, 0.037530381},  
  {750, 0.026183303}, {760, 0.020822159}, {770, 0.017184874},  
  {780, 0}}
```

```
In[340]:= LG := {{380, 0}, {390, 0}, {400, 0}, {410, 0}, {420, 0},  
  {430, 0}, {440, 0}, {450, 0}, {460, 0}, {470, 0.180488482},  
  {480, 0.401216396}, {490, 0.533897838}, {500, 0.664445519},  
  {510, 0.807714516}, {520, 0.92683449}, {530, 0.985638731},  
  {540, 1}, {550, 0.982105574}, {560, 0.932383793},  
  {570, 0.847997976}, {580, 0.725990182}, {590, 0.563178341},  
  {600, 0.355311218}, {610, 0}, {620, 0}, {630, 0}, {640, 0},  
  {650, 0}, {660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0}, {700, 0},  
  {710, 0}, {720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0},  
  {770, 0}, {780, 0}}
```

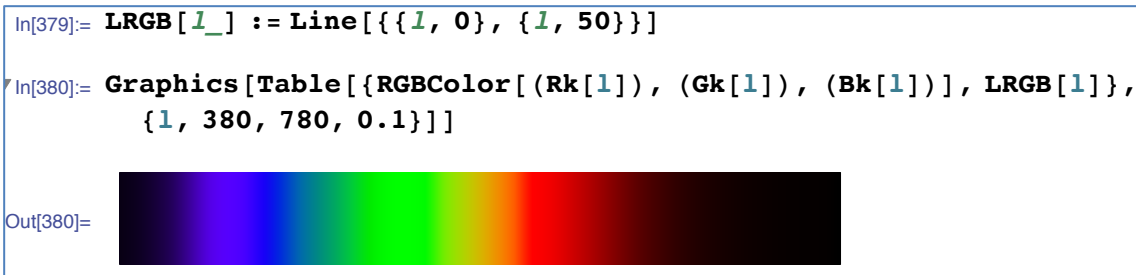
```
In[341]:= LB := {{380, 0.07836206}, {390, 0.130823464}, {400, 0.227483698},  
  {410, 0.377876696}, {420, 0.633078274}, {430, 0.895545041},  
  {440, 0.994508121}, {450, 1}, {460, 0.971586169},  
  {470, 0.860374302}, {480, 0.691325922}, {490, 0.522178996},  
  {500, 0.378252681}, {510, 0.216675823}, {520, 0}, {530, 0},  
  {540, 0}, {550, 0}, {560, 0}, {570, 0}, {580, 0}, {590, 0},  
  {600, 0}, {610, 0}, {620, 0}, {630, 0}, {640, 0}, {650, 0},  
  {660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0}, {700, 0}, {710, 0},  
  {720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0}, {770, 0},  
  {780, 0}}
```

3.4 色の出力

第3章 3.3 で得られた R、G、B の値を補間し波長 λ について 380nm~780nm の間で色を対応させたグラフを描画すると以下のようなになる。



また、横軸の座標 λ に対応する色を縦の線として描画する。



第4章 太陽光のスペクトル

4.1 エアマス

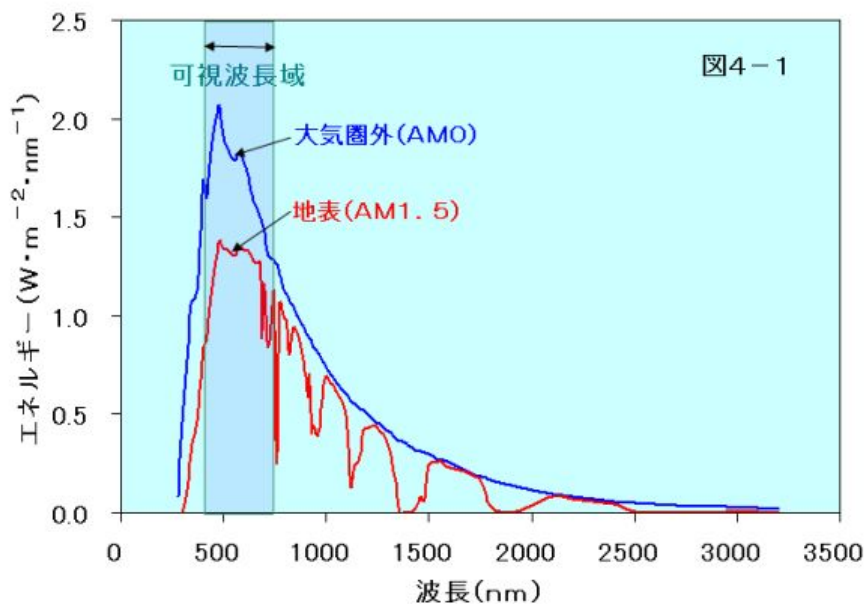
大気の状態を表示するもの。Air Mass、AMと略記されることも多い。

今後AMの後に数字がついていることがあるが、その数字は太陽光が地表に到達するまでに通過する大気量を表す。AM0は大気を通過しない、つまり大気圏外での太陽光スペクトルを示す。AM1は地表に垂直に入射した場合のスペクトルである。大気は地球表面をほぼ一定の厚さで覆っているが、垂直入射の場合、太陽光は最短距離で地表に到達しますから、通過する大気量がもっとも少なくなる。

4.2 波長とエネルギー

米国エネルギー省の再利用可能エネルギー研究所のデータを使い

AM0とAM1.5のグラフを書くと



http://denkou.cdx.jp/Opt/PVC01/PVCF1_4.html より引用

となる。

図4-1をみると太陽光は大体300 nmから3000 nm (3 μm) くらいの広い波長範囲の光を含んでいることがわかる。そのうち特に400~700 nmの範囲が可視光であるが、この辺りの強度が強くなっている。第1章にもあげたが人間をはじめ地球上の動物はこの波長帯の感度が高い光検出機能(視覚)をもっている。

一方、波長が300 nmより短い紫外光はもともと太陽光にほとんど含まれていないことがわかる。反対に700 nmより波長が長い赤外域の光は連続的なスペクトルとしてかなり尾を引くように3 μmを越えるあたりまで含まれている。

この大気を通過した時に影響を受ける太陽光のスペクトルを $E_2 = E_2(\lambda)$ とおくことにする。

米国エネルギー省の再利用可能エネルギー研究所の太陽光のスペクトルのデータ

URL: <http://rredc.nrel.gov/solar/spectra/>

第5章 まとめ

虹角をとる時の錯乱角の値 θ $\theta = 4 \sin^{-1} \frac{r}{n} - 2 \sin^{-1} r$

屈折率 n と波長 λ の関係

$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10} \times \lambda^3$$

から、 $\theta = \theta(r, \lambda)$ の図を得ることができた。

ここから θ の値を 40° (虹角の値) に固定し、2つの入射位置 $r_1(\lambda)$ 、 $r_2(\lambda)$ に注目した。

その結果、光の明るさを表す関数

$$E_1(\lambda) = 2\pi \left(r_1(\lambda) \frac{dr_1(\lambda)}{d\lambda} + r_2(\lambda) \frac{dr_2(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

を得た。

また、XYZ 三刺激値から波長 λ に対応する色(R,G,B)を求め、波長 λ に対応する色を描画した。

ここで波長 λ に対する三刺激値を $\bar{x}(\lambda)$ 、 $\bar{y}(\lambda)$ 、 $\bar{z}(\lambda)$ とすると

$E_1(\lambda)$ 、 $E_2(\lambda)$ を使い、光の(X,Y,Z)は下記のように表せることができる

$$X = \int_{380}^{780} E_1(\lambda) E_2(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

$$Y = \int_{380}^{780} E_1(\lambda) E_2(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = \int_{380}^{780} E_1(\lambda)E_2(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda$$

よって虹を可視化している時の XYZ 三刺激値がわかる。上記の式を数値計算によって計算することができれば、虹の再現はできると思われる。

参考文献

1. 西條敏美 (1999) 『虹-その文化と科学』 恒星社厚生閣.
2. 西條敏美 (2015) 『授業 虹の科学-光の原理から人工虹の作り方まで』 太郎次郎社エディタス.
3. 谷口慶治・張小忙 (2012) 『デジタル色彩工学』 共立出版.
4. 著者不明 (2009) 『波長(スペクトル)RGB 変換プログラムコード』 「万象酔歩」
URL: <http://k-hiura.cocolog-nifty.com/blog/2009/06/post-9c5b.html> (参照日: 2019年2月25日)
5. 岡田 岳士 (2017) 2016年度桂田研究室卒業研究レポート