

2017年度桂田研究室卒業研究レポート

2次元領域における流体攪拌のシミュレーション

指導教員

桂田 祐史 准教授

明治大学 総合数理学部 現象数理学科

岡本 哲輝

2018年 2月 14日

目次

第1章	はじめに	4
1.1	本研究の概要	4
1.2	先行研究	4
第2章	対象とする問題	5
2.1	領域・境界	5
2.2	支配方程式	6
2.2.1	Navier-Stokes 方程式	6
2.2.2	移流拡散方程式	7
2.2.3	連続の式	7
2.3	初期条件	8
2.4	境界条件	8
第3章	現象と方程式の理解	10
3.1	攪拌の意味	10
3.1.1	物体の攪拌	10
3.1.2	本研究の攪拌	12
3.2	支配方程式の導出	12
3.2.1	Navier-Stokes 方程式の導出	12
3.2.2	移流拡散方程式の導出	20
3.2.3	連続の方程式の導出	22
3.2.4	支配方程式の無次元化	23
第4章	シミュレーション	25
4.1	問題設定値一覧	25
4.2	シミュレーションの準備	25
4.2.1	有限要素法	26
4.2.2	特性曲線法	27
4.2.3	Freefem++	27
4.2.4	本研究の弱形式	28
4.3	シミュレーションの評価方法	31

4.3.1	温度分布による評価	31
4.3.2	温度差による評価	32
4.4	シミュレーション①	32
4.4.1	概要	32
4.4.2	結果	32
4.4.3	考察	34
4.5	数値計算の安定化	35
4.5.1	安定化有限要素法	36
4.5.2	人工粘性法	36
4.6	シミュレーション②	36
4.6.1	概要	36
4.6.2	結果	37
4.6.3	考察	39
4.7	シミュレーション①・②の結果まとめ	40
4.8	結論	40
第5章	まとめ	41
第6章	おわりに	41
付録	シミュレーションに用いた Freefem++コード	42
参考文献		48

第1章 はじめに

このレポートは明治大学総合数理学部現象数理学科桂田研究室 2016 年度配属の著者が自己の卒業研究の報告としてまとめたものである。たかが学部生のゼミの課題ではあるが、これから研究を始める人々に多少なりとも参考になるよう、真剣に取組み情報を残すことにする。参考とできる文献の少なさゆえ、著者自身が本卒業研究に際して最も困難極めたことは、資料収集のための時間と体力の確保であった。このレポートは流体力学を卒研のテーマにしようと考えている学生をターゲットに、多くの情報を・可能な限りわかりやすく・出来るだけ詳細に、著者の時間と体力の許すまで研究結果を綴りたいと思っている。

1.1 本研究の概要

本研究の学術的分野は「数値流体力学」である。流体力学の諸方程式や数値計算法を用いて、2次元領域での流体攪拌のシミュレーションを行うことが目的である。2次元領域内の断熱された容器を温度分布が均一でないよう液体で満たし、それを攪拌するシミュレーションを行う。流体力学の種々の方程式は、深い理解のためすべてその導出から行うこととした。数値計算には有限要素法を採用し、Freefem++でシミュレーション・可視化を行った。

1.2 先行研究

本研究は、お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科博士前期課程理学専攻情報科学コース 2014 年度修士論文の段家加生里さんの「回転する障害物による流体攪拌」を大いに参考にしている。彼女の研究では有限要素法を用いず、フラクショナル・ステップ法等によってシミュレーションを行っている。是非そちらも参考にされたい。

第2章 対象とする問題

2次元円型領域に入った温度の異なる2種類の水を混ぜ合わせることを考える。容器内中央には長方形の“プロペラ”が設置されており、これを反時計周りに回転させることで攪拌を行うこととする。攪拌開始より T 秒後までプロペラを加速させ、時刻 T 秒以降は等速度で回転させる。上記条件の下で、粘性非圧縮流体の運動を記述する「Navier-Stokes 方程式」、熱量の動きを記述する「移流拡散方程式」、質量保存則を記述する「連続の方程式」これら3式を連立して問題を解析する。

時間経過によりプロペラの位置が変化するため、方程式が定義される領域と境界も時刻により変化することになる。ゆえに問題の各式が複雑になり解析が困難となってしまう。これを回避する方法として、本研究ではプロペラを固定した非慣性系で問題を考えていく。そのため流体に慣性力が働くことに注意すべきである。なお本研究では流体を粘性が一定の非圧縮性流体とした。

2.1 領域・境界

方程式が定義される領域を Ω とし、その境界 $\partial\Omega$ は容器内壁とプロペラによるものとする。領域と境界を正数 R, a, b を用いて以下のように表す。

$$\Omega := \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x, y) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$$

$$\Omega_L := \{(x, y) \in \Omega | x < 0\}$$

$$\Omega_R := \{(x, y) \in \Omega | 0 \leq x\}$$

$$\Gamma := \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$\Gamma_0 := \{(x, y) | x^2 + y^2 = R^2\}$$

$$\Gamma_1 := \{(x, y) | -a \leq x \leq a, y = -b\}$$

$$\Gamma_2 := \{(x, y) | x = a, -b \leq y \leq b\}$$

$$\Gamma_3 := \{(x, y) | -a \leq x \leq a, y = b\}$$

$$\Gamma_4 := \{(x, y) | x = -a, -b \leq y \leq b\}$$

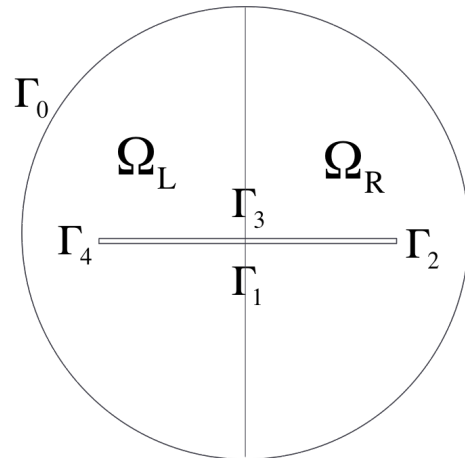


図1 領域と境界

原点を中心とした非慣性系である回転座標系で設定したため、領域と境界の時間変化の阻止に成功している。

2.2 支配方程式

支配方程式とは現象や運動を表す軸である、主たる方程式のことを指す。本問題には Navier-Stokes 方程式・移流拡散方程式・連続の方程式の 3 つの支配方程式が存在する。以下の方程式は粘性が一定の非圧縮性流体で成立することに注意されたい。より広義の流体については省略させていただく。

2.2.1 Navier-Stokes 方程式

以下が本問題の Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \operatorname{div} \sigma(p, u) + f \quad \text{in } \Omega$$

$$\operatorname{div} \sigma(p, u) := -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} (\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u))$$

$$f := f_{\text{Cen}} + f_{\text{Cor}} + f_{\text{Eur}}$$

$$f_{\text{Cen}} := (\omega(t))^2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

$$f_{\text{Cor}} := 2\omega(t) \begin{pmatrix} u_y & -u_x \end{pmatrix}$$

$$f_{\text{Eur}} := \frac{d\omega}{dt} \begin{pmatrix} y & -x \end{pmatrix}$$

u は流体の速度であり、左辺全体が流体の加速度を意味している。この左辺全体を u の物質微分項という。右辺の σ は応力テンソルといい、これは物体内部の力にまつわる物理量である。 σ の発散で定義される式には圧力 p の項と応力の項が存在する。これらの合力と、プロペラの角速度 ω による慣性力 f によって、単位質量あたりの運動方程式が成立している。

ここで Re はレイノルズ数と呼ばれる無次元数であり、方程式の無次元化に付随して出現する。流体の密度 ρ [kg/m^3]、流れの代表的速さ（現象の中で現れ

る頻度が多い速さ) $U[\text{m/s}]$ 、流れの代表的長さ (現象の中で現れる頻度が多い長さ) $L[\text{m}]$ 、流体の粘性係数 $\mu [\text{Pa}\cdot\text{s}]$ によって、一般に次のように定義される。

$$Re := \frac{\rho UL}{\mu}$$

回転座標系における慣性力はそれぞれ、遠心力 (Centrifugal force)、コリオリ力 (Coriolis force)、オイラー力 (Euler force) の3種類がはたらく。運動方程式である Navier-Stokes 方程式に、今回はこれらの合力である慣性力項 f を加えなければならない。

2.2.2 移流拡散方程式

以下が本問題の移流拡散方程式である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta \quad \text{in } \Omega$$

ここで θ は温度を表す。熱が流体によって運ばれる「移流」の現象と、熱が伝導する「拡散」の現象の2つのプロセスを組み合わせた式であると言える。

ここで Pr はプラントル数である。これは流体により定まる無次元の定数であり、方程式の無次元化に付随して出現する。比熱 $C_p [\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$ 、熱伝導率 $\kappa [\text{J}/(\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{K})]$ 、流体の粘性係数 $\mu [\text{Pa}\cdot\text{s}]$ によって、一般には次のように定義される。

$$\text{Pr} := \frac{\mu C_p}{\kappa}$$

2.2.3 連続の式

以下が本問題の連続の方程式である。

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

物理学でいう質量保存則を表す式である。物体が突然に現れたり消えたりしないということを意味する。ただし上式は本研究での仮定でもある非圧縮性流体について成立する。

2.3 初期条件

攪拌開始を $t=0$ とし、初期条件を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} u(\cdot, 0) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \theta(\cdot, 0) &= \theta_L && \text{in } \Omega_L \\ \theta(\cdot, 0) &= \theta_R && \text{in } \Omega_R \end{aligned}$$

最初は流体もプロペラも静止しているとし速度を 0 とする。また領域のうち左半分と右半分で温度が異なるとした。

2.4 境界条件

境界である容器内壁とプロペラに接した流体の速度は境界の速度と一致するとした。これを粘着境界条件という。

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} \omega(t)y & -\omega(t)x \end{pmatrix} && \text{on } \Gamma_0 \\ u &= 0 && \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} &= 0 && \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

中段の式は、回転座標系においてプロペラが静止しているということである。また下段の式については、外部からは断熱されていることを示している。

一方、時刻 t の容器内壁上の速度 u は次のようにもとめられる。ここで ω はプロペラの角速度である。時刻 t での容器内壁上の位置 r を慣性系で

$$r_F = \begin{pmatrix} R \cos \theta & R \sin \theta \end{pmatrix}$$

とする。このとき、回転座標系で r は次のように表される。

$$r_F = {}^t \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} R \cos(\theta - \Theta(t)) & R \sin(\theta - \Theta(t)) \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \int_0^t \omega(s) ds$$

これは慣性系にてプロペラが反時計回りに角速度 ω で回転しているのに対し、プロペラを固定した回転座標系では内壁が時計回りに角速度 ω で回転していることに対応している。これを時間微分したものが容器内壁上の速度である。

$$\begin{aligned} u &= \frac{dr_R}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cos(\theta - \Theta(t)) \\ R \sin(\theta - \Theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\theta - \Theta(t))' R \sin(\theta - \Theta(t)) \\ (\theta - \Theta(t))' R \cos(\theta - \Theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega(t)y \\ -\omega(t)x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第3章 現象と方程式の理解

シミュレーションにあたって、そのアルゴリズムだけが重要なわけは勿論ない。実際の運動や現象、方程式の意味するところを理解しておくべきである。ここでは攪拌の科学的な定義をし、また各支配方程式の導出を行い、方程式の無次元化についても述べることとする。

3.1 攪拌の意味

この節では、科学的反応や湧き出し・吸い込みが無い場合の物体の攪拌、また熱に焦点を当てた攪拌のふたつの“かき混ぜ”について説明する。

3.1.1 物体の攪拌

ある領域内における物体 A の密度について、領域全体での密度と、その領域内の任意の領域での密度が一致していれば、領域全体で物体 A は十分に攪拌されていると考えられる。

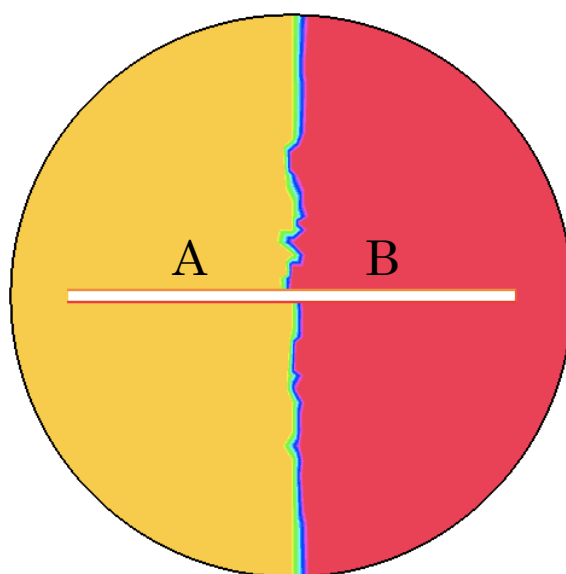


図 2 物体 A と B の初期位置

例えば上図の橙色の物体 A の密度について考えよう。領域内には A と右半分の紅葉色のような物体 B しか存在せず、また化学反応などによった量の変化も起こらないとする。このとき物体 A が領域全体で占める割合は $1/2$ である。それでは左半分の領域に限定した割合はどうか。左半分には物体 A のみが存在するので、この場合の割合は 1 となる。同様に右半分では物体 A が存在しないので 0 となる。つまりこれから言えることは、左右の領域で分けて考えてみれば物体 A は十分に攪拌されていないのである。上下半分に分けた場合は上下の領域とも割合が $1/2$ となるが、図を見る限り領域の全体で攪拌されているとはとても考え難い。十分に攪拌されているとは、十分に小さい領域に分割した場合でも割合が一致していることに相当するのである。

上記は攪拌という操作を受けた結果の混ざり具合についての説明である。攪拌のプロセスの数学的な説明としてはパイこね変換が挙げられる。これはパイの生地のような“連続体”をこねる操作を定式化し一種の写像とみなすことで攪拌の説明を果たすものである。例えば正方形領域からそれ自身への全単射な写像を考える。具体的には正方形を横 2 倍、縦 $1/2$ 倍に引き延ばし、そこからまた正方形になるよう折りたたむ（位置を変える）ことをする。

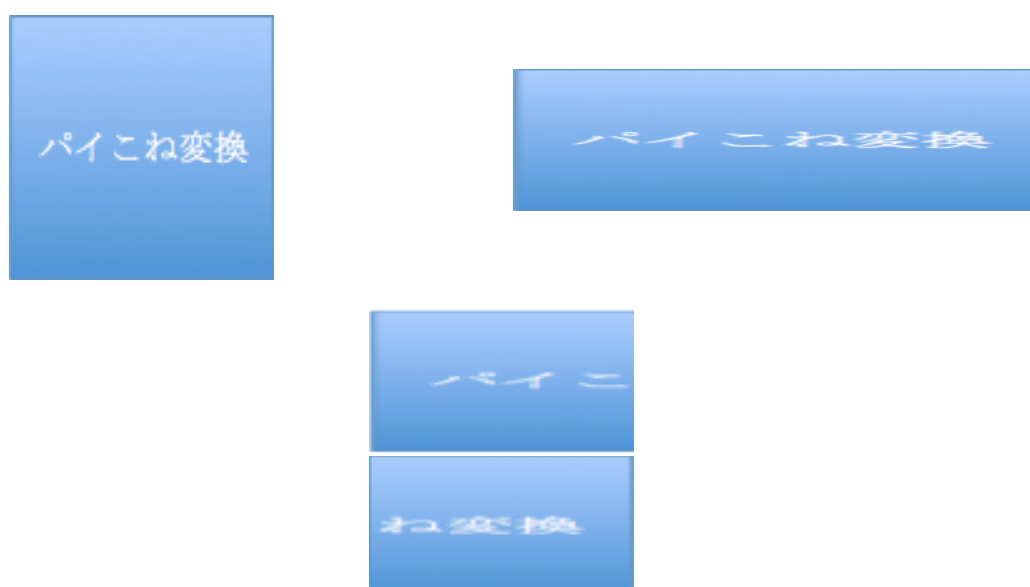


図 3 パイこね変換

結果「パイこね変換」という白文字が引き伸ばされ移動している。これを複数回続けることで、正方形内にて白文字を分散させることができる。これが攪拌という操作・現象の説明になり得る。また攪拌は2次元のパイ生地に限らず、3次元空間の領域に対しても“引き伸ばし”と“折りたたみ”によって成される。

3.1.2 本研究の攪拌

本研究では温度の異なる水を混ぜ合わせることを考えている。前節にもあったように攪拌は“引き伸ばし”と“折りたたみ”によって起こり得るが、熱の攪拌には“温度の変化”も考えなければならない。フーリエの法則「熱は温度の高い側から低い側へと移動し、かつその移動する熱は温度差に比例する」より、“引き伸ばし”と“折りたたみ”をせずとも、いずれは伝導によって熱が領域全体に分散されることになる。

熱が十分に攪拌されていることの説明として「領域内の任意の2点の温度差が十分小さくなっていること」とする。これは領域全体に十分に熱が分散されていることを意味し、それゆえに熱の移動・温度変化が起こらなくなっているのである。要は攪拌が十分になされたとき温度は定常状態になるということだ。

また本研究で熱の攪拌は“移流”と“拡散”のふたつのプロセスにより起こるとする。前者は熱が分布する流体自体の変位に従うものであり、後者は熱の伝導によるものである。なお放射や熱化学反応などの現象、プロペラの仕事による発熱については今回の研究では考えないことにする。

3.2 支配方程式の導出

Navier-Stokes 方程式、移流拡散方程式、連続の方程式それぞれについて導出を行い、最後に無次元化を施す。

3.2.1 Navier-Stokes 方程式の導出

Navier-Stokes 方程式は運動方程式 $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ に相当するものである。この節ではまず慣性系における外力を考えない場合について導出する。時刻 t での位置 \mathbf{r} の流体の速度を $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ とおく。このとき \mathbf{F} に値するものは圧力と応力である。単位質量あたりの運動方程式として、次式 Navier-Stokes 方程式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}}(\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u))$$

加速度、圧力、応力についてそれぞれ考えていく。

加速度 a は次のように表すことができる。

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(r + u\Delta t, t + \Delta t) - u(r, t)}{\Delta t}$$

x 成分に注目すると

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ u_x(x + u_x\Delta t, y + u_y\Delta t, z + u_z\Delta t, t + \Delta t) - u_x(x, y, z, t) \right\}$$

多変数関数のテイラー展開を 1 次まで施すことで

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ u_x\Delta t \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\Delta t \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\Delta t \frac{\partial u_x}{\partial z} + \Delta t \frac{\partial u_x}{\partial t} \right\} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u_x$$

以上より、 y 成分と z 成分についても同様の計算をすれば

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$$

次に圧力である。各辺 dx, dy, dz からなる微小な直方体を考える。直方体の中心を (x, y, z) とおく。

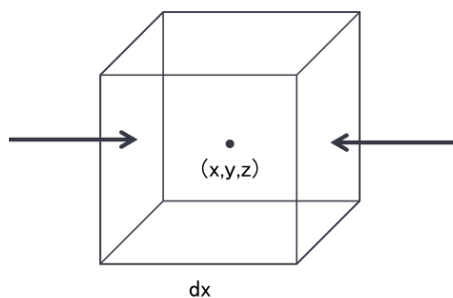


図 4 x 軸方向の圧力

このとき中心から $\pm dx/2$ 離れた位置に x 軸に垂直な面が存在する。直方体の x 成分にはたらく圧力はこの面によるものである。その合力は圧力 p と微小面積の積をとることで次のように表される。

$$\left\{ p\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) - p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) \right\} dydz$$

ここで $dx/2$ を微小量として 1 次までテイラー展開すると、

$$\text{合力} = \left(-\frac{dx}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{dx}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

したがって単位体積あたりの合力は $-\frac{\partial p}{\partial x}$ である。 y, z 成分についても同様にして、

まとめて整理すれば

$$\text{圧力} = -\nabla p$$

次に応力についてもとめる。天下りの的ではあるが、次の 3 つのことを認めてそこから導出する。

1. 各辺 dx, dy, dz からなる微小直方体にはたらく応力を考える。

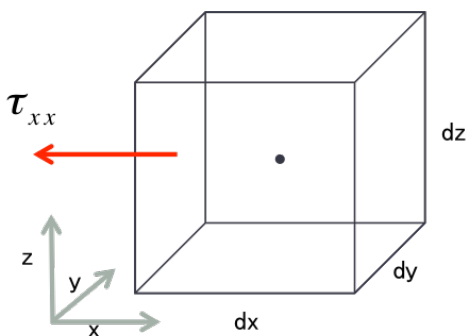


図 5 x 軸と垂直に交わる面にはたらく x 軸負の方向の応力

このとき流体にかかる応力は粘性係数 μ と速度 \mathbf{u} を用いて次のように表される。座標軸（成分） i に垂直な面にはたらく応力のうち、座標軸（成分） j の負の方向を持つものは

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$$

2. τ_{ij} のはたらく面から di 離れた場所に位置する平行な面について、その面にはたらく応力のうち座標軸 j の正の向きにはたらくものは

$$\tau_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial i}$$

と表される。

3. 直方体のそれぞれの面が各軸方向に応力を受けている。例えば以下の図は直方体にかかる応力のうち x 成分をすべて示したものである。

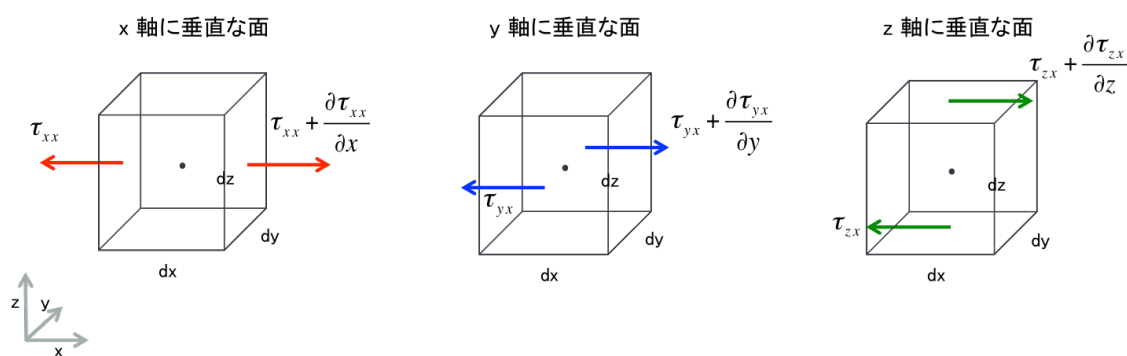


図 6 各面にはたらく x 軸方向の応力

これらから微小直方体にはたらく応力の合力について x 成分の表示を目指す。 x 軸に垂直な面から受ける応力による合力は、応力と微小面積の積をとることで次のように表される。

$$-\tau_{xx} dydz + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz$$

同様に y 軸に垂直な面から受ける応力による合力は

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

z 軸に垂直な面から受ける応力による合力は

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

各面から受ける応力の合力の和をとり、

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dV$$

したがって単位体積あたりの応力は

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$ より変形して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= \mu \left(\Delta u_x + \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

y, z 成分についても同様に計算を行うことで応力の項はもとまり、

$$\text{応力} = \mu (\Delta \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}))$$

以上より Navier-Stokes 方程式の各項がもどまったことになる。
物質微分項とも呼ばれる流体の加速度は、

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$$

流体にはたらく力 F は単位体積あたりの圧力と応力の和をとったものであり、

$$F = -\nabla p + \mu(\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u))$$

流体の密度 ρ は単位体積あたりの質量に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} ma &= F \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) &= -\nabla p + \mu(\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} (\Delta u + \nabla(\nabla \cdot u)) \end{aligned}$$

運動方程式から上式が導かれる。これが無次元化されていない Navier-Stokes 方程式である。

3.2.1.1 回転座標系における慣性力

本研究では Navier-Stokes 方程式に慣性力項を加えなければいけない。慣性系と回転座標系の加速度の関係式を導き、それにより遠心力 (Centrifugal force)、コリオリ力 (Coriolis force)、オイラー力 (Euler force) が運動方程式に現れることを示す。まずは静止系に固定した座標系から見て角速度ベクトル Ω で回転しているベクトル A を考える。角速度ベクトルとは回転軸を方向に持ち、かつ角速度の大きさを持つベクトルである。

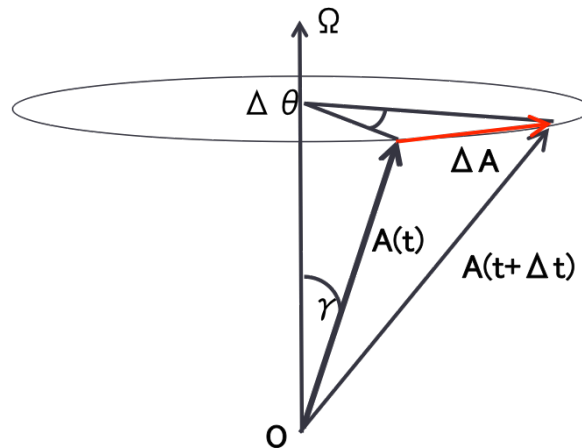


図 7 回転するベクトル

いま回転軸から γ 傾いたベクトル $A(t)$ が角速度ベクトル Ω で回転し、 Δt 秒後に向きが変わり大きさが変わらない $A(t+\Delta t)$ になったとする。このとき $A(t)$ と $A(t+\Delta t)$ の両終点からなる円弧の内角を $\Delta \theta$ とおく。これは角速度の大きさと経過時間から

$$\Delta \theta = |\Omega| \Delta t$$

と表すことができる。また円弧の半径は $|A| \sin \gamma$ であるから、円弧の長さは

$$\Delta \theta |A| \sin \gamma$$

となる。もし Δt が十分に小さければ、ベクトル ΔA は A と Ω に直交し、かつ

$$|\Delta A| \approx \Delta t |\Omega| |A| \sin \gamma$$

と大きさを表せる。 Δt を極小にすれば

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \Omega \times A$$

が導かれる。ここで下付き文字の F は慣性系での値ということを意味する。回

転座標系での A の変化率を考えれば、ベクトルの線型性により次式が成立する。

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times A$$

上式が任意のベクトル A について成り立つ。ここで下付き文字の \mathbf{R} は回転座標系での値ということの意味する。

位置ベクトル \mathbf{r} を代入し、

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

これは慣性系と回転座標系の速度の関係式となる。すなわち

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

同様に慣性系での速度について

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_F$$

これは慣性系と回転座標系の加速度の関係式となる。速度の関係式によって右辺を回転座標系での物理量に整理すれば、

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}\right)_R \times \mathbf{r}$$

これを密度 ρ の単位体積あたりの運動方程式 $\rho \mathbf{a} = \mathbf{F}$ に代入する。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial t}\right)_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{Cen}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} + \mathbf{F}_{\text{Eur}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Cen}} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R, \quad \mathbf{F}_{\text{Eur}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}\right)_R \times \mathbf{r}$$

以上により回転座標系での慣性力がもとめられた。

慣性力はそれぞれ式を見ればその性質がわかる。ベクトル3重積を考え、遠心力は回転軸に対し外向きにはたらく慣性力だとわかる。またコリオリ力は移動方向と垂直な方向に受ける慣性力である。例えば回転座標系が慣性系に対し反時計回りに回転しているとき、右方向から力を受けるように感じるものである。オイラー力は回転の加速によって生じる慣性力である。ゆえに角加速度が0の場合オイラー力は発生しない。例えば地球流体力学においては地球の自転速度は一定とされ、オイラー力が考慮されない場合がある。

本研究ではシミュレーションの対象とする問題を2次元で考えた。先に導出した慣性力を2次元で用いるには、z軸方向に力ははたらかないとすれば良い。

3.2.2 移流拡散方程式の導出

フーリエの法則「熱は温度の高い側から低い側へと移動し、かつその移動する熱は温度差に比例する」より、単位時間かつ単位断面積あたりの熱の流量を成分ごとに次のように表示する。ここで κ は熱伝導率、 θ は温度である。ただし化学反応等による発熱や吸熱、放射などは起こらないとする。

$$q_x = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

各辺 dx, dy, dz からなる直方体について、各成分に拡散の効果で流入する熱は

$$Q_x^{\text{dif}} = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} dydzdt, \quad Q_y^{\text{dif}} = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial y} dx dz dt, \quad Q_z^{\text{dif}} = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} dx dy dt$$

各成分に移流の効果で流入する熱は、直方体の密度を ρ 、比熱を c_p として

$$Q_x^{\text{con}} = \rho c_p d\theta_x u_x dydzdt, \quad Q_y^{\text{con}} = \rho c_p d\theta_y u_y dx dz dt, \quad Q_z^{\text{con}} = \rho c_p d\theta_z u_z dx dy dt$$

各成分に流入する熱は移流と拡散による熱流の和なので

$$Q_x^{\text{IN}} = Q_x^{\text{con}} + Q_x^{\text{dif}}, \quad Q_y^{\text{IN}} = Q_y^{\text{con}} + Q_y^{\text{dif}}, \quad Q_z^{\text{IN}} = Q_z^{\text{con}} + Q_z^{\text{dif}}$$

一方、流出する熱は次のように表される。

$$Q_x^{\text{OUT}} = Q_x^{\text{IN}} + \frac{\partial Q_x^{\text{IN}}}{\partial x} dx, \quad Q_y^{\text{OUT}} = Q_y^{\text{IN}} + \frac{\partial Q_y^{\text{IN}}}{\partial y} dy, \quad Q_z^{\text{OUT}} = Q_z^{\text{IN}} + \frac{\partial Q_z^{\text{IN}}}{\partial z} dz$$

以上より直方体に蓄積される熱 Q は各成分の熱流の和であり、

$$Q_x = Q_x^{\text{IN}} - Q_x^{\text{OUT}}, \quad Q_y = Q_y^{\text{IN}} - Q_y^{\text{OUT}}, \quad Q_z = Q_z^{\text{IN}} - Q_z^{\text{OUT}}$$

$$Q = Q_x + Q_y + Q_z$$

温度の変化量は流入出の前後の差であるから、各成分について次のように表す。

$$d\theta_x = \theta - \theta_x^{\text{ini}}, \quad d\theta_y = \theta - \theta_y^{\text{ini}}, \quad d\theta_z = \theta - \theta_z^{\text{ini}}$$

これらの式を整理すると、

$$Q = \left\{ \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} (\theta - \theta_x^{\text{ini}}) + u_y \frac{\partial}{\partial y} (\theta - \theta_y^{\text{ini}}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\theta - \theta_z^{\text{ini}}) \right) \right\} dx dy dz dt$$

$$= \left\{ \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \left(u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz dt$$

比熱の定義から

$$Q = \left\{ \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \left(u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz dt = \rho c_p d\theta dx dy dz$$

したがって次の式が導かれる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \theta = \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta \theta$$

これが温度 θ の無次元化されていない移流拡散方程式である。

3.2.3 連続の方程式の導出

質量保存則を意味する連続の方程式を導出する。領域内で流体が新たに発生・消滅しない限り、領域 V での流体の質量の変化は、 V の境界 S で流入出する質量に等しいことが示される。

V 内の流体の質量は密度 ρ を用いて

$$\int_V \rho dV$$

で表される。したがって単位時間あたりの質量の増加は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

一方、 S を通り流出する流体の単位時間あたりの質量は

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

と言える。ここで \mathbf{u} は流体の速度である。 V 内の質量の増加分は S を通り流入したことになるので、これらのことから次の式が導かれる。

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

Gauss の発散定理 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ を用いて体積分で整理すると、

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0$$

上式が任意の V に対して成立するため

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

これが一般的な連続の方程式である。本研究で扱う問題では流体が非圧縮性流体であると仮定していることから、先に示した連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

が導かれることとなる。こちらも無次元化はされていない。

3.2.4 支配方程式の無次元化

本研究で扱う支配方程式を改めて以下にまとめる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta u \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\theta &= \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta \theta \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

本節ではこれらの方程式に無次元化を施す。無次元化とは代表的物理量をとって方程式のパラメータを無次元量に変換することである。具体的には

$$x = Lx', \quad u = Uu', \quad t = \frac{L}{U}t', \quad p = \rho U^2 p', \quad \theta = T\theta'$$

とそれぞれを表す。ここで L は代表的長さ、 U は代表的速度、 T は代表的温度である。このようにすることで各プライム付きの変数は単位が無次元となる。さらに上の定義から微分と演算子について次のことがわかる。

$$\nabla = \frac{1}{L} \nabla', \quad \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta', \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t'}$$

これらプライム付きのベクトル・変数・微分で支配方程式を表すことを考える。
Navier-Stokes 方程式を無次元化すると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' = -\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho UL} \Delta' u'$$

上式からプライムを取りレイノルズ数を用いて表せば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \quad \text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

次に移流拡散方程式を無次元化すると

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') \theta' = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{1}{UL} \Delta' \theta' = \frac{\mu}{\rho UL} \frac{\kappa}{\mu c_p} \Delta' \theta'$$

上式からプライムを取りレイノルズ数とプラントル数を用いて表せば、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa}$$

次に連続の方程式を無次元化すると

$$\nabla' \cdot u' = 0$$

上式からプライムを取れば、

$$\nabla \cdot u = 0$$

以上より各支配方程式が無次元化された。計算時は各変数のスケールが変換されることに注意されたい。方程式同様に領域や境界条件などに対しても、その値を無次元化による定義にならない変換しなければならない。

第4章 シミュレーション

改めて問題の各パラメータの値を設定し、攪拌シミュレーションを行う。この節では使用した近似手法や数値計算法についても述べる。

4.1 問題設定値一覧

シミュレーションにあたり、実際には以下のように問題を設定する。

- ・代表的長さ L 0.1[m] ($=2R$)
- ・代表的速さ U 約 0.628[m/s] ($=R \cdot c \cdot T$, c は以下で示す角加速度、 $\omega(t) = ct$)
として各無次元量をもとめた。

問題の値	無次元化した値
容器の半径 R 0.05[m]	0.5
プロペラの長径 $2a$ 0.08[m]	0.8
プロペラの短径 $2b$ 0.002[m]	0.02
温度初期値左側 θ_L 293[K] (19.85°C)	293
温度初期値右側 θ_R 294[K] (20.85°C)	294
加速する時間 T 2[s]	4π
加速中の角加速度 c 2π [rad/s ²]	1

表 1 実際の値と無次元化した値

また 20°Cまわりの水の物性値等について、
粘性係数 μ 0.001[Pa·s]、 密度 ρ 1000[kg/m³]
レイノルズ数 Re 約 62800、 プラントル数 Pr 7
として定めた。

4.2 シミュレーションの準備

本研究では Freefem++を利用し有限要素法により問題を解いた。また方程式の離散化において特性曲線法を用いた。この節ではシミュレーションに必要なと

なった知識・情報を記す。

4.2.1 有限要素法

有限要素法 (Finite Element Method) とは数値解析の手法のひとつである。方程式の定義された領域を有限個の要素 (メッシュ) に分割し形状を分けることで計算を可能とする。本研究では領域を三角形の要素で分割した。

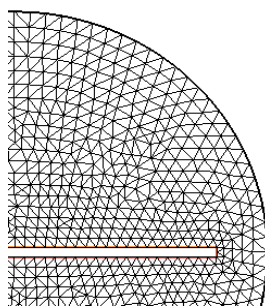


図 8 領域のメッシュ分割

要素内における物理量等の数値は、各メッシュの節点 (要素の頂点) に対応したある関数と、節点における値による線形結合で定める。要素分割を三角形で行った場合、ある三角形内部での物理量 θ は次のようになる。

$$\theta = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_i = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}$$

ここで N_i は頂点 $i=1,2,3$ に対応する関数であり、 θ_i はその頂点における物理量である。つまりはそれぞれの頂点からの距離により三角形内部での値が定まるということである。

また領域に定義された方程式や条件の弱形式をもとめる。強形式である方程式に、有限要素空間なる関数空間の要素である試験関数を作用させ、Green の積分公式などを用いることで微分可能性の条件を弱めることができる。領域全体での弱形式は各要素内の積分の総和として表すことが可能であるから、こうして未知数を求める方法が巨大な連立 1 次方程式を解くことに帰着される。

4.2.2 特性曲線法

流体全体に含まれる小さい流体を考える。この小さい流体の時刻 t での位置を X_t として物質微分項を離散化し、以下のように近似する。例えば Navier-Stokes 方程式で物質微分項は加速度に相当するので、速度の変化率を考えればよい。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \approx \frac{1}{\Delta t} \{u(X_t, t) - u(X_{t-\Delta t}, t - \Delta t)\}$$

ここで時刻 $t - \Delta t$ のとき、その位置は次のように表される。

$$X_{t-\Delta t} \approx X_t - \Delta t u(X_t, t)$$

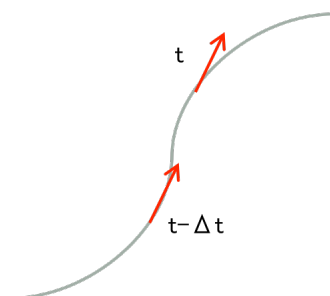


図 9 特性曲線法の近似

上図のように、この近似は微小時間 Δt 秒の間に速度の“大きさ”と“方向”の変化が十分に小さいという仮定をしているのである。

4.2.3 Freefem++

Freefem++とは偏微分方程式を数値計算するためのプログラミング言語・環境であり、パリ第6大学 J.L.Lions 研究所が開発を行っている。fem とあるように有限要素法 (Finite Element Method) で解くことに特化したものである。そのため他言語と比較すれば簡単かつ直感的に有限要素法を展開し、問題を解き可視化することが可能である。

特徴として、例えば有限要素法では領域のメッシュ構成が大変に労力を要するが、Freefem++ならば境界の指定と並行して半自動的にメッシュ分割を行うことができる。また弱形式・境界条件についても、式をそのまま入力するよう

な構造が成されており、容易に設定することが可能である。前節の特性曲線法も命令・コマンドが用意されており「convect()」によって物質微分項を近似することができる。その使用方法等については付録のコードを参照されたい。

4.2.4 本研究の弱形式

シミュレーションにあたり本問題の各支配方程式を離散化し、得られた差分方程式の弱形式をもとめる。

4.2.4.1 方程式の離散化

時間方向に各支配方程式を時間について離散化する。物質微分項については特性曲線法を用いた。結果を以下に記す。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n \circ X^n) &= \text{div}(p^{n+1}, u^{n+1}) + f^{n+1} \\ \frac{1}{\Delta t}(\theta^{n+1} - u^n \circ X^n) &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta^{n+1} \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= 0\end{aligned}$$

ここで $u^n \circ X^n := u^n(x - u^n \Delta t)$ である。

4.2.4.2 弱形式の導出

試験関数を用いて弱形式を導出する。なお連続の方程式についてはNavier-Stokes方程式の応力項にあたる。

<Navier-Stokes 方程式の弱形式>

試験関数 v をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n) \cdot v \, dx \\ = \int_{\Omega} -\nabla p^{n+1} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\Delta u^{n+1} + \nabla(\nabla \cdot u^{n+1})) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} f^{n+1} \cdot v \, dx\end{aligned}$$

ここで圧力項について次の式が成り立つ。

$$\int_{\Omega} -\nabla p^{n+1} \cdot v \, dx = \int_{\partial\Omega} -p^{n+1} v \cdot n \, d\sigma + \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \, dx$$

境界上では $v \cdot n = 0$ であるから、圧力項は

$$I_p := \int_{\Omega} -\nabla p^{n+1} \cdot v \, dx = \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \, dx$$

また天下りの的ではあるが次式

$$\int_{\Omega} E(u^{n+1}) : E(v) \, dx = \int_{\partial\Omega} E(u^{n+1}) n \cdot v \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u^{n+1} + \nabla(\nabla u^{n+1})) \cdot v \, dx$$

が成立することから、応力項は

$$I_s := \frac{2}{\text{Re}} \int_{\partial\Omega} E(u^{n+1}) n \cdot v \, d\sigma - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} E(u^{n+1}) : E(v) \, dx = -\frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} E(u^{n+1}) : E(v) \, dx$$

と表せる。以上より Navier-Stokes 方程式の弱形式を以下で表すことにする。

$$\left(\frac{1}{\Delta t} u^{n+1}, v \right) + \left(\frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n), v \right) = (\text{div} \sigma(p^{n+1}, u^{n+1}), v) + (f^{n+1}, v)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} u^{n+1}, v \right) := \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} \cdot v \, dx$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n), v \right) := - \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n) \cdot v \, dx$$

$$(\text{div} \sigma(p^{n+1}, u^{n+1}), v) := I_p + I_s$$

$$(f^{n+1}, v) := \int_{\Omega} f^{n+1} \cdot v \, dx$$

< 移流拡散方程式の弱形式 >

試験関数 ψ をかけて積分すると、

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \theta^{n+1} \cdot \psi \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n) \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta^{n+1} \cdot \psi \, dx$$

Green の積分公式より次式が成立する。

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta^{n+1} \cdot \psi \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial n} \cdot \psi \, d\sigma - \int_{\Omega} \frac{1}{\text{RePr}} \nabla \theta^{n+1} \cdot \nabla \psi \, dx$$

境界上では $\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial n} = 0$ である。整理し、移流拡散方程式の弱形式を以下で表すことにする。

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \theta^{n+1}, \psi \right) + \left(\frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n), \psi \right) = \left(\frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta^{n+1}, \psi \right)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \theta^{n+1}, \psi \right) := \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \theta^{n+1} \cdot \psi \, dx$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n), \psi \right) := - \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} (u^n \circ X^n) \cdot \psi \, dx$$

$$\left(\frac{1}{\text{RePr}} \Delta \theta^{n+1}, \psi \right) := - \int_{\Omega} \frac{1}{\text{RePr}} \nabla \theta^{n+1} \cdot \nabla \psi \, dx$$

4.3 シミュレーションの評価方法

シミュレーションの評価として、Freefem++による温度分布の可視化と、領域内での任意の2点の温度差について考えた。

4.3.1 温度分布による評価

温度の計算結果を可視化する。領域内の温度分布を表示し、熱が攪拌される様子を実際に確認する。

例えば開始直後には以下の様にまったく攪拌されていないことがわかる。

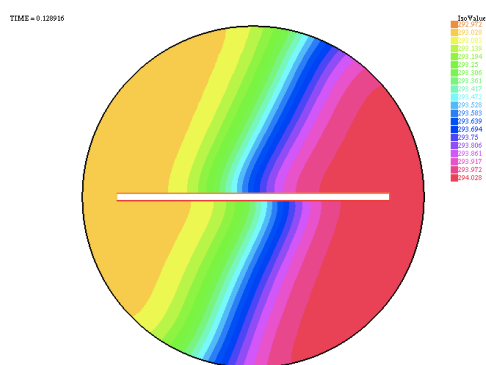


図 10 攪拌開始直後、 $t=0.13$ の温度分布

また攪拌が“引き伸ばし”と“折りたたみ”によって引き起こされることも確認出来る。温度の分布は引き伸ばされ、かつ折りたたまれることで層を成している。

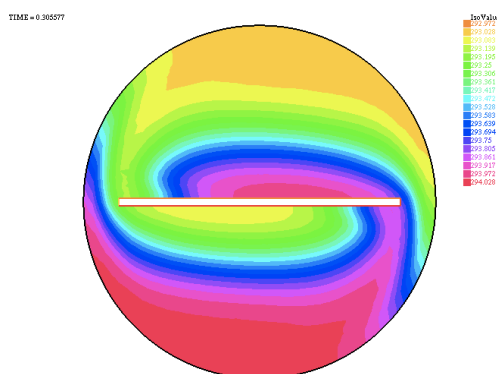


図 11 攪拌開始から少し後、 $t=0.31$ の温度分布

4.3.2 温度差による評価

シミュレーションの毎ステップにおいて、領域内の温度の最大値と最小値を観測し、その差を $\max d\theta(t)$ と定義する。この値は「領域内の任意の 2 点の温度差の最大値」となる。攪拌が十分になされている状態とは、領域内の温度分布がほとんど均一であることと言え、そしてそれは $\max d\theta$ の値が十分に小さいことを意味している。

計算結果から温度の最大値かつ最小値、また $y = \max d\theta(t)$ のグラフをプロットし温度の挙動を調べる。条件から温度の最大値と $y = \max d\theta(t)$ は単調減少関数となり、温度の最小値は単調増加関数となるはずである。容器とプロペラが断熱されていること、そしてフーリエの法則より「熱は温度の高い側から低い側へと移動し、かつその移動する熱は温度差に比例する」ことから、領域内の温度は $293.5[\text{K}]$ を定常状態とするはずである。ゆえに温度の最大値と温度の最小値のグラフは $y = 293.5$ を漸近線に持ち、 $y = \max d\theta(t)$ は $y = 0$ を漸近線に持つと考えられる。

4.4 シミュレーション①

以上の評価方法をとって本問題のシミュレーションを実行する。流体の攪拌を 2 次元領域において再現する。

4.4.1 概要

Freefem++ の命令 `convect()` を使用して物質微分項を近似し、無次元化した時間において時間刻み幅を 0.001 として計算した。Freefem++ によるコマンドで攪拌の様子をプロットし、温度など観測された物理量は csv ファイルに出力させ、後にエクセルを用いてグラフを描画した。時間の限度は設けず適度に、プロットされた攪拌の様子と $\max d\theta$ の値の確認を行った。

4.4.2 結果

以下がシミュレーション結果のうち注目すべき点である。なお、これからは特にことわりのない限り、「時間」に関しての言及は無次元化されていない実際の問題における「時間」を指すこととする。

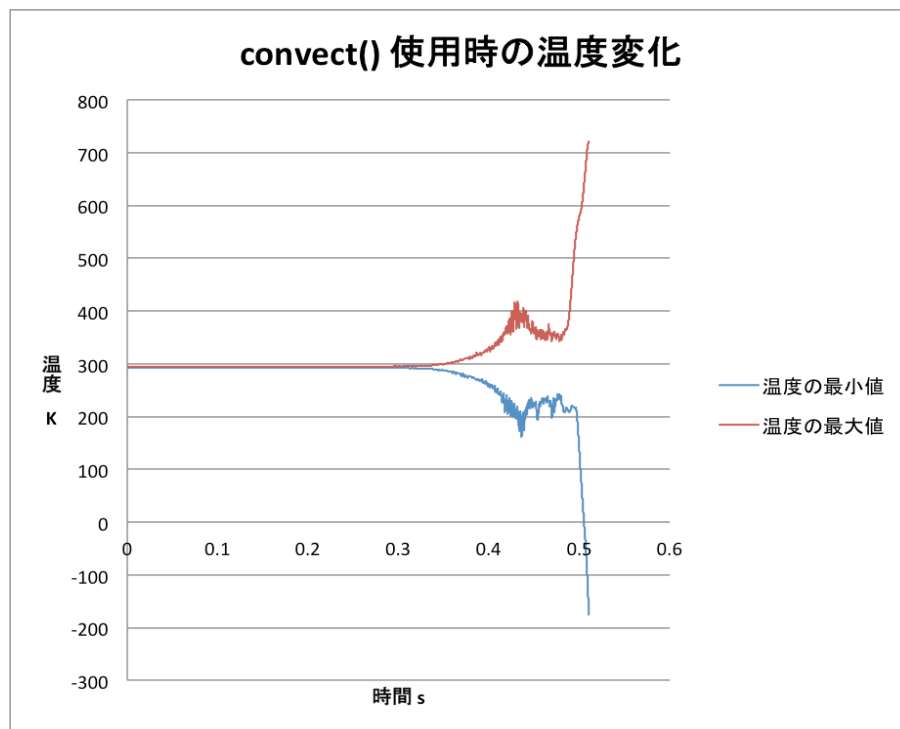


図 12 温度の最大値と最小値のグラフ

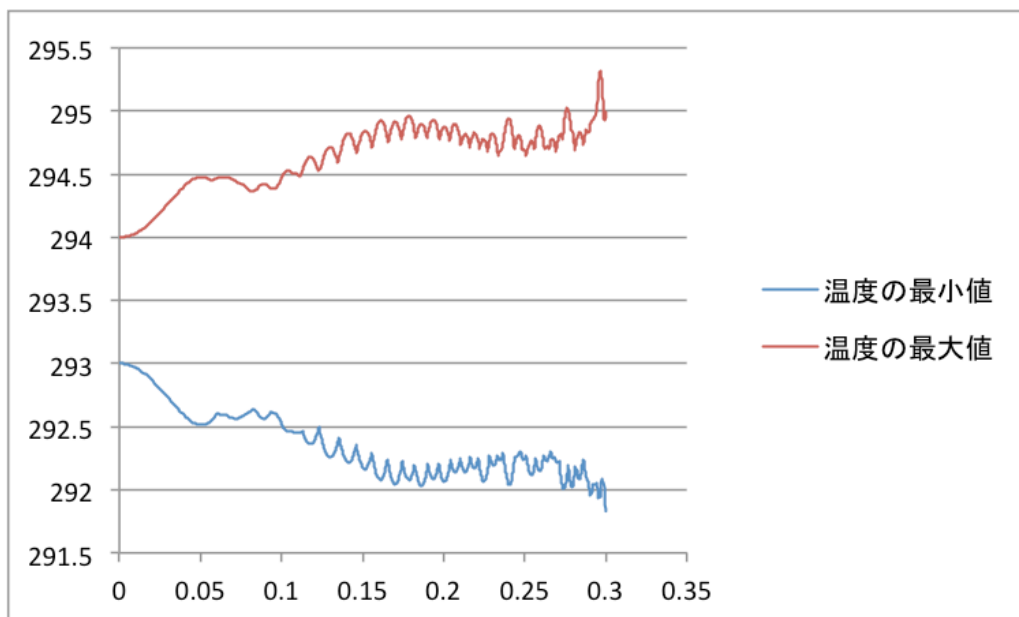


図 13 温度の最大値と最小値のグラフ 攪拌初期

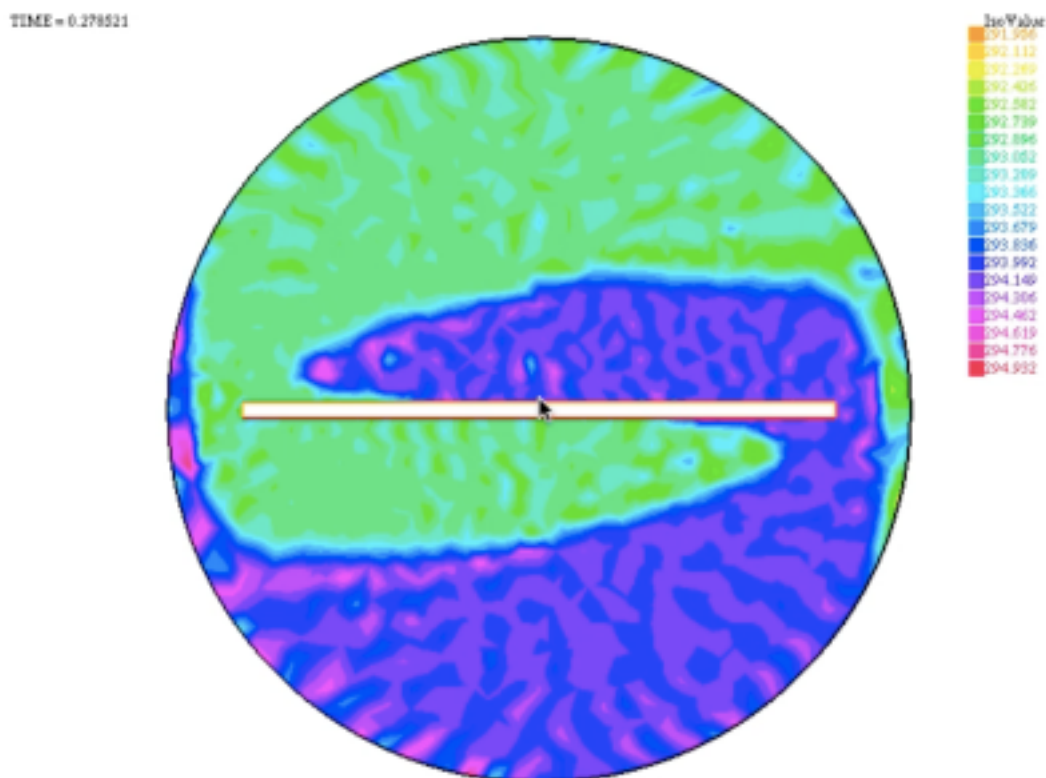


図 14 攪拌開始から少し後、 $t=0.28$ の温度分布

4.4.3 考察

図 12 と図 13 が示すように、初期の温度差 1 の状態から温度は慢性的に振動し、温度が増加と減少を繰り返していることがわかった。特に時刻およそ 0.35 秒以降は振動の度合いが激しくなり、やがて一方では温度が極端に増加し、同様に一方で極端に減少するという結果が得られた。これは本来に想定されるグラフとはまったく異なる挙動である。その後も計算を続行したが、温度の最大値と最小値の差はひたすらに拡大を続けるばかりだった。

次に温度分布のプロット図 14 を見る。時計回りに回転する内壁に従い、容器境界の周辺にて粘着性が確認出来る。これは粘着境界条件を的確に表していると言え、内壁と流体の粘着性が攪拌の“引き伸ばし”と“折りたたみ”に一役買う形となっている。

また領域全体に“小さい熱の塊”が分布していることがわかる。プロペラの回転角が 2π に及んでもいないのに、まるで攪拌がある程度に進行しているように見える。本来の現象を考えれば、攪拌初期においては293Kと294Kの分布が大半を占め、それら温度の境界のみに温度の変化が起こるはずである。この斑点が発生した原因としては、先の温度変化のグラフにも見られた振動によるものと考えることができる。

以上の結果・考察から、シミュレーション①による温度の振る舞いは本来ありえないことである。よって本問題の現象を良く再現しているとは考え難い。

4.5 数値計算の安定化

シミュレーション①の結果・考察を受け、数値計算の安定化について考える。温度に発生した振動は、実は数値計算における安定性の問題に起因している。本問題はプロペラによって強制的に対流を発生させており、これは「拡散」よりも「移流」の性質が強い方程式を解くということに相当する。移流拡散方程式の右辺である

$$\frac{1}{\text{RePr}}\Delta\theta$$

の項を拡散項という。また左辺第二項である

$$(u \cdot \nabla)\theta$$

の項を移流項という。これらはそれぞれ拡散と移流の現象を表す項となっている。本問題の強い移流性によってレイノルズ数は非常に大きな値となり、結果的に拡散項が非常に小さな値となってしまふ。すなわち方程式の拡散性が弱くなり、移流項が拡散項を卓越するのである。このような場合において、数値計算は“不安定”になり解の振動が発生することが知られている。そのためより正確なシミュレーションを行うには、方程式の近似または数値計算の手法に安定化を図らなければならないのである。

4.5.1 安定化有限要素法

移流性の強い問題の安定化は数値流体力学の研究者たちを長年にわたり悩まし、改善手法の開発が絶えず進められてきた。その結果、特に有限要素法の界限では、本研究で用いた“重み付き残差法”と呼ばれる手法に代わり、方程式の離散化・弱形式化の際に種々の“安定化有限要素法”を用いることが可能となった。

安定化有限要素法の例として、

- ・ Upwind Galerkin 法
- ・ Upwind Petrov-Galerkin 法
- ・ SUPG 法 (Streamline Upwind Petrov-Galerkin method)

などが存在する。これら高級な手法に共通する特徴としては、流体の「風上」の効果を検討することによる移流現象の正確な表現が挙げられる。拡散性の弱さはそのままに、移流性に対し適切な近似を行うのである。本来移流が強いということは流体の速度が大きいということに相当するため、その運動量や衝撃などを考えなければならないことになる。つまりはある流体の位置を考えると、流体が流れてきた風上の物理量を鑑みることによって、より正確に現象を表すことができるという理屈である。

4.5.2 人工粘性法

方程式の近似手法には「人工粘性法」と呼ばれるものがある。安定化有限要素法が移流に対し適切な処置を図るものであったのに対し、こちらは拡散性の弱さに処置を施すことで安定化を図るのである。ただし人工的に拡散性を強めるという行為は、本来の現象とは異なる性質を孕む恐れがあり、その操作には十分に注意しなければならない。

4.6 シミュレーション②

シミュレーション①の結果・考察を受け、シミュレーション①と同様の設定でシミュレーション②を行う。

4.6.1 概要

数値計算の安定化を図る。簡単のため人工粘性法によって拡散性を高めて数

値計算を行う。移流拡散方程式の近似として次の方程式を採用する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \theta = \left(\frac{1}{\text{RePr}} + k \right) \Delta \theta$$

k は非負値であり、これを拡散定数と呼ぶことにする。以上の方程式にて k の値を変えシミュレーションする。この値により拡散項の係数を大きくすることで、方程式の拡散性を強めることが可能だと言える。そして k が小さい値であるほど、以上の方程式は本来の移流拡散方程式をより近似していると仮定する。

4.6.2 結果

以下がシミュレーション結果のうち注目すべき点である。

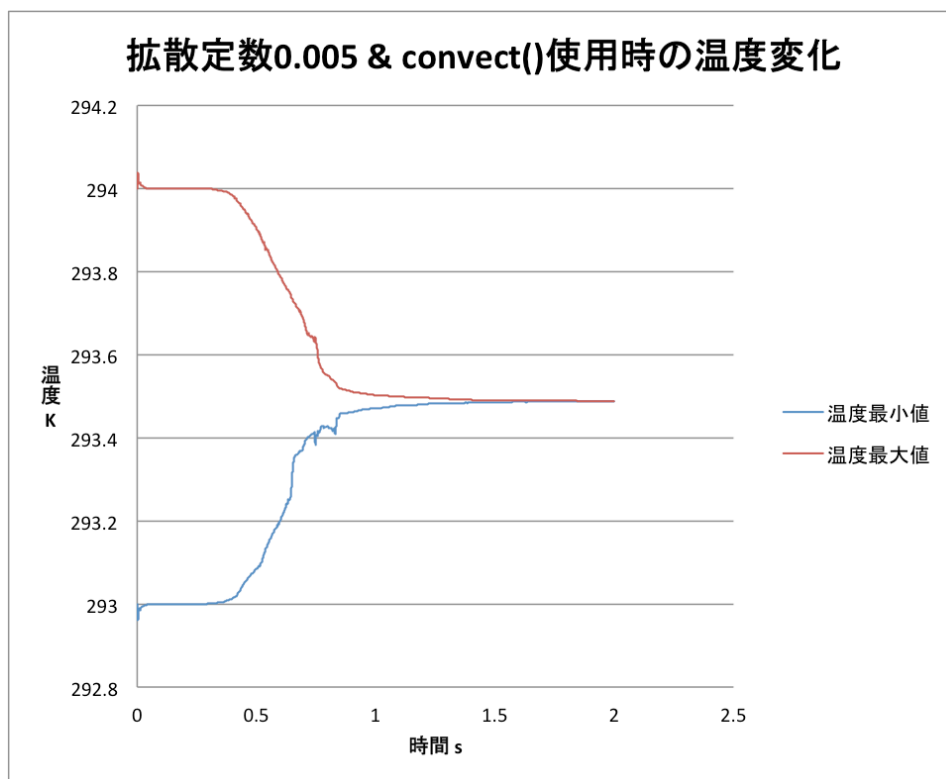


図 15 $k = 0.005$ の場合の温度変化

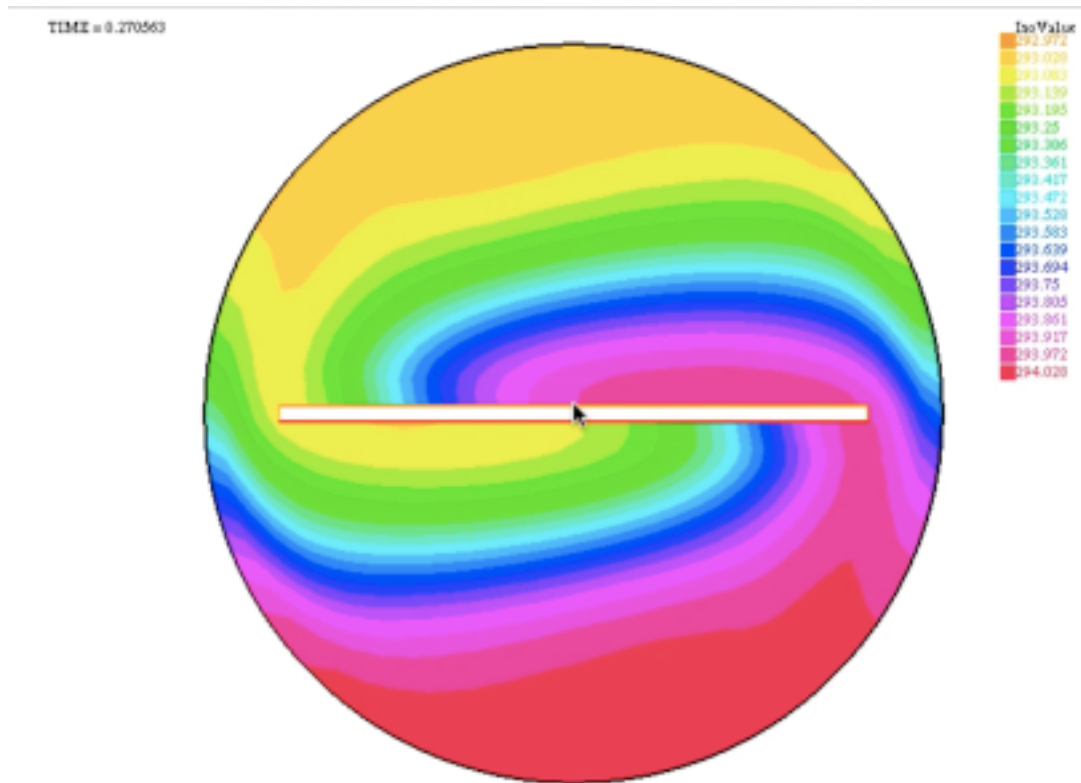


図 16 $k = 0.005$ の場合の攪拌開始より少し後の温度分布

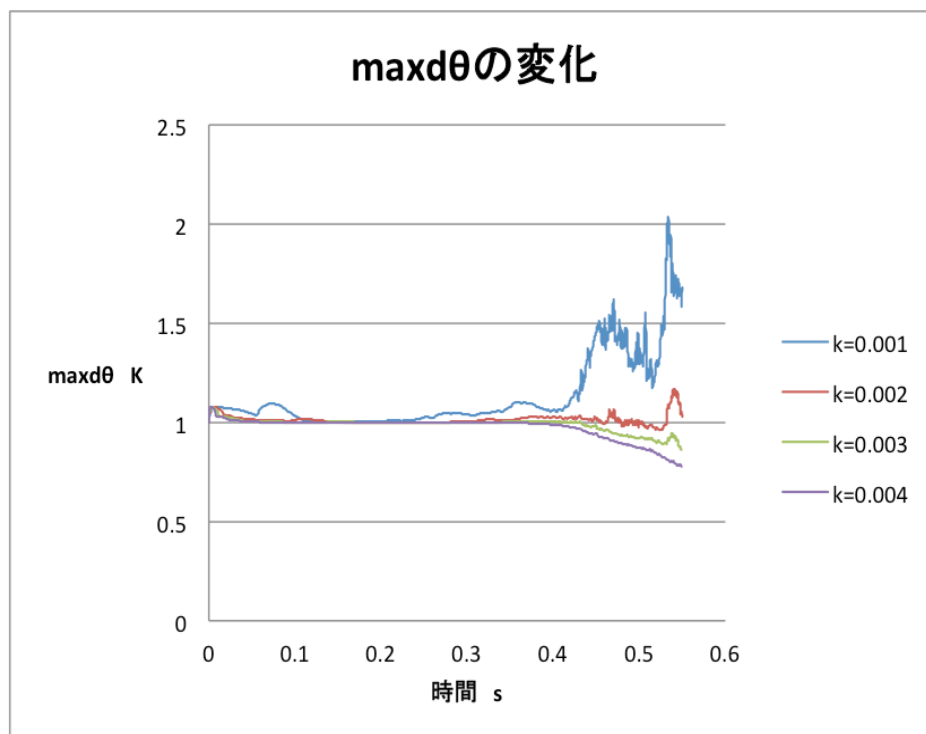


図 17 拡散定数による温度差の最大値の振る舞い

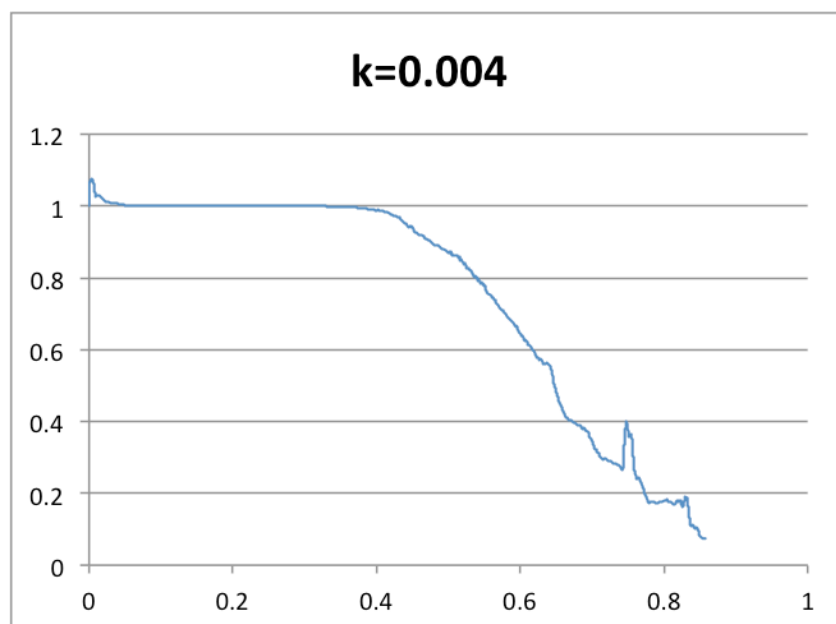


図 18 $k = 0.004$ の場合の温度差の最大値の振る舞い

4.6.3 考察

まず拡散定数が 0.005 の場合を確認する。温度のグラフ図 15 によればその挙動に多少の不安定さは見られるが、温度差が 1 であった初期から温度の最大値・最小値は概ね単調に減少・増加し、やがて 293.5K に収束を果たしている。温度分布のプロット図 16 にも振動による斑点は現れていないことがわかる。したがってシミュレーション①と比べ本来の温度の振る舞いを良く示しているように思えるが、“引き伸ばし”と“折りたたみ”による温度の層は拡散性を強めたことから増加し幅が大きくなっている。

さらに精度良く近似するため拡散定数の値をより小さくし、 $k=0.001, 0.002, 0.003, 0.004$ の場合に計算を実行した。ここでは $maxd\theta$ の振る舞いを確認する。図 17 の通り 0.004 以外はどれも大きく振動してしまったため、これらは精度良く現象をあらわしているとは言えない。拡散定数 0.004 の場合に良い挙動をすると感じ計算を続行したが、図 18 の様にやがて大きく振動をするようになった。そのため拡散定数 0.004 の場合についても良い近似とは言えないであろう。

4.7 シミュレーション①・②の結果まとめ

シミュレーション①においては方程式の安定化を図らずに数値計算を実行した。それゆえ、温度が振動し問題本来の現象をよく表しているとは言えない結果となってしまった。

シミュレーション②においては方程式の安定化を図るため拡散定数 k を導入し数値計算を実行した。拡散定数が $k=0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005$ の場合について計算を行い、拡散定数 0.004 以下では解が振動してしまうことが判明した。

拡散定数の値が小さいほど本来の方程式に近い挙動をすると考えられるため、以上の結果から $k=0.005$ の場合が良い近似をし、本問題の現象を比較的高精度にシミュレーション可能にすると考える。

4.8 結論

物理量 ϕ が速度 u で流れ移流拡散方程式が以下のように成り立つとき、右辺の係数 D を一般に拡散係数という。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \phi = D \Delta \phi$$

拡散定数 $k=0.005$ のとき、本問題における拡散係数 D の値は

$$D(0.005) = \left(\frac{1}{\text{RePr}} + k \right) \approx \left(\frac{1}{62800 \times 7} + 0.005 \right) = 5.002 \times 10^{-3}$$

で与えられる。また 20°C の水中で二酸化炭素を自然対流させる場合、その拡散係数は $D=1.70 \times 10^{-9}$ であるという。 $D(0.005)$ と比較すれば、本問題は強制対流にもかかわらず拡散係数が非常に大きいことがわかる。つまりは、安定化を図り人工粘性法によって移流拡散方程式を置き換えたが、その結果として非常に拡散性の強いものとなってしまったということである。以上のことから、数値計算が不安定になる方程式の近似・安定化には、その問題に見合った適切な

手法を採るべきであると本シミュレーションでは結論づける。

第5章 まとめ

2次元領域における流体攪拌のシミュレーションを行うため、本研究では攪拌という現象の意味を改めて考え、支配方程式の導出も行った。先行研究を参考に問題設定をし、解析に向けて種々の数学的・物理的道具の使用方法を学んだ。現象を再現するためには、その現象の科学的理屈を深く理解することが大切であり、そこに力を注ぐことを意識して本研究を行った。これらの行為によってシミュレーション結果をより適切に捉えることができたと感じる。

しかしシミュレーションの際には高級でない手法を用いることになってしまった。これは著者の理解の及ばなさが原因であり、十分に満足できないシミュレーション結果を得ることになり非常に残念である。参考のため国内外の研究情報を広く集めたが、**Freefem++**によって安定化有限要素法を採用し解析する文献は、最後まで見つけることができなかった。これは著者の憶測であるが、解析手法に安定化有限要素法の採用を考えた場合、**Freefem++**を用いることによる恩恵は可視化に限るものであり、その他アルゴリズムの記述には特に有効でないのかもしれない。(もしくは、まだ試みた者がいないのかもしれない)

本研究の注目に価する成果としては、攪拌のプロセスを再現することができた点にある。連続体の“引き伸ばし”と“折りたたみ”によって溶質が攪拌される様子について、実際にシミュレーションして確認することができた。今後の課題としては、安定化有限要素法を用いた高精度の攪拌再現がもとめられる。

第6章 おわりに

最後ではあるが、失礼を承知してこちらにお礼を記させていただく。本研究にあたり協力してくださった関係者の方々には、とても述べることができないほど感謝の意を抱いている。特に指導教員である桂田祐史准教授には、本レポート提出期限寸前の最後まで絶えずお世話になり続けた。5年間も学部に通い、卒業半年前になっても何の定理も身につけていない落ちこぼれであった著者を、親身になってサポートしていただいた。重ねてお礼申し上げる。

付録 シミュレーションに用いた Freefem++コード

```
/*ThermalConvection-box.edp*/
//////////////////////////////// real value //////////////////////////////////
real rR = 0.05;
real r11 = 0.08;
real r12 = 0.002;
real rc = 2.0*pi;
real rT = 2.0;

real L = 2.0*rR;
real O = rc*rT;
real U = rR*O;

//////////////////////////////// nondimensional value //////////////////////////////////
real R = rR/L;
real l1 = r11/L;
real l2 = r12/L;
real c = L*rc/U;
real T = U*rT/L;

real Pr=7.0;
real rho = 1000.0;
real mu = 0.001;
real Re = rho*U*L/mu;
real IRe = 1.0/Re;
real IRP = 1.0/(Re*Pr);

real k = 0.005;
ofstream csvout("TCbk9999.csv");
```

```

real dt=1.0e-3;
real Idt = 1.0/dt;
//real [int] levels = -1.1:0.1:1.1;

real eps = 1.0e-6;

real omega = 0.0;
real t = 0.0;
real absmax;

int N0 = 100;
int N13 = 40;
int N24 = 2;

int i = 0;
int timestepmax = 100000;
int timeplot = 10;

cout << endl << endl
    << "L = " << L << endl
    << "O = " << O << endl
    << "U = " << U << endl
    << "R = " << R << endl
    << "l1 = " << l1 << endl
    << "l2 = " << l2 << endl
    << "c = " << c << endl
    << "T = " << T << endl
    << "Re = " << Re << endl
    << "Re*Pr = " << Re*Pr << endl
    << "k = " << k << endl
    << "IRP = " << IRP << endl
    << "IRP+k = " << IRP+k << endl

```

```
<< endl << endl;
```

```
func real thini(real x)
{
    if(x<0)
        return 293;
    else
        return 294;
}
```

```
border Gamma0(s=0, 2.0*pi) {x=R*cos(s); y=R*sin(s); label=0;};
border Gamma1(s=0, 1.0) {x=-11/2.0+11*s; y=-12/2.0; label=1;};
border Gamma2(s=0, 1.0) {x=11/2.0; y=-12/2.0+12*s; label=2;};
border Gamma3(s=0, 1.0) {x=11/2.0-11*s; y=12/2.0; label=3;};
border Gamma4(s=0, 1.0) {x=-11/2.0; y=12/2.0-12*s; label=4;};
mesh Th = buildmesh(Gamma0(N0) + Gamma1(-N13) + Gamma2(-N24) + Gamma3(-N13)
+ Gamma4(-N24));
plot(Th, wait=1, value=true, coef=0.1);
```

```
fespace Xh(Th, P1b), Mh(Th, P1);
Xh u1, u2, v1, v2, uu1, uu2, up1, up2, th0;
Mh p, q;
Mh th, psi, phi;
```

```
macro d11(u1) dx(u1) //
macro d22(u2) dy(u2) //
macro d12(u1, u2) (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //
```

```
problem ConvectDiff (th, psi, solver=Croust, init=i)=
int2d(Th)
(
```

```

    Idt * (th * psi)
    +(IRP+k)*(dx(th)*dx(psi) + dy(th)*dy(psi))
    )

-int2d(Th)
    (
    Idt * convect([uu1,uu2],-dt,th0)*psi
    )
;

problem NS([u1,u2,p], [v1,v2,q], solver=CROUT, init=i)=
int2d(Th)
    (
    Idt * (u1*v1 + u2*v2)
    +
    2.0
    *
    IRe
    *
    (d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
    - dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
    - p*q*eps
    )

-int2d(Th)
    (
    Idt
    *
    (convect([up1,up2],-dt,up1)*v1
    +
    convect([up1,up2],-dt,up2)*v2)
    +omega*omega*(x*v1 + y*v2)
    +2.0*omega*(up2*v1 - up1*v2)
    +c*(y*v1 - x*v2)
    )

+on(0,u1=omega*y/U,u2=-omega*x/U)
+on(1,2,3,4,u1=0,u2=0)
;

```

```
th = thini(x);

plot(th, wait=1, value=true, fill=true, coef=0.1);

u1 = 0;
u2 = 0;

for(i = 0; i <= timestepmax; i++)
{
    t = i*dt;
    real rt = t*L/U;

    cout << endl << endl << endl
    << "step = " << i << endl
    << "TIME = " << rt << endl
    << "omega = " << omega << endl
    << endl;

    th0 = th;

    up1=u1;
    up2=u2;

    cout << "PROBLEM NS" << endl;
    NS;

    if(t <= T)
        omega = c*t;
    else
        omega = c*T;
```

```

uu1 = u1;
uu2 = u2;

cout << endl << "PROBLEM ConvectDiff" << endl;
ConvectDiff;

absmax = abs(th0[].max - th0[].min);
csvout << rt << ", " << th0[].min << ", " << th0[].max << ", " << absmax
<< endl;
cout << endl << " Maximum difference of th = " << absmax << endl
<< endl;

if(i%timeplot==0)
{
//plot([u1,u2],th0, cmm=" time =" +rt, value=true, coef=.1);
//plot([u1,u2], cmm=" TIME = " +rt, viso=levels,
value=true, coef=.1);
plot(th0, cmm=" TIME = " +rt, value=true, fill=true);
//plot(p, cmm=" TIME = " +rt, value=true, fill=true,
coef=.1);
}

if(rt>=5.0) break;
}

```

参考文献

- [1] 段家 加生里, 「回転する障害物による流体攪拌」, お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科博士前期課程理学専攻情報科学コース修士論文, お茶の水女子大学, 2015 年

- [2] 妹尾 賢, 有限要素法による熱の移流拡散問題の解析 - 安定化有限要素法の適用と定常問題の解析 -, 大阪工業大学工学部環境工学科卒業論文, 2012 年

- [3] 河村 哲也, 流体解析の基礎, 朝倉書店, 2014 年

- [4] 大塚 厚二・高石 武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理 -FreeFem++ 数理思考プログラミング-, 共立出版 2014 年

- [5] 齊藤 宣一, 数値解析, 共立出版, 2017 年

- [6] 松下 貢, 物理学講義 力学, 裳華房, 2012 年

- [7] フィックの法則, Wikipedia

- [8] 檜山 和男, 有限要素法の「常識」(流体編)『いまさら聞けない計算力学の常識』2012 in 東京

- [9] 高校物理の備忘録「2次元回転座標系」<https://physnotes.jp>

移流拡散方程式の導出は[2]を参考にした。

安定化有限要素法や人工粘性法については[8]を参考にした。

慣性力の導出については[9]を参考にした。